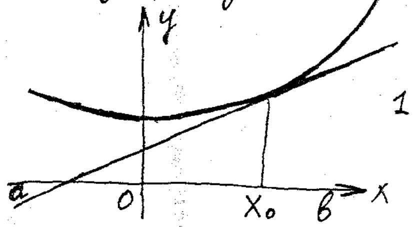
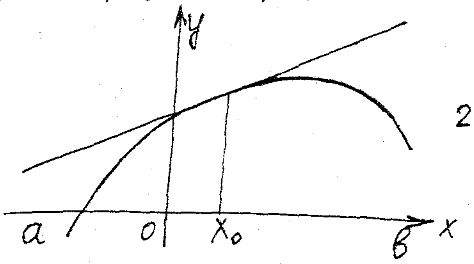
(19) Достаточный признак выпуклости.

<u>Определение 1.</u> График функции $f(x)$ называется выпуклым вниз на промежутке $\langle a; b\rangle$, если на этом промежутке он расположен не ниже <u>каждой</u> касательной к этому графику, проведённой через произвольную точку $(x_0; f(x_0))$, $x_0 \in \langle a; b\rangle$.

<u>Определение 2.</u> График функции $f(x)$ называется выпуклым вверх на промежутке $\langle a; b\rangle$, если на этом промежутке он расположен не выше <u>каждой</u> касательной к этому графику, проведённой через произвольную точку $(x_0; f(x_0))$, $x_0 \in \langle a; b\rangle$.



1.



2.

<u>Т. (достаточный признак выпуклости):</u>

Пусть 1. $f(x) \in C^2(\langle a; b\rangle)$ (т.е. имеет непрерывную вторую производную на $\langle a; b\rangle$)

2. $f''(x) > 0$ (<0) на $\langle a; b\rangle$

$\Downarrow$

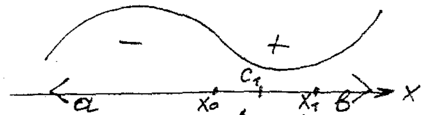
график $y = f(x)$ будет на $\langle a; b\rangle$ выпуклым вниз (вверх).

<u>D.:</u> Наряду с графиком ф-ции $y = f(x)$ рассмотрим касательную, проведённую к этому графику через его произвольную (·) $(x_0; f(x_0))$, $x_0 \in \langle a; b\rangle$. Уравнение такой кас-ой имеет вид:

$$y_к = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$
$$y_{гр} = f(x_1)$$

Изучим знак разности ординат графика и касательной в произвольной точке $x_1 \in \langle a; b\rangle$:

$$y_{гр} - y_к = \underbrace{f(x_1) - f(x_0)} - f'(x_0)(x - x_0) \quad (*)$$



К разности, стоящей в скобках, применяем т. Лагранжа.

В силу существования $f''(x)$ сама ф-ция $f(x)$ и $f'(x)$ будут непрерывны на $\langle a; b\rangle$.

Сл-но на отрезке $[x_0; x_1]$ выполняются все условия т. Лагранжа и

$\exists\, c_1 \in (x_0; x_1)$: $f(x_1) - f(x_0) = f'(c_1)\cdot(x_1 - x_0)$

Подставляем это в $(*)$:

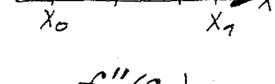
$$y_{гр} - y_к = f'(c_1)(x_1 - x_0) - f'(x_0)(x_1 - x_0) = \left(f'(c_1) - f'(x_0)\right)\cdot(x_1 - x_0)$$

Снова применяем т. Лагранжа, но уже к ф-ции $f'(x)$ на отрезке $[x_0; c_1]$ (объяснить, почему это можно сделать!)

Приходим к соотношению: $\exists\, c_2 \in (x_0; c_1)$

$$y_{гр} - y_к = f''(c_2)(c_1 - x_0)(x_1 - x_0)$$

Где бы ни находилась (·) x_1, справа или слева от x_0,



произведение $(c_1 - x_0)\cdot(x_1 - x_0)$ – положительно, и следовательно, знак разности $y - y_к$ совпадает со знаком $f''(c_1)$

Если выполнено неравенство $f''(x)>0$ на промежутке $\langle a;b\rangle$, то и $f''(c_1)>0$. Значит разность $y_{гр}-y_к>0$, и график функции лежит выше касательной для всех $x \neq x_0$ (в самой (·) x_0 разность $y_{гр}-y_к=0$), т.е. мы имеем выпуклость вниз.

Аналогично рассматривается случай $f''(x)<0$.

(20) Формула Тейлора.

$y = f(x)$

$\Delta y = A\Delta x + o(\Delta x)$

$f(x) - f(x_0) = f'(x)(x-x_0) + o(x-x_0)$

$f(x) = \underbrace{f(x_0) = f'(x)(x-x_0)} + o(x-x_0)$

Требуется найти такой многочлен n-го порядка,

$p_n(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots + b_n x^n$; $b_n \neq 0$

$x - x_0 = t$

$x = x_0 + t$

чтобы при $x \to x_0$ разность $f(x) - p_n(x)$ была беск. малой более высокого порядка, чем $(x-x_0)^n$:

$$f(x) - (b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots + b_n x^n) = o((x-x_0)^n)$$

$$p_n(t) = b_0 + b_1(x_0+t) + b_2(x_0+t)^2 + \ldots + b_n(x_0+t)^n = \left\{\text{раскрываем скобки и приводим подобные члены}\right\} =$$
$$= a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \ldots + a_n t^n$$

Возвращаемся к старой переменной:

$$p_n(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \ldots + a_n(x-x_0)^n$$

Существует тесная связь м/у коэф-ми a_k и производными $p_n^{(k)}(x_0)$.

$p_n(x_0) = a_0$ $\qquad a_0 = p_n(x_0)$

$p_n'(x) = a_1 + 2a_2(x-x_0) + 3a_3(x-x_0)^2 + \ldots + n a_n (x-x_0)^{n-1}$

$p_n'(x_0) = a_1$ $\qquad a_1 = p_n'(x_0)$

$p_n''(x) = 2a_2 + 3\cdot 2\cdot a_3(x-x_0) + 3\cdot 4\cdot a_4(x-x_0)^2 + \ldots + n\cdot(n-1)\cdot a_n(x-x_0)^{n-2}$

$p_n''(x_0) = 2a_2$ $\qquad a_2 = \dfrac{p_n''(x_0)}{2!}$

$a_3 = \dfrac{p_n'''(x_0)}{3!}$

$a_k = \dfrac{p_n^{(k)}(x_0)}{k!}$, $k = 1, 2, \ldots, n.$

$$p_n(x) = p_n(x_0) + p_n'(x_0)(x-x_0) + \frac{p_n''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots + \frac{p_n^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \quad (*)$$

$f(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + \ldots + a_n(x-x_0)^n + o((x-x_0)^n)$ $\quad (x-x_0)\ \omega(x) \to 0$

$f(x) = b_0 + b_1(x-x_0) + \ldots + b_n(x-x_0)^n + (x-x_0)\beta(x)$, $\beta(x) \to 0$

Лемма Пусть для функции ~~$f(x)$ в $(\cdot)x_0$~~ $\varphi(x)$ выполнены след. условия:

$\varphi(x_0) = \varphi'(x_0) = \varphi''(x_0) = \ldots = \varphi^{(n)}(x_0) = 0$

Тогда при $x \to x_0$

$$\varphi(x) = o((x-x_0)^n)$$

$0 = (a_0 - b_0) + (a_1 - b_1)(x-x_0) + \ldots + (a_n - b_n)(x-x_0)^n + (x-x_0)^n \cdot \alpha(x)$, $\alpha(x) \to 0$

$x \to x_0$

$0 = a_0 - b_0$ $\qquad b_0 = a_0$

$0 = (a_1 - b_1) + (a_2 - b_2)(x-x_0) + \ldots + (a_n - b_n)(x-x_0)^{n-1} + (x-x_0)^{n-1} \cdot \alpha(x)$

$f(x) \in C^\infty(U(x_0))$ $\qquad C^\infty$ — бесконеч. диф-мые ф-ция.

Т.: Пусть у ф-ции $f(x)$ в $(\cdot)\ x_0$ существует n-ая производная $f^{(n)}(x_0)$. Тогда при $x \to x_0$ справедлива <u>формула Тейлора</u>:

$$f(x) = f'(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{n}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + o((x-x_0)^n).$$

Д.: Рассмотрим многочлен

$$T_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n,$$

это <u>многочлен Тейлора</u> n-го порядка для функции $f(x)$ в $(\cdot)\ x_0$.

$T_n(x_0) = f(x_0)$

$T_n'(x_0) = f'(x_0)$ ← Аналогия с (*).

$T_n^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0)$

Рассм-им ф-цию $\varphi(x) = f(x) - T_n(x)$

$\varphi(x) = f(x) - T_n(x) = o((x-x_0)^n)$ (т.к. в силу этого ф-ция удовлетворяет условиям леммы)

Переносим $T_n(x)$ в правую часть получаем ф-лу Тейлора (**Т.**):

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f'(x)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + o((x-x_0)^n)$$

$n=1$:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + o(x-x_0)$$

$x_0 = 0$:

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + o(x^n)$$ – <u>ф-ла Маклорена</u>

$(e^x)^{(n)} = e^x$; $\quad e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$

$(\sin x)^{(n)} = \sin(x + \frac{\pi}{2}n)$; $\quad \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots$

$(\cos x)^{(n)} = \cos\frac{\pi}{2}n$; $\quad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$

$[(1+x)^p]^{(n)} = p(p-1)\ldots(p-n+1)(1+x)^{p-n}$

$$(1+x)^p = 1 + px + \frac{p(p-1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{p(p-1)\ldots(p-n+1)}{n!}x^n + \ldots$$

$\ln(1+x)^{(n)} = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n}$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + (-1)^{n+1}\cdot\frac{x^n}{n} + \ldots$$

При выводе ф-лы Маклорена для $\sin x$ учитывают, что все производные чётного порядка этой ф-ции в нуле обращаются в нуль. Аналогично, у $\cos x$ обращаются в нуль все производные нечётного порядка.

21 Дифференцируемость функции 2х переменных, связь с непрерывностью и частными производными.
(Есть разница м/у ф-цией одной пер. и ф-цией 2х перем — пример ф-ции, кот. в (·) имеет обе пр-ые, но разрывна ..)

$z = f(x, y)$

$z = f(M)$; $M(x; y)$ — точка на пл-ти

__Опр.__: Окрестность (·) $M_0(x_0; y_0)$ — множество

$$U(M_0) = \{(x;y) : \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} < \delta, \ \delta > 0\}.$$ $U(M_0)$ — круг с центром в (·) M_0.

Прок. окр.:

$$\overset{\circ}{U}(M_0) = \{(x;y) : 0 < \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} < \delta, \ \delta > 0\}.$$

Предел:
$$\lim_{M \to M_0} f(M) = a$$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \overset{\circ}{U}(M_0) : \forall M \in \overset{\circ}{U}(M_0) \Rightarrow |f(M) - f(M_0)| < \varepsilon$$

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = a$$ — то же самое

__Опр.__: Ф-ция $f(M)$ называется непрерывной в (·) M_0, если

$$\lim_{M \to M_0} f(M) = f(M_0),$$

т.е. если $\forall \varepsilon > 0 \ \exists U(M_0) : \forall M \in U(M_0) \Rightarrow |f(M) - f(M_0)| < \varepsilon$

Полная аналогия с ф-циями одной переменной.
(т-мы о действиях с пределами, о сохр. знака и пр.; об арифм. действиях с непр. ф-циями).

__Т.__: Если ф-ция $f(M)$ непрерывна в (·) M_0, то она лок. ограничена в этой (·).

__Д.__: фиксированное $\varepsilon > 0$. Тогда по условию

$$\exists U(M_0) : \forall M \in U(M_0) \Rightarrow |f(M) - f(M_0)| < \varepsilon$$

по св-ву модуля $|f(M)| - |f(M_0)| \le |f(M) - f(M_0)|$,

сл-но $$\forall M \in U(M_0) \Rightarrow |f(M)| - |f(M_0)| < \varepsilon \Leftrightarrow |f(M)| < \underbrace{|f(M_0)| + \varepsilon}_{} = C$$

$\exists U(M_0) : \forall M \in U(M_0) \Rightarrow |f(M)| \le C$ — огр-ть в (·) M_0 C — постоянная

__Т.__: Если ф-ция $f(M)$ непр. в (·) M_0 и в этой (·): $f(M_0) > 0$ (< 0), то:

$$\exists U(M_0) : \forall M \in U(M_0) \Rightarrow f(M) > 0 \ (< 0)$$

__Д.__: Пусть $f(M) > 0$

возьмём $\varepsilon = \frac{f(M_0)}{2} > 0$. Тогда в силу непрерывности $f(M)$

$$\exists U(M_0) : \forall M \in U(M_0) \Rightarrow |f(M) - f(M_0)| < \frac{f(M_0)}{2},$$

отсюда $$f(M_0) - \frac{f(M_0)}{2} < f(M) < f(M_0) + \frac{f(M_0)}{2}$$

Таким образом, в любой (·) окрестности выполнено:

$$0 < \frac{f(M_0)}{2} < f(M)$$

$\Delta x = x - x_0$, $\Delta y = y - y_0$

$$\Delta z = f(x,y) - f(x_0,y_0) = f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0), \qquad (1)$$

$$\Delta_x z = f(x_0+\Delta x, y_0) - f(x_0,y_0)$$

$$\Delta_y z = f(x_0, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0)$$

Δz – приращение ф-ции $f(x,y)$

$\Delta_x z$, $\Delta_y z$ – частные приращения ф-ции $f(x,y)$ по x и y.

<u>Определение.</u> Частными производными ф-ции $z = f(x,y)$ по x и по y в (·) $(x_0; y_0)$ называются след. пределы:

$$z'_x(x_0;y_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} \quad \text{и} \quad z'_y(x_0;y_0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y}$$

Част. пр-ая – пр-ая по соответствующей переменной при фиксир. значениях остальных переменных.

<u>Определение.</u> Ф-ция $z = f(x,y)$ называется дифференцируемой в (·) $(x_0; y_0)$, если в некоторой окрестности этой (·) выполняется соотношение:

$$\Delta z = A\cdot\Delta x + B\cdot\Delta y + \alpha(\Delta x, \Delta y)\cdot\Delta x + \beta(\Delta x,\Delta y)\cdot\Delta y, \quad (*)$$

где $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \alpha(\Delta x,\Delta y) = \lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \beta(\Delta x,\Delta y) = 0$, A и B – постоянные.

<u>Т.</u>: Если ф-ция диф-ма в (·), то она непрерывна в этой (·). (2)

<u>Д.</u>: Пусть в (·) $(x_0; y_0)$ ф-ция диф-ма, тогда выполняется (*). Но тогда очевидно, что:

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \Delta z = 0$$

а это и есть условие непр-ти ф-ции $z = f(x,y)$.

<u>Т.</u>: Если ф-ция $z = f(x,y)$ диф-ма в (·) $(x_0; y_0)$, тогда у неё в этой (·) существуют обе частные производные, причём $z'_x(x_0;y_0) = A$ и $z'_y(x_0;y_0) = B$, где A и B – постоянные.

<u>Д.</u>: Докажем, что $z'_x(x_0;y_0) = A$.

Из (*) и (1) вытекает, что для дифференцируемой ф-ции выполнено

$$\Delta_x z = A\cdot\Delta x + \alpha(\Delta x,\Delta y)\cdot\Delta x.$$

Поэтому

$$z'_x(x_0;y_0) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\left(A + \alpha(\Delta x,\Delta y)\right) = A.$$

Аналогично доказывается, что $z'_y(x_0;y_0) = B$.

Эта Т. аналогична т. для ф-ции одной переменной.

Однако в случае 2х и более переменных из существования частных производных в (·) не следует диф-ти ф-ции!!!

Пример: $z = f(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{если } x = 0 \text{ или } y = 0 \\ \dfrac{1}{x^2+y^2}, & \text{если } x \neq 0 \text{ и } y \neq 0 \end{cases}$ Ф-ция $=0$ на осях, а вне осей $z = \frac{1}{x^2+y^2}$

$z'_x(0,0) = z'_y(0,0) = 0$, но в то же время не существует $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} f(x,y)$,

т.е. дан. ф-ция разрывна в (·) $(x_0;y_0)$, поэтому она не может быть дифференцируемой: это противоречило бы <u>Т.</u> (2)

Достаточное условие дифференцируемости.

<u>Т.</u>: Если ф-ция $z = f(x,y)$ имеет ~~обе~~ обе частные производные в окрестности (·) $(x_0;y_0)$, которые как функции 2х переменных непрерывны в (·) $(x_0;y_0)$, то ф-ция $z = f(x,y)$ дифференцируема в (·) $(x_0;y_0)$

(22) 2 теоремы о производных сложной функции 2х переменных.

Т.: Пусть функция $z=f(x,y)$ дифференцируема в (·) $(x_0;y_0)$, а функция $x=\varphi(t)$ и $y=\psi(t)$ диф-мы в (·) t_0, причём $x_0=\varphi(t_0)$ и $y_0=\psi(t_0)$. Тогда сложная ф-ция $z(t)=f(\varphi(t),\psi(t))$ диф-ма в (·) t_0 и $z'(t_0)=z'_x(x_0;y_0)\cdot\varphi'(t_0)+z'_y(x_0;y_0)\cdot\psi'(t_0)$ (1)

Это равенство можно записать в другом виде:

$z'_t=z'_x\cdot x'_t+z'_y\cdot y'_t$, где пр-ые вычисляются в соответствующих точках.

Д.: По условию дано, что ф-ция $z=f(x,y)$ диф-ма в (·)$(x_0;y_0)$, поэтому мы можем записать равенство:

$$\Delta z=z'_x(x_0;y_0)\cdot\Delta x+z'_y(x_0;y_0)\cdot\Delta y+\alpha(\Delta x,\Delta y)\cdot\Delta x+\beta(\Delta x,\Delta y)\cdot\Delta y,$$

где Δx и Δy – произвольные приращения аргументов, а

$$\lim_{\substack{\Delta x\to0\\ \Delta y\to0}}\alpha(\Delta x,\Delta y)=\lim_{\substack{\Delta x\to0\\ \Delta y\to0}}\beta(\Delta x,\Delta y)=0$$

Для удобства будем считать $\alpha(0,0)=\beta(0,0)=0$, что не противоречит.

Пусть теперь x и y будут ф-циями от t, дифференцируемыми в (·) t_0. Дадим аргументу t приращение $\Delta t=t-t_0$

Тогда x и y получат соответствующие приращения:

$$\Delta x=\varphi(t_0+\Delta t)-\varphi(t_0) \text{ и } \Delta y=\psi(t_0+\Delta t)-\psi(t_0)$$

Равенство при этом сохранится. Поделим обе его части на Δt:

$$\frac{\Delta z}{\Delta t}=z'_x(x_0;y_0)\cdot\frac{\Delta x}{\Delta t}+z'_y(x_0;y_0)\cdot\frac{\Delta y}{\Delta t}+\alpha(\Delta x,\Delta y)\cdot\frac{\Delta x}{\Delta t}+\beta(\Delta x,\Delta y)\frac{\Delta y}{\Delta t} \quad (2)$$

и перейдём к пределу при $\Delta t\to0$.

В силу диф-ти ф-ций $x=\varphi(t)$ и $y=\psi(t)$ будут и непрерывными в (·) t_0, а тогда:

$$\lim_{\Delta t\to0}\Delta x=\lim_{\Delta t\to0}\Delta y=0,$$

откуда следует, что и $\lim\limits_{\Delta t\to0}\alpha(\Delta x,\Delta y)=\lim\limits_{\Delta t\to0}\beta(\Delta x,\Delta y)=0$.

В свою очередь,

$$\lim_{\Delta t\to0}\frac{\Delta x}{\Delta t}=\varphi'(t_0) \text{ и } \lim_{\Delta t\to0}\frac{\Delta y}{\Delta t}=\psi'(t_0).$$

Таким образом, в пределе равенство (2) перейдёт в (1) или, что то же самое, в $[\,z'_t=z'_x\cdot x'_t+z'_y\cdot y'_t\,]$

$\underline{T.}$: Пусть ф-ция $z = f(x,y)$ дифференцируема в $(\cdot)$ $(x_0; y_0)$, а ф-ция $x = \varphi(u,\vartheta)$ и $y = \psi(u,\vartheta)$ дифф-мы в $(\cdot)$ $(u_0; \vartheta_0)$, причём $x_0 = \varphi(u_0; \vartheta_0)$ и $y_0 = \psi(u_0; \vartheta_0)$.

Тогда сложная ф-ция $z(u,\vartheta) = f(\varphi(u,\vartheta); \psi(u,\vartheta))$ дифф-ма в $(\cdot)$ $(u_0; \vartheta_0)$ и

$$z'_u = z'_x \cdot x'_u + z'_y \cdot y'_u \quad \text{и} \quad z'_\vartheta = z'_x \cdot x'_\vartheta + z'_y \cdot y'_\vartheta,$$

где производные вычисляются в соответствующих точках.

(23) Дифференциал функции 2х переменных, геометрический смысл, инвариантность (касательная плоскость).

Дифференциалом ф-ции $z = f(x,y)$ в (·) $(x_0; y_0)$ называется величина

$$dz = A \cdot \Delta x + B \cdot \Delta y,$$ где A и B – коэффициенты.

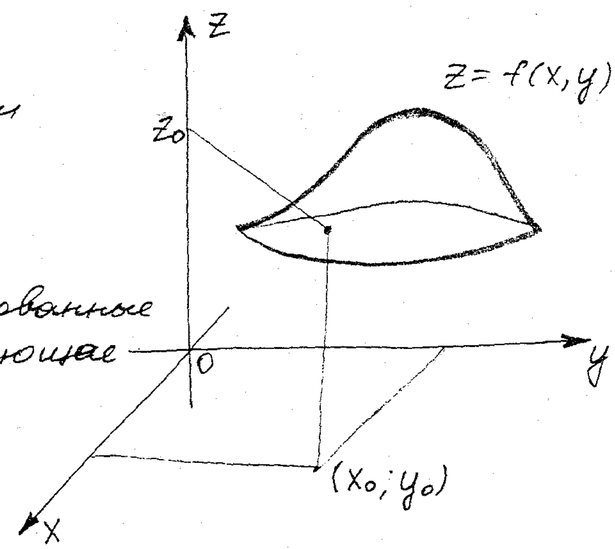
Для линейных ф-ций дифференциал dz совпадает с приращением Δz. В частности, $\Delta x = dx$, $\Delta y = dy$.

Формула для диф-ла:

$$dz = z'_x(x_0; y_0) \cdot \Delta x + z'_y(x_0; y_0) \cdot \Delta y \quad (1)$$

<u>Геометрич. смысл дифференцируемости и дифференциала.</u>

$z = f(x,y)$



Аргументы x и y откладываем на пл-ти Oxy, а значения ф-ции — вдоль оси Oz.

Возьмём теперь некоторые фиксированные значения x_0 и y_0 и соответствующее им значение $z_0 = f(x_0, y_0)$. Через (·) поверхности с ~~~~ коорд. $(x_0; y_0; z_0)$ проходит бесконечно много наклонных плоскостей. Все они задаются ур-ми вида:

$$z - z_0 = A \cdot (x - x_0) + B \cdot (y - y_0)$$, где A и B – постоянные.

Назовём <u>касательной плоскостью</u> к пов-ти $z = f(x,y)$ в (·) $(x_0; y_0; z_0)$ ту из плоскостей, которая обладает след. св-ом:

$$z - z_k = \alpha(\Delta x, \Delta y) \cdot \Delta x + \beta(\Delta x, \Delta y) \cdot \Delta y, \quad (*)$$

где z - координата $z = f(x,y)$ точки на поверхности, z_k - аналогичная координата (·) на плоскости, $\alpha(\Delta x, \Delta y)$ и $\beta(\Delta x, \Delta y)$ – беск. малые при $\Delta x \to 0$ и $\Delta y \to 0$

<u>T.</u>: Для того чтобы поверхность $z = f(x,y)$ обладала в (·) $(x_0; y_0; z_0)$ касательной плоскостью, необходимо и достаточно, чтобы ф-ция $z = f(x,y)$ была дифференцируема в (·) $(x_0; y_0)$.
Касательная пл-ть единственна, её уравнение имеет вид

$$z - z_0 = z'_x(x_0; y_0) \cdot (x - x_0) + z'_y(x_0; y_0) \cdot (y - y_0). \quad (2)$$

Д.: Пусть $z = f(x,y)$ диф-ма в (·) $(x_0;y_0)$. Тогда справедливо равенство:

$$\Delta z = z'_x(x_0;y_0)\cdot\Delta x + z'_y(x_0;y_0)\cdot\Delta y + \alpha(\Delta x,\Delta y)\cdot\Delta x + \beta(\Delta x,\Delta y)\cdot\Delta y,$$

или

$$z - z_0 = z'_x(x_0;y_0)\cdot(x-x_0) + z'_y(x_0;y_0)\cdot(y-y_0) + \alpha(\Delta x,\Delta y)\cdot\Delta x + \beta(\Delta x,\Delta y)\cdot\Delta y.$$

Рассмотрим плоскость, задаваемую ур-ем (2).
Для этой пл-ти выполнено св-во (✱), т.е. она является касательной плоскостью.
Теперь пусть существует пл-ть, задаваемая уравнением

$$z - z_0 = A\cdot(x-x_0) + B\cdot(y-y_0),$$

удовлетворяющая условию (✱), т.е. касательная плоскость.
Тогда аналогично одномерному случаю находим, что на поверхности выполняется соотношение

$$\Delta z = A\cdot\Delta x + B\cdot\Delta y + \alpha(\Delta x,\Delta y)\cdot\Delta x + \beta(\Delta x,\Delta y)\cdot\Delta y.$$

Но это и есть ни что иное, как определение дифференцируемости.
Сл-но, ф-ция $f(x,y)$ диф-ма в (·) $(x_0;y_0)$, а коэффициенты A и B совпадают с соответствующими производными, поэтому касательная плоскость имеет ур-ие (2). <u>ч.т.д.</u>

Из ур-ия (2) подобно одномерному случаю вытекает, что диф-ал совпадает с приращением координаты z касательной плоскости.

<u>диф-ал</u> – главная линейная часть приращения

$$dz = z'_x\Delta x + z'_y\Delta y$$

$$\boxed{dz = z'_x dx + z'_y dy}$$

Используем (1), но x и y уже будут ф-циями от u и v.
(1) сохранится, а диф-лы dx и dy уже не будут совпадать с приращениями Δx и Δy, но будут совпадать с диф-ми ф-ций $x = \varphi(u,v)$ и $y = \psi(u,v)$ в (·) $(u_0;v_0)$ <u>(билет №22 Т. 2-я)</u>

$$dz = z'_u du + z'_v dv = (z'_x\cdot x'_u + z'_y\cdot y'_u)du + (z'_x\cdot x'_v + z'_y\cdot y'_v)dv =$$
$$= z'_x\cdot(x'_u du + x'_v dv) + z'_y(y'_u du + y'_v dv) = \underline{z'_x dx + z'_y dy}$$

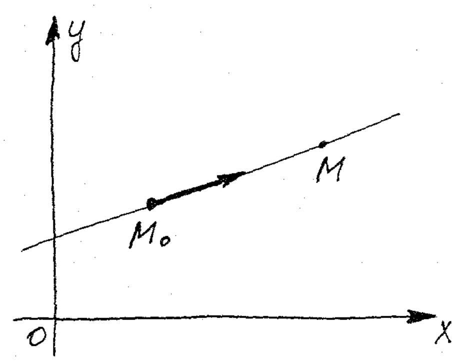
Таким образом, для ф-ций 2х переменных диф-ал дифференциал обладает св-вом <u>ИНВАРИАНТНОСТИ</u>.

24 Производная по направлению. Градиент.

Если интерпретировать ф-цию 2х переменных как ф-цию точки на плоскости, то частные производные приобретают очевидный смысл – это скорости изменения ф-ции в направлении координатных осей. Поставим вопрос о скорости изменения ф-ции в произвольном направлении.

Для этого выберем (·) $M_0(x_0; y_0)$ и зададим направление с помощью единичного направляющего вектора:

$$\vec{e} = \{e_x; e_y\}, \quad |\vec{e}| = 1$$



Сместимся теперь из (·) M_0 вдоль прямой с направляющим вектором $\vec{e}$. Обозначим через M_0M расстояние м/у этими точками, взятое со ЗНАКОМ, т.е. M_0M = расс-ию м/у точками M_0 и M, если мы сместились в направлении вектора $\vec{e}$, и МИНУС расстоянию, если мы сместились в противоположную сторону.

<u>Определение</u>: Производной ф-ции $z = f(M)$ по НАПРАВЛЕНИЮ $\vec{e}$ в (·) M_0 называется выражение

$$z'_{\vec{e}}(M_0) = \lim_{M \to M_0} \frac{f(M) - f(M_0)}{M_0M} \quad (1)$$

<u>**Т.**</u>: Пусть данная ф-ция $z = f(x, y)$ дифференцируема в (·) $M_0(x_0; y_0)$. Тогда у неё существует производная по любому направлению $\vec{e}$; производная вычисляется по формуле

$$z'_{\vec{e}}(M_0) = z'_x(M_0) \cdot e_x + z'_y(M_0) \cdot e_y \quad (2)$$

<u>**Д.**</u>: Зададим прямую, проходящую ч/з (·) M_0 в направлении вектора $\vec{e}$, в параметрической форме $\overrightarrow{M_0M} = t \cdot \vec{e}$ или в виде

$$\begin{aligned} x &= x_0 + t \cdot e_x, \\ y &= y_0 + t e_y. \end{aligned} \quad (*)$$

Из этих ф-ул ~~видно~~ следует, что параметр t как раз и совпадает с введённым ранее расстоянием со знаком M_0M. Поэтому ф-лу (1) можно переписать в виде

$$z'_{\vec{e}}(M_0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + t \cdot e_x, y_0 + t \cdot e_y) - f(x_0, y_0)}{t}$$

Но это выражение есть не что иное как определение пр-ой в (·) 0 сложной ф-ции от t

$z(t) = f(x(t), y(t))$, где ф-ции $x(t)$ и $y(t)$ задаются формулами (*).

Поскольку по условию $z = f(x,y)$ диф-ма в (·)$(x_0; y_0)$, а функции $x(t)$ и $y(t)$ диф-мы на всей числовой оси как линейные ф-ции от t, причём

$$x(0) = x_0 \text{ и } y(0) = y_0,$$

получаем по $\underline{T}$. о слож. ф-ции (билет 22, Т №1), что

$$z'_{\vec{e}}(M_0) = z'_x(M_0)\cdot x'(M_0) + z'_y(M_0)\cdot y'(M_0),$$ т.е ф-лу (2). ч.т.д.

<u>Замечание 1.</u> Т.к. координаты единичного вектора $\vec{e}$ можно записать в виде

$$e_x = \cos\alpha \text{ и } e_y = \cos\beta = \sin\alpha,$$

где α и β - углы, кот-е вектор $\vec{e}$ образует с коорд. осями Ox и Oy соответственно, можно записать соотношение (2) в иной форме:

$$z'_{\vec{e}}(M_0) = z'_x(M_0)\cdot\cos\alpha + z'_y(M_0)\cdot\cos\beta = z'_x(M_0)\cdot\cos\alpha + z'_y(M_0)\cdot\sin\alpha$$

<u>Замечание 2.</u> Для ф-ции 3х переменных $u = f(x,y,z)$ можно ввести аналогичное понятие и док-ть теорему, подобную **Т** (см. выше), причём производная по направлению будет вычисляться по формулам:

$$u'_{\vec{e}}(M_0) = u'_x(M_0)\cdot e_x + u'_y(M_0)\cdot e_y + u'_z(M_0)\cdot e_z = u'_x(M_0)\cdot\cos\alpha + u'_y(M_0)\cdot\cos\beta + u'_z(M_0)\cdot\cos\gamma,$$

где $\vec{e} = \{e_x, e_y, e_z\} = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$, а углы α, β и γ образованы вектором $\vec{e}$ с осями координат.

<u>Определение</u>. ГРАДИЕНТОМ ф-ции $z = f(x,y)$ в (·) $M_0(x_0; y_0)$ называется вектор

$$\vec{\nabla} z(M_0) = \{z'_x(M_0); z'_y(M_0)\}.$$

Для дифференцируемой ф-ции такой вектор всегда существует.

Сопоставляя эту ф-лу и (2), получаем ещё одно выражение для производной по направлению в виде скалярного произведения

$$z'_{\vec{e}}(M_0) = \vec{\nabla}_z(M_0)\cdot\vec{e} = |\vec{\nabla} z(M_0)|\cdot|\vec{e}|\cdot\cos\varphi,$$

где φ - угол м/у градиентом и вектором $\vec{e}$.

Т.к. $|\vec{e}| = 1$, можно заметить, что максимальное по модулю (и притом неотрицательное) значение производная $z'_{\vec{e}}(M_0)$ принимает при $\varphi = 0$ и совпадает в этом случае с $|\vec{\nabla} z(M_0)|$.

Таким образом, градиент направлен в сторону максимального роста ф-ции в данной точке, а его модуль совпадает с максимальной скоростью роста.

Это означает, что градиент обладает св-вом ИНВАРИАНТНОСТИ относительно системы координат. Если, например, повернуть систему координат на плоскости, то изменятся координаты x и y, а также и координаты градиента, но изменятся они так, что сам градиент как вектор при этом останется неизменным.

(25) Локальный экстремум функции 2х переменных.

Рассмотрим ф-цию 2х пер-ых $z = f(x,y)$, определённую в некоторой окрестности (.) $M_0(x_0;y_0)$

<u>Определение.</u> Ф-ция $z = f(x,y)$ имеет в (.) M_0 локальный максимум (минимум), если

$$\exists \overset{\circ}{U}(M_0): \forall M \in \overset{\circ}{U}(M_0) \Rightarrow f(M) < f(M_0) \quad (f(M) > f(M_0)).$$

Если заменить знак неравенства на нестрогий ($\geq / \leq$), то говорят о нестрогом максимуме (минимуме).

Собирательное название лок. min и max : локальный экстремум.

<u>Т. (необходимое условие локального экстремума):</u>

1. $z = f(x,y)$ имеет в (.) $M_0(x_0;y_0)$ лок. экстремум (быть может, нестрогий)
2. $z = f(x,y)$ дифференцируема в этой (.) M_0

$\Downarrow$

$$z'_x(x_0;y_0) = z'_y(x_0;y_0) = 0$$

Эта Т. аналогична т. Ферма для ф-ции одной переменной.

<u>D.:</u> Пусть в (.) M_0 лок. максимум. Тогда

$$\exists \overset{\circ}{U}(M_0) : \forall M \in \overset{\circ}{U}(M_0) \Rightarrow f(M) \leq f(M_0)$$

Расс-им ф-цию одной переменной $\varphi(x) = f(x, y_0)$. Очевидно, $\varphi'(x_0) = z'(x_0;y_0)$. Обозначим ч/з $\overset{\circ}{U}(x_0)$ проекцию окрестности $\overset{\circ}{U}(M_0)$ на ось Ox. Тогда для $\forall x \in \overset{\circ}{U}(x_0)$ выполнено $\varphi(x) \leq \varphi(x_0)$. Следовательно, у $\varphi(x)$ в (.) x_0 имеется локальный максимум.

Кроме того, в силу диф-ти $z = f(x,y)$ в (.) $(x_0;y_0)$ существует $z'_x(x_0;y_0) = \varphi'(x_0)$, а значит, $\varphi(x)$ диф-ма в (.) x_0. Тогда по т. Ферма $\varphi'(x) = 0$, т.е. $z'_x(x_0;y_0) = 0$. Аналогично, вводя функцию $\psi(y) = f(x_0;y)$, получим, что и $z'_y(x_0;y_0) = 0$. <u>ч.т.д.</u>

<u>Определение.</u> Функция $z = f(x,y) \in$ классу $C^2(D)$ (на мн-ве D), если в каждой (.) мн-ва D ф-ция $z = f(x,y)$ непрерывна и имеет все первые и все вторые частные производные, также непрерывные на D.

<u>Т. (достаточное условие локального экстремума):</u>

Пусть ф-ция $z = f(x,y)$ определена в окр. $U(M_0)$ и $\in$ классу $C^2(U(M_0))$. Пусть, кроме того, ф-ция удовлетворяет следующим условиям:

1. $z'_x(x_0;y_0) = z'_y(x_0;y_0) = 0$
2. $\Delta = \begin{vmatrix} z''_{xx} & z''_{xy} \\ z''_{yx} & z''_{yy} \end{vmatrix} \neq 0$, где определитель вычислен в (.) $M_0(x_0;y_0)$.

Тогда, если $\Delta > 0$, то ф-ция $z = f(x,y)$ имеет в (.) M_0 локальный экстремум; причём максимум, если $z''_{xx} < 0$, и минимум, если $z''_{xx} > 0$.

Если $\Delta < 0$, то ф-ция $z = f(x,y)$ не имеет в (.) M_0 локального экстремума.

Замечание 1. В данной теореме речь идёт о строгом экстремуме.

Замечание 2. Если $\Delta = 0$, то этот признак не позволяет судить о наличие локального экстремума и требуется дополнительное исследование.