① Предел. Ограниченность величины, имеющей предел; связь с бесконечно малыми. Единственность предела.

Последовательность – функ. натурального аргумента $\{a_n\}$

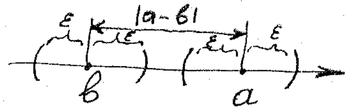
$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$

$\forall \varepsilon>0\ \exists N: \forall n \geq N \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon \quad (*)$

Т.: Если последовательность сходится, то она имеет предел только один.

Д.: Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ и $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = b$, $a \neq b$

$0 < \varepsilon < \dfrac{|a-b|}{2}$



тогда 2 ε-окр-ти (.) a и (.) b не будут пересекаться.

$\forall \varepsilon > 0\ \exists N_1: \forall n \geq N_1 \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon \quad (1)$

(все a_n с номерами $> N_1$ поп. в ε-окр (.) a)

$\forall \varepsilon > 0\ \exists N_2: \forall n \geq N_2 \Rightarrow |a_n - b| < \varepsilon \quad (2)$

(все a_n, $n > N_2$ поп. в ε-окр. (.) b)

Возьмём $N = \max\{N_1; N_2\}$:

$n \geq N \Rightarrow \underline{n \geq N_1 \text{ и } n \geq N_2}$

$\Downarrow$

$\forall n \geq N$ выполняются (1) и (2)

$\Downarrow$

члены a_n с такими номерами должны одновр. попасть в ε-окр. (.) a и b, что невозможно, т.к. эти окр-ти не пересекаются.

Предполож. ложно $\Rightarrow$ 2х пред. нет!!! ч.т.д.

Ограниченная последовательность.

$\{a_n\}$ – огр. посл-ть, если

$\exists C > 0$ и $\exists N: \forall n \geq N \Rightarrow |a_n| \leq C$

Т.: Всякая сходящаяся посл-ть ограничена.

Д.: Возьмём $\varepsilon > 0$ ($\varepsilon = 1 > 0$), тогда

$\exists N: \forall n \geq N \Rightarrow |a_n - a| < 1\ (<\varepsilon)$

$|a_n| - |a| \leq |a_n - a|$

$\Downarrow$

$\forall n \geq N: |a_n| - |a| < 1\ (<\varepsilon)$

$|a_n| < \underline{|a| + 1}$ $\quad \underbrace{(|a| + \varepsilon)}_{C > 0}$

обознач. за $C > 0$

получаем

ч.т.д.

Обратное утв-ие неверно, т.к. посл-ть 1; 0; 1; 0 … – огр-на, но предела не имеет.

Окрестность – множество след-го вида:

$U(x_0) = \{x: |x - x_0| < \delta\}$, где $\delta > 0$, т.е.

$U(x_0)$ – симметрич. интервал $(x_0 - \delta; x_0 + \delta)$ с центром в (.) x_0 длины 2δ

Прок. окр-ть. –″– вида:

$\mathring{U}(x_0) = \{x: 0 < |x - x_0| < \delta\}$, где $\delta > 0$

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$

$\forall \varepsilon > 0\ \exists \mathring{U}(x_0): \forall x \in \mathring{U}(x_0) \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon \quad (*)$

Т.: Если у ф. $f(x)$ сущ-ет $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, то он единственный

Д.: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a$, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = b$, $a \neq b$.

–″– –″– $0 < \varepsilon < \dfrac{|a-b|}{2}$

По определению:

$\exists \mathring{U}_1(x_0): \forall x \in \mathring{U}_1(x_0) \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon$, т.е.

число $f(x)$ попадает в ε-окр. (.) a

$\exists \mathring{U}_2(x_0): \forall x \in \mathring{U}_2(x_0) \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon$, т.е.

число $f(x)$ попадает в ε-окр (.) b

$\mathring{U}(x_0) = \mathring{U}_1(x_0) \cap \mathring{U}_2(x_0)$

$\mathring{U}(x_0)$ совпадает с той из окр-ей $\mathring{U}_1(x_0)$ и $\mathring{U}_2(x_0)$, у которой радиус меньше.

для $\forall x \in \mathring{U}(x_0)$ вып-ся оба нер-ва

число $f(x)$ попадает одновр. в инт. $(a-\varepsilon; a+\varepsilon)$ и $(b-\varepsilon; b+\varepsilon)$.

Но эти интервалы не имеют общих точек

$\Downarrow$

$f(x)$ не имеет 2 неравных предела, предположение ложно. ч.т.д.

Ф-ция $f(x)$ – лок. огр. в (.) x_0, если

$\exists C > 0$ и $\exists \mathring{U}(x_0): \forall x \in \mathring{U}(x_0) \Rightarrow \boxed{|f(x)| \leq C}$

Т.: Если $\exists \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, то ф-ция $f(x)$ локально ограничена в (.) x_0.

Д.: Возьмём $\varepsilon > 0$ ($\varepsilon = 1 > 0$), тогда

$\exists \mathring{U}(x_0)\ \forall x \in \mathring{U}(x_0)\ |f(x) - a| < 1\ (<\varepsilon)$

$|f(x)| - |a| \leq |f(x) - a|$ $\quad (|f(x)| < \underbrace{|a| + 1}_{C})$

$\Downarrow$

$\forall x \in \mathring{U}(x_0)\ |f(x)| - |a| < \varepsilon$, т.е. $|f(x)| < |a| + \varepsilon$

$C = |a| + \varepsilon$, получаем

т.е. $\underline{|f(x)| < C}$ (строгое можно заменить нестрогим)

ч.т.д.

$\{\alpha_n\}$ - б.м. посл-ть, если $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N : \forall n \geq N \Rightarrow |\alpha_n| < \varepsilon$

Т. (о связи пределов с беск. малыми):

Для посл-ти $\{a_n\}$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \Leftrightarrow a_n = a + \alpha_n, \text{ где } \lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0$$

Д.: 1) Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. В силу (*):

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N : \forall n \geq N \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon$

$a_n - a = \alpha_n$, $\alpha_n = a_n - a$ $|\alpha_n|$ - выполнено условие

$\{\alpha_n\}$ - б.м.

2) Пусть $a_n = a + \underset{\text{б.м.}}{\alpha_n}$, где $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N : \forall n \geq N \Rightarrow |\alpha_n| < \varepsilon$, значит

$|a_n - a| < \varepsilon$,

т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ ч.т.д.

$\alpha(x)$ - б.м. при $x \to x_0$, если $\lim\limits_{x\to x_0} \alpha(x) = 0$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \mathring{U}(x_0) : \forall x \in \mathring{U}(x_0) \Rightarrow |\alpha(x)| < \varepsilon$.

Т. (о связи пределов с б.м.):

Для ф-ции $f(x)$

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = a \Leftrightarrow \exists \mathring{U}(x_0) : f(x) = a + \alpha(x),$$

где $\alpha(x)$ - б.м.

Д.: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a$ $\alpha(x) = f(x) - a$ $f(x) = a + \alpha(x)$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \mathring{U}(x_0) : \forall x \in \mathring{U}(x_0)$ $|f(x) - a| < \varepsilon$

$|\alpha(x)| < \varepsilon$

$|f(x) - a| < \varepsilon$

$\lim\limits_{x\to x_0} \alpha(x) = 0$

← Аналогия с посл-тью

② Свойства бесконечно малых, связь с бесконечно большими.

$\{\alpha_n\}$ - б.м. посл-ть, если $\lim_{n\to\infty}\alpha_n=0$

$\forall\varepsilon>0\ \exists N:\ \forall n\geq N \Rightarrow |\alpha_n|<\varepsilon$

Т.: Сумма (разность) беск. малых есть б.м.

Д.: Пусть $\lim_{n\to\infty}\alpha_n=0$ и $\lim_{n\to\infty}\beta_n=0$

$\gamma_n=\alpha_n\pm\beta_n$ (д-ть $\alpha_n\pm\beta_n$ - б.м.)

$\forall\varepsilon>0\ \frac{\varepsilon}{2}>0\ \exists N_1:\ \forall n\geq N_1 \Rightarrow |\alpha_n|<\frac{\varepsilon}{2}$

$\exists N_2:\ \forall n\geq N_2 \Rightarrow |\beta_n|<\frac{\varepsilon}{2}$

$N=\max\{N_1;N_2\}$:

$\forall n\geq N \Rightarrow \underbrace{|\alpha_n+\beta_n|}_{|\gamma_n|=}\leq|\alpha_n|+|\beta_n|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$

$\lim_{n\to\infty}\underbrace{(\alpha_n+\beta_n)}_{\gamma_n}=0$ (мы пришли к опред. б.м.: $\forall\varepsilon>0\ \exists N:\ \forall n\geq N \Rightarrow |\gamma_n|<\varepsilon$

Следствие: Сумма (разность) любого конечного числа б. малых есть б.м.

Д.: если $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$ и $\{\gamma_n\}$ - б.м., то посл-ть $\delta_n=\alpha_n+\beta_n+\gamma_n$ можно представ. в виде

$\delta_n=\underbrace{(\alpha_n+\beta_n)}_{б.м.}+\gamma_n \Rightarrow$ б.м. $+\ \gamma_n$ Аналогично при любом конечном числе слагаемых.

Т.: Пр-ие б.м. на ограниченную есть б.м.

Д.: Пусть $\{\alpha_n\}$ - б.м., а $\{b_n\}$ - огранич-я

$\{\alpha_n\cdot b_n\}$ - б.м.

$\exists C>0\ \exists N_1:\ \forall n\geq N_1\ |b_n|\leq C$ - огр-ая

$\forall\varepsilon>0\ \frac{\varepsilon}{C}>0\ \exists N_2\ \forall n\geq N_2\ |\alpha_n|<\frac{\varepsilon}{C}$ - б.м.

$N=\max\{N_1;N_2\}$

$\forall n\geq N \Rightarrow |\alpha_n\cdot b_n|=|\alpha_n|\cdot|b_n|<\frac{\varepsilon}{C}\cdot C=\varepsilon$,

сл-но $\underbrace{\alpha_n\cdot b_n}_{\beta_n}$ - б.м.

Следствие 1. Пр-ие 2х б.м. есть б.м.

Д.: Пусть $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$ - б.м.

т.к. $\{\beta_n\}$ - б.м, то $\lim_{n\to\infty}\beta_n=0 \Rightarrow$ сл-но она огр-на (всякая сходящ. посл-ть огр-на)

По предыдущей т-ме далее: $\{\alpha_n\cdot\beta_n\}$ - б.м.

Следствие 2. Пр-ие любого числа б. малых есть б.м. Аналогично док-ву к следствию из предыдущей т-мы.

$\alpha(x)$ - б.м. при $x\to x_0$, если $\lim_{x\to x_0}\alpha(x)=0$

$\forall\varepsilon>0\ \exists\mathring{U}(x_0):\ \forall x\in\mathring{U}(x_0) \Rightarrow |\alpha(x)|<\varepsilon$.

Т.: Сумма (разность) 2х б.м. есть б.м.

Д.: Пусть $\lim_{x\to x_0}\alpha(x)=0$ и $\lim_{x\to x_0}\beta(x)=0$

$\varphi(x)=\alpha(x)\pm\beta(x)$

Возьмём $\forall\varepsilon>0$ и применим опр. б.м. ($\varepsilon=\frac{\varepsilon}{2}$):

$\exists\mathring{U}_1(x_0):\ \forall x\in\mathring{U}_1(x_0) \Rightarrow |\alpha(x)|<\frac{\varepsilon}{2}$

$\exists\mathring{U}_2(x_0):\ \forall x\in\mathring{U}_2(x_0) \Rightarrow |\beta(x)|<\frac{\varepsilon}{2}$

Положим $\mathring{U}(x_0)=\mathring{U}_1(x_0)\cap\mathring{U}_2(x_0)$

при $x\in\mathring{U}(x_0)$ вып-ся оба нер-ва, сл-но

$|\varphi(x)|=|\alpha(x)\pm\beta(x)|\leq|\alpha(x)|+|\beta(x)|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$, $\forall x\in\mathring{U}$;

т.е. $\varphi(x)$ - б.м.

Следствие: Сумма (разность) любого конечного числа б.м. есть б.м.

Т.: Пр-ие б.м. ф-ции на лок. огр-ую есть б.м.

Д.: $\lim_{x\to x_0}\alpha(x)=0$, а $f(x)$ - лок. огр. в (.) x_0

$\varepsilon>0$, разделим его на постоянную C:

по опр. б.м.: $\exists\mathring{U}_1(x_0):\ \forall x\in\mathring{U}_1(x_0) \Rightarrow |\alpha(x)|<\frac{\varepsilon}{C}$

В силу опр. лок. огр.:

$\exists\mathring{U}_2(x_0):\ \forall x\in\mathring{U}_2(x_0) \Rightarrow |f(x)|\leq C$

Положим $\mathring{U}(x_0)=\mathring{U}_1(x_0)\cap\mathring{U}_2(x_0)$

Тогда $|\alpha(x)\cdot f(x)|=|\alpha(x)|\cdot|f(x)|<\frac{\varepsilon}{C}\cdot C=\varepsilon$, $\forall x\in\mathring{U}$

Сл-но $\lim_{x\to x_0}\underbrace{\alpha(x)\cdot f(x)}_{б.м.}=0$

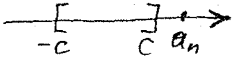
Следствие 1: Пр-ие 2х б.м. есть б.м.

Следствие 2: Пр-ие любого числа б.м. есть б.м.

Определение: $\{a_n\}$ - беск. большая, если

$$\forall C>0 \ \exists N: \forall n \geq N \Rightarrow |a_n|>C$$

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\infty$ - расходящаяся посл-ть



T.: Пусть $\{a_n\}$ - б. большая, тогда $\{\frac{1}{a_n}\}$ - б.м.

Д: $\forall \varepsilon>0$ $C=\frac{1}{\varepsilon}$ (по опр. б.б.):

$$\exists N: \forall n \geq N \Rightarrow |a_n| > \frac{1}{\varepsilon}$$

для тех же n выполнено

$$\left|\frac{1}{a_n}\right| = \frac{1}{|a_n|} < \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon}} = \varepsilon$$

мы получили определение б. малой для $\{\frac{1}{a_n}\}$

Определение: Ф-ция $f(x)$ называется беск. большой при $x \to x_0$, если

$$\forall C>0 \ \exists \mathring{U}(x_0): \forall x \in \mathring{U}(x_0) \Rightarrow |f(x)|>C$$

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\infty$$

У б.б. нет настоящ. предела, и теоремы о пределах могут не выполняться.

T.: Пусть $f(x)$ - б.б. при $x \to x_0$, тогда $\frac{1}{f(x)}$ - б.м., при $x \to x_0$.

Д: Возьмём $\varepsilon>0$, $C=\frac{1}{\varepsilon}$

$$\exists \mathring{U}(x_0): \forall x \in \mathring{U}(x_0) \Rightarrow |f(x)|>C=\frac{1}{\varepsilon}$$

Поэтому для тех же значений x:

$$\left|\frac{1}{f(x)}\right| = \frac{1}{|f(x)|} < \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon}} = \varepsilon \quad (<\varepsilon)$$

Мы пришли к определению б.м.

③ Предел суммы, разности, произведения и частного.

Т.: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ и $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, тогда сущ-ет $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = a \pm b$

Д.: В силу Т. о связи пределов с б.м. (T1): $a_n = a+\alpha_n$ и $b_n = b+\beta_n$, $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$ – б.м. Поэтому

$$a_n \pm b_n = (a\pm b) + \underbrace{(\alpha_n \pm \beta_n)}_{\text{б.м.}} = a \pm b \text{ – предел посл-ти } \{a_n \pm b_n\}$$

Т.: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ и $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$

Тогда сущ-ет $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = a\cdot b$

Д.: По T1 имеем $a_n = a+\alpha_n$ и $b_n = b+\beta_n$ $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n = \lim\limits_{n\to\infty}\beta_n = 0$

Тогда

$$a_n\cdot b_n = (a+\alpha_n)\cdot(b+\beta_n) = a\cdot b + \underbrace{(a\cdot\beta_n + \alpha_n\cdot b + \alpha_n\cdot\beta_n)}_{\text{б.м.}}$$

ЛЕММА: Пусть посл-ть $\{\beta_n\}$ удовлетв. условиям:

1. $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$
2. $b\neq 0$, $b_n \neq 0$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{b_n} = \frac{1}{b}$

Д.: По T1 $b_n = b + \underbrace{\beta_n}_{\text{б.м}}$, где $\lim\limits_{n\to\infty}\beta_n = 0$

$$\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b} = \frac{1}{b+\beta_n} - \frac{1}{b} = \left(-\frac{1}{b\cdot(b+\beta_n)}\right)\cdot\beta_n$$

$\varepsilon = \frac{|b|}{2} > 0$. В силу определения б.м.:

$\exists N: \forall n \geq N \Rightarrow |\beta_n| < \frac{|b|}{2}$

св-во модулей: $|b+\beta_n| \geq |b| - |\beta_n| > |b| - \frac{|b|}{2} = \frac{|b|}{2}$

для этих n выполнено:

$$\left|-\frac{1}{b\cdot(b+\beta_n)}\right| = \frac{1}{|b|\cdot|b+\beta_n|} < \frac{1}{|b|\cdot\frac{|b|}{2}} = \frac{2}{|b|^2} = \frac{2}{b^2}$$

$\left\{-\frac{1}{b\cdot(b+\beta_n)}\right\}$ – ограниченная $\quad \frac{1}{b_n} - \frac{1}{b} = \gamma_n$ – б.м.

$\frac{1}{b_n} = \frac{1}{b} + \gamma_n \quad \lim\limits_{n\to\infty}\gamma_n = 0$

Сл-но утверждение леммы верно

Т.: Пусть $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ удовлетворяют:

1. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$
2. $b \neq 0$, $b_n \neq 0$

$\Downarrow$

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$

Д.: $\frac{a_n}{b_n} = a_n \cdot \frac{1}{b_n}$

по Лемме: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n = a\cdot\frac{1}{b} = \frac{a}{b}$

Т.: Пусть сущ. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a$ и $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = b$, тогда $\exists \lim\limits_{x\to x_0}(f(x)\pm g(x)) = a\pm b$.

Д.: В силу Т. о св. пред. с б.м. (T1): $f(x) = a+\alpha(x)$ и $g(x) = b+\beta(x)$, где $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ – б.м. Поэтому

$$f(x)\pm g(x) = (a\pm b) + \underbrace{(\alpha(x)\pm\beta(x))}_{\text{б.м.}}$$

Т.: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a$ и $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = b$, тогда $\exists \lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\cdot g(x)] = a\cdot b$

Д.: По T1 имеем $f(x) = a+\alpha(x)$; $g(x) = b+\beta(x)$

$$f(x)\cdot g(x) = (a+\alpha(x))(b+\beta(x)) = a\cdot b + \underbrace{(a\beta(x) + b\alpha(x) + \alpha(x)\cdot\beta(x))}_{\text{б.м.}}$$

ЛЕММА:

1. $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = b$
2. $b\neq 0$ и $g(x)\neq 0$ в нек. $\mathring{U}(x_0)$

$\Rightarrow \exists\lim\limits_{x\to x_0}\frac{1}{g(x)} = \frac{1}{b}$

Д.: В силу T1: $g(x) = b+\beta(x)$, где $\lim\limits_{x\to x_0}\beta(x) = 0$

Далее,

$$\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{b} = \frac{1}{b+\beta(x)} - \frac{1}{b} = \underbrace{\underbrace{\left(-\frac{1}{b\cdot(b+\beta(x))}\right)}_{\text{лок. огр.}}\cdot\beta(x)}_{=\varphi(x) \text{ б.м.}}$$

$\varepsilon = \frac{|b|}{2} > 0$, тогда в силу опр-ия б.м.:

$\exists \mathring{U}_1(x_0): \forall x\in\mathring{U}_1(x_0) \Rightarrow |\beta(x)| < \frac{|b|}{2}$

Отсюда:

$|b+\beta(x)| \geq |b| - |\beta(x)| > |b| - \frac{|b|}{2} = \frac{|b|}{2}$, $x\in\mathring{U}_1(x_0)$

Тогда в $\mathring{U}_2(x_0) = \mathring{U}(x_0)\cap\mathring{U}_1(x_0)$ справедливо:

$$\left|-\frac{1}{b\cdot(b+\beta(x))}\right| = \frac{1}{|b||b+\beta(x)|} < \frac{1}{|b|\cdot\frac{|b|}{2}} = \frac{2}{|b|^2} = \frac{2}{b^2}$$

б.м.

$\frac{1}{g(x)} = \frac{1}{b} + \varphi(x)$, где $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x) = 0$

По Т о св. пред. с б.м. утверждение леммы верно.

Т. Пусть $f(x)$ и $g(x)$ удовлетв.:

1. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a$; $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = b$
2. $b\neq 0$ и $g(x)\neq 0$ в некоторой $\mathring{U}(x_0)$

$\Downarrow$

$\exists \lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a}{b}$

Д.: $\frac{f(x)}{g(x)} = f(x)\cdot\frac{1}{g(x)}$

по лемме:

$$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)\cdot\lim\limits_{x\to x_0}\frac{1}{g(x)} = a\cdot\frac{1}{b} = \frac{a}{b}$$

④ Эквивалентные; их свойства. Таблица эквивалентных.

Функцию $\alpha(x)$ называют эквивалентной ф-ции $\beta(x)$ ($\alpha\sim\beta$) при $x\to x_0$, если в $\overset{o}{U}(x_0)$: $\alpha(x)=\beta(x)\cdot q(x)$, где $\lim\limits_{x\to x_0} q(x)=1$; $\underbrace{\alpha\sim\beta \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1}$ (*)

Введено отношение эквивалентности. Оно обладает св-ми:

1. $\alpha\sim\alpha$ (рефлективность)
$\alpha(x)=\alpha(x)\cdot 1$, $\lim\limits_{x\to x_0} 1=1$

2. если $\alpha\sim\beta$, то $\beta\sim\alpha$ (симметричность)
$\alpha\sim\beta \Leftrightarrow \alpha(x)=\beta(x)\cdot q(x)$, где $\lim\limits_{x\to x_0} q(x)=1$
Тогда $\beta(x)=\alpha(x)\cdot\frac{1}{q(x)}=\alpha(x)\cdot q_1(x)$, где $\lim\limits_{x\to x_0} q_1(x)=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{1}{q(x)}=1$

3. если $\alpha\sim\beta$ и $\beta\sim\gamma$, то и $\alpha\sim\gamma$ (транзитивность)
$\alpha\sim\beta \Leftrightarrow \alpha(x)=\beta(x)\cdot q_1(x)$, где $\lim\limits_{x\to x_0} q_1(x)=1$
$\beta\sim\gamma \Leftrightarrow \beta(x)=\gamma(x)\cdot q_2(x)$, где $\lim\limits_{x\to x_0} q_2(x)=1$
поэтому
$\alpha(x)=\gamma(x)\cdot q_1(x)\cdot q_2(x)=\gamma(x)\cdot q(x)$,
где $\lim\limits_{x\to x_0} q(x)=\lim\limits_{x\to x_0}[q_2(x)\cdot q_1(x)]=1$

I Т. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=C$, $C\neq 0$
$\Downarrow$
$f(x)\sim C$, при $x\to x_0$

Д.: $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{C}=\frac{C}{C}=1$, приходим к опред. (*)

II Т.: $f(x)\sim g(x)$ при $x\to x_0$ и $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=a$
тогда $\exists\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=a$

Д.: т.к. $f(x)\sim g(x)$:
$f(x)=g(x)\cdot q(x)$, где $\lim\limits_{x\to x_0} q(x)=1$,
значит $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}[g(x)\cdot q(x)]=$
$=\lim\limits_{x\to x_0} g(x)\cdot\lim\limits_{x\to x_0} q(x)=a\cdot 1=a$
Т.к. отношение экв-ти симметрично, 2 экв. ф-ции либо обе имеют один и тот же предел, либо обе не имеют предела.

III Т. при $x\to x_0$
$f(x)\sim\alpha(x)$ и $g(x)\sim\beta(x)$ $\Downarrow$
(1) $f(x)\cdot g(x)\sim\alpha(x)\cdot\beta(x)$; $\frac{f(x)}{g(x)}\sim\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ и $f^p(x)\sim\alpha^p(x)$

(1): $f(x)\sim\alpha(x)\Leftrightarrow f(x)=\alpha(x)\cdot q_1(x)$, где $\lim\limits_{x\to x_0} q_1(x)=1$
$g(x)\sim\beta(x)\Leftrightarrow g(x)=\beta(x)\cdot q_2(x)$, где $\lim\limits_{x\to x_0} q_2(x)=1$,
сл-но $f(x)\cdot g(x)=\alpha(x)\cdot\beta(x)\cdot q_1(x)\cdot q_2(x)=\alpha(x)\cdot\beta(x)\cdot q(x)$,
где $\lim\limits_{x\to x_0} q(x)=\lim\limits_{x\to x_0} q_1(x)\cdot\lim\limits_{x\to x_0} q_2(x)=1$ ч.т.д.

Остальные док-ся аналогично $\left(\frac{q_1(x)}{q_2(x)}\to 1\right)$

Таблица эквивалентности.

$t\to 0$:

1. $\sin t\sim t$
2. $\operatorname{tg} t\sim t$
3. $\arcsin t\sim t$
4. $\operatorname{arctg} t\sim t$
5. $1-\cos t\sim\frac{t^2}{2}$
6. $\ln(1+t)\sim t$
7. $a^t-1\sim t\ln a$; $e^t-1\sim t$
8. $(1+t)^p-1\sim pt$, $(p\neq 0)$

(2.) $\lim\limits_{t\to 0}\cos t=1$: $\operatorname{tg} t=\frac{\sin t}{\cos t}\sim\frac{t}{1}=t$

(3.) $\lim\limits_{t\to 0}\frac{\arcsin t}{t}=\left\{\begin{array}{l}\arcsin t=y\\ t=\sin y\\ y\to 0\end{array}\right\}=\lim\limits_{y\to 0}\frac{y}{\sin y}=1$

(4.) $\lim\limits_{t\to 0}\frac{\operatorname{arctg} t}{t}=\left\{\begin{array}{l}\operatorname{arctg} t=y\\ \operatorname{tg} y=t\\ y\to 0\end{array}\right\}=\lim\limits_{y\to 0}\frac{y}{\operatorname{tg} y}=\lim\limits_{y\to 0}\frac{y}{y}=1$

(5.) $1-\cos t=2\sin^2\frac{t}{2}\sim 2\left(\frac{t}{2}\right)^2=\frac{1}{2}t^2$

(7.) $\lim\limits_{t\to 0}\frac{a^t-1}{t\ln a}=\left\{\begin{array}{l}a^t-1=y\\ t=\frac{\ln(1+y)}{\ln a}\\ y\to 0\end{array}\right\}=\lim\limits_{y\to 0}\frac{y}{\ln(1+y)}=1$
$\Downarrow$

$$\lim_{t\to 0}\frac{(1+t)^p-1}{pt}=\lim_{t\to 0}\frac{e^{p\ln(1+t)}-1}{pt}=\lim_{t\to 0}\frac{p\ln(1+t)}{pt}=\lim_{t\to 0}\frac{\ln(1+t)}{t}=1$$

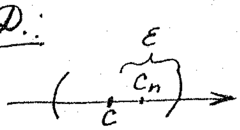
⑤ Переход к пределу в неравенствах. Теорема о сохранении знака. Теорема „о зажатой переменной"

Лемма: для посл-ти $\{c_n\}$ вып:

1. $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = c$ 2. $\exists N: \forall n \geq N \Rightarrow c_n \geq 0$

Тогда $c \geq 0$, т.е. предел сходящейся посл-ти с неотриц. членами сам неотрицателен

Д.:



$\varepsilon > 0\ \exists N_1\ \forall n \geq N_1\ |c_n - c| < \varepsilon$

$N_2 = \max\{N, N_1\}$

$\forall n \geq N_2$

Предположим:

$c < 0$

Пусть $\varepsilon = \frac{|c|}{2}$

$\exists N_1: \forall n \geq N_1 \Rightarrow |c_n - c| < \frac{|c|}{2}$

или $c - \frac{|c|}{2} < c_n < c + \frac{|c|}{2}$

т.к. $c < 0$, то $c + \frac{|c|}{2} = c + \frac{-c}{2} = \frac{c}{2} < 0$. $c_n < 0$

Пусть $N_2 = \max\{N, N_1\}$ тогда $\forall n \geq N_2$ вып-ся условия $c_n < 0$ и (2.), что невозможно $\Rightarrow$ предположение ложно

Т.: (о переходе к пределу в нер-вах):

1. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$
2. $\exists N: \forall n \geq N\ a_n \leq b_n$

$\Rightarrow a \leq b$

Д.: Пусть $c_n = b_n - a_n$, тогда вып-ся условия леммы:

$b - a \geq 0$, или $a \leq b$ ч.т.д.

Т. (о сохранении знака):

Пусть для посл-ти $\{a_n\}$ вып-ны условия:

1. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$
2. $a > 0$ ($a < 0$)

Тогда $\exists N: \forall n \geq N \Rightarrow a_n > 0$ ($a_n < 0$)

Д.: $a > 0$. Возьмём $\varepsilon = \frac{a}{2}$. По опред-ю предела:

$\varepsilon = \frac{a}{2} > 0$ $\exists N: \forall n \geq N \Rightarrow |a_n - a| < \frac{a}{2}$

отсюда

$-\varepsilon < a_n - a < \varepsilon$ $a - \frac{a}{2} < a_n < a + \frac{a}{2}, \forall n \geq N$

$a - \frac{a}{2} < a_n$

сл-но

$a < \frac{a}{2} < a_n$ $a < 0$ — аналогично

ч.т.д.

Лемма: 1. $\exists \lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x) = c$

2. $\exists \mathring{U}(x_0): \forall x \in \mathring{U}(x_0) \Rightarrow \varphi(x) \geq 0$

$\Rightarrow c \geq 0$

Д.: Предположим, что $c < 0$; возьмём $\varepsilon = \frac{|c|}{2}$

по опр. предела $\exists \mathring{U}_1(x_0): \forall x \in \mathring{U}_1(x_0) \Rightarrow |\varphi(x) - c| < \frac{|c|}{2}$

$c - \frac{|c|}{2} < \varphi(x) < c + \frac{|c|}{2}$, т.к. $c < 0$, то

$c + \frac{|c|}{2} = c + \frac{-c}{2} = \frac{c}{2} < 0$

$\varphi(x) < 0$ для $\forall x \in \mathring{U}_1(x_0)$

Пусть $\mathring{U}_2(x_0) = \mathring{U}(x_0) \cap \mathring{U}_1(x_0)$

Тогда для $\forall x \in \mathring{U}(x_0)$ выполняются одновременно нер-во $\varphi(x) < 0$ и (2.), что невозможно $\Rightarrow c \geq 0$

Т. (о переходе к пределу в нер.):

1. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a$ $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = b$
2. $\mathring{U}_0(x_0): \forall x \in \mathring{U}(x_0) \Rightarrow f(x) \leq g(x)$

$\Rightarrow a \leq b$

Д.: $\varphi(x) = g(x) - f(x)$, тогда вып-ся усл. леммы

$\lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) - \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = b - a \geq 0$, или $a \leq b$

ч.т.д.

Т. (о сохранении знака):

1. $\exists \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a$
2. $a > 0$ ($a < 0$)

$\Rightarrow \exists \mathring{U}(x_0): \forall x \in \mathring{U}(x_0) \Rightarrow f(x) > 0$ ($f(x) < 0$)

Д.: $\varepsilon = \frac{a}{2}$; $a > 0$

по определению предела:

$\exists \mathring{U}(x_0): \forall x \in \mathring{U}(x_0) \Rightarrow |f(x) - a| < \frac{a}{2}$

$a - \frac{a}{2} < f(x) < a + \frac{a}{2}$ $\forall x \in \mathring{U}(x_0)$

$a < \frac{a}{2} < f(x)$

Т. (о „зажатой переменной"):

Пусть даны 3 [redacted] пос-ти $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$:

1. $\exists N: \forall n \geq N \quad b_n \leq a_n \leq c_n$
2. $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = a$

$$\Downarrow$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a$$

Д.: $\forall \varepsilon > 0$

$\exists N_1: \forall n \geq N_1 \ |b_n - a| < \varepsilon$, т.е. $\underbrace{a-\varepsilon < b_n}<a+\varepsilon$

$\exists N_2: \forall n \geq N_2 \ |c_n - a| < \varepsilon$, т.е. $a-\varepsilon < \underbrace{c_n < a+\varepsilon}$

$N_3 = \max\{N, N_1, N_2\}$

$\forall n \geq N_3$

$a-\varepsilon < b_n \leq a_n \leq c_n < a+\varepsilon$

$a-\varepsilon < a_n < a+\varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad |a_n - a| < \varepsilon$

мы пришли к определению предела:

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ ч.т.д.

Т. (о „зажатой переменной"):

Пусть даны 3 функции $f(x)$, $g(x)$ и $\varphi(x)$:

1. $\exists \overset{\circ}{U}(x_0): \forall x \in \overset{\circ}{U}(x_0) \quad \varphi(x) \leq f(x) \leq g(x)$
2. $\lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = a$

$$\Downarrow$$

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = a$$

Д.: $\forall \varepsilon > 0$ В силу опр. предела:

$\exists \overset{\circ}{U}_1(x_0): \forall x \in \overset{\circ}{U}_1(x_0) \quad |\varphi(x) - a| < \varepsilon$

$\underbrace{a-\varepsilon < \varphi(x)} < a+\varepsilon$

$\exists \overset{\circ}{U}_2(x_0): \forall x \in \overset{\circ}{U}_2(x_0) \ |g(x) - a| < \varepsilon$

$a-\varepsilon < \underbrace{g(x) < a+\varepsilon}$

$\overset{\circ}{U}_3(x_0) = \overset{\circ}{U}(x_0) \cap \overset{\circ}{U}_1(x_0) \cap \overset{\circ}{U}_2(x_0)$

$\forall x \in \overset{\circ}{U}_3(x_0) \Rightarrow a-\varepsilon < \varphi(x) \leq f(x) \leq g(x) < a+\varepsilon$

откуда $a-\varepsilon < f(x) < a+\varepsilon$

$|f(x) - a| < \varepsilon$

$$\Downarrow$$

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a$

ч.т.д.

⑥ Точные верхние и нижние грани. Теорема Вейерштрасса.

Аксиома отделимости из теории чисел:

Пусть даны два числовых множества A и B, причём для любых элементов $a \in A$ и $b \in B$ выполнено соотношение $a \leq b$, тогда

$$\exists c: \quad a \leq c \leq b \text{ для } \forall a \in A \text{ и } \forall b \in B,$$

т.е. c „отделяет" мн-во A от мн-ва B ($[0;1]$, 1, $[1;2]$ ... и т.д.)

Определение 1: Мн-во A называется ограниченным сверху (снизу), если

$$\exists b: \forall a \in A \Rightarrow a \leq b \; (a \geq b)$$

Число b называется верхней (нижней) границей мн-ва A.

Определение 2: (1) Точной верхней гранью мн-ва A называется наименьшая из верхних границ. $\sup A$

(2) Точной нижней гранью мн-ва A называется наибольшая из нижних границ. $\inf A$

(1): $c = \sup A \quad \forall a \in A \quad a \leq b$

B – мн-во верхних границ

$\exists c: \; a \leq c \leq b \quad c$ – одна из верхних границ

(2): $p = \inf A$
1. $\forall a \in A \; p \leq a$
2. $\forall \varepsilon > 0 \; \exists a \in A \; a < p + \varepsilon$

Т.: Число c явл. точн. верх. гранью $\Leftrightarrow$ когда вып-ся след. 2 условия:
1. $\forall a \in A \quad a \leq c$; 2. $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists a \in A: a > c - \varepsilon$

Д.: Пусть c – верх. точ. грань ($c = \sup A$), тогда (1.) вытекает непосредственно из определения $\sup A$.

Если (2.) не выполнялось бы, то для некоторого $\varepsilon > 0$ и $\forall a \in A \quad a < c - \varepsilon$, это бы значило, что $(c - \varepsilon)$ – верх. граница, причём меньшая, чем c. Это невозможно, т.к. $c = \sup A$ – наименьш. из всех границ $\Rightarrow$ (1.) и (2.) – справедливы.

Пусть c удовлетворяет (1.) и (2.). (1.) $\Rightarrow$ c – одна из верхних границ мн-ва A;
(2.) $\Rightarrow$ любое меньшее число не явл. верх. границей, сл-но c – наименьш. из верх. границ, т.е. $c = \sup A$.

Определение: Посл-ть $\{a_n\}$ наз-ся монотонно возрастающей (убывающей), если:
$\forall n \in N \; a_n \leq a_{n+1}$ ($a_n \geq a_{n+1}$) Если нер-ва строгие $\Rightarrow$ строго уб-ая (возр-я)

Т. (Вейерштрасса): Всякая монотонная ограниченная посл-ть имеет предел.

Д.: $a_n \leq a_{n+1}$, т.е. мон. возр. т.к. $\{a_n\}$ – огр., мн-во её значений $\{a_n\}$ явл. ограниченным ~~сверх. Возр.~~ мн-вом на числовой оси $\Rightarrow$ сущ-ет $c = \sup A$

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N: \quad c - \varepsilon < a_N$ < по предыдущ. Т. сущ-ет такой ном. посл-ти (a_N), что

$$\forall n \geq N: \quad c - \varepsilon < a_N \leq a_n \leq c < c + \varepsilon$$

$$c - \varepsilon < a_n < c + \varepsilon \quad \Rightarrow |a_n - c| < \varepsilon \quad \Rightarrow \lim_{n \to \infty} a_n = c$$

Если посл-ть $\{a_n\}$ – монотонно убывает и огранич., то посл-ть $\{b_n\}$, где $b_n = -a_n$, будет монотонно возр-ей огр-ой посл-тью. Сл-но по Т.: предыдущ. Т.

$$\exists \lim_{n \to \infty} b_n = c$$

Но тогда $\exists \lim\limits_{n \to \infty} a_n = -\lim\limits_{n \to \infty} b_n = -c$

т.е. Т. Вейерштр. справедлива и для мон. уб-щей посл-ти.

Св-ва точ. ниж. грани аналогичны св-вам $\sup A$.

7 Число e. Д-тво [illegible]

„бином Ньютона":

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2 + \ldots + \frac{n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k!}a^{n-k}b^k + \ldots + b^n$$

$$(1+b)^n = 1 + nb + \frac{n(n-1)}{2!}b^2 + \ldots + \frac{n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k!}b^k + \ldots + b^n$$ всего $(n+1)$ слагаемое.

Т.: Существует предел $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

Д.: Рассмотрим посл-ть $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. Подставим $\frac{1}{n}$ вместо b сюда, получим

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + n\frac{1}{n} + \frac{n\cdot(n-1)}{2!}\cdot\frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\frac{1}{n^3} + \ldots + \frac{n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k!}\frac{1}{n^k} + \ldots + \frac{1}{n^n} =$$

$$= 2 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\left(1-\frac{2}{n}\right) + \ldots + \frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{k-1}{n}\right) + \frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{n-1}{n}\right).$$

Если перейти от n к $n+1$ $\Rightarrow$ скобки увеличатся, кроме того добавится ещё одно положит. слагаемое $\frac{(n+1)\cdot n\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1}{(n+1)!}\cdot\frac{1}{(n+1)^{n+1}} = \frac{1}{(n+1)^{n+1}}$, правая часть возрастёт, т.е. $a_n < a_{n+1}$

$\Downarrow$

посл-ть $\{a_n\}$ монотонно возрастает

Заменим на 1 скобки, а числа >2 — на 2, правая часть увеличится:

$a_n < 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^{k-1}} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}}$ По ф-ле беск. уб. геом. прогрессии:

$$a_n < 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^{k-1}} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}} = 2 + \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 3 \Rightarrow \text{при любом } n \quad 2 < a_n < 3$$

Рассматриваемая посл-ть ограничена. огр. сверху

По Т. Вейерштрасса $\exists \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \lim\limits_{n\to e} a_n = e$, $e \approx 2{,}71$ ч.т.д.

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$; $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$, т.к.:

заменим $\frac{1}{x} = t$, тогда $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t = e$

(8) Локальные свойства непрерывных функций. Свойства функций, непрерывных на отрезке. (Теор. огр-е; [illegible])

$f(x)$ – непр. в $(\cdot)\ x_0$, если она <u>определена</u> в нек. окр-ти этой $(\cdot)$ и $\underbrace{\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)}_{(*)}$:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists U(x_0) : \forall x \in \overset{\circ}{U}(x_0) \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

$f(x), g(x)$ непр. в $(\cdot)\ x_0$, $\Rightarrow$ $c \cdot f(x)$, $f(x) \pm g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$ – непр. в $(\cdot) x_0$; $\frac{f(x)}{g(x)}$ при $g(x_0) \neq 0$

1) Если ф-ция непр. в $(\cdot)$, то она локально ограничена в этой $(\cdot)$

<u>Д.</u>: $\varepsilon = 1 > 0\ \exists U(x_0) : \forall x \in U(x_0)\ |f(x) - f(x_0)| < 1$

$$|f(x)| - |f(x_0)| \leq |f(x) - f(x_0)|$$

$$|f(x)| - |f(x_0)| < 1$$

$$|f(x)| < \underbrace{|f(x_0)| + 1}_{C \Rightarrow \text{лок. огр.}}$$

2) 1. $f(x)$ непр. в $(\cdot)\ x_0$

2. $f(x) > 0\ (<0)$

$\Downarrow$

$\exists U(x_0) : \forall x \in U(x_0) \Rightarrow f(x) > 0\ (<0)$

$\varepsilon = \frac{f(x_0)}{2} > 0\ \ \exists U(x_0) : \forall x \in U(x_0)\ |f(x) - f(x_0)| < \frac{f(x_0)}{2}$

следует из $(*)$ и Т. о сохр. знака

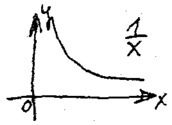
$$f(x_0) - \frac{f(x_0)}{2} < f(x) < f(x_0) + \frac{f(x_0)}{2}$$

$$0 < \frac{f(x_0)}{2} < f(x)$$

Функция непрерывна на отрезке, если она непрерывна в каждой $(\cdot)$ этого отрезка.

1) Если ф-ция непр. на отрезке, то она огр. на этом отрезке

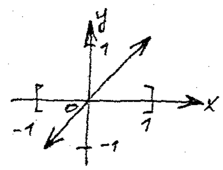
$\exists C > 0 : \forall x \in [a; b] \Rightarrow |f(x)| \leq C$

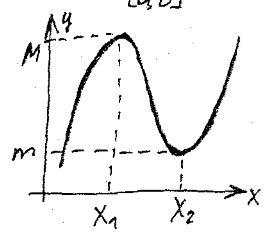


<u>не ограничена!</u>

2) Функция, непрерывная на отрезке, достигает своих точной верхней и точной нижней граней.

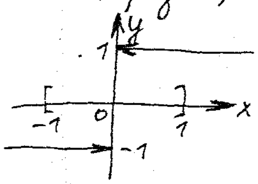
$\exists\ x_1, x_2 \in [a; b] : f(x_1) = m = \inf\limits_{[a;b]}\{f(x)\}$; $f(x_2) = M = \sup\limits_{[a;b]}\{f(x)\}$





3) „О промежуточных значениях"

Мн-во значений ф-ции, непрерывной на отрезке, совпадает с отр-ом $[m; M]$.



m – точ. ниж. грань

M – точ. верх. грань

т.е. если взять произвольное c, заключённое м/у m и M, то на отр $[a; b]$ найдётся $(\cdot)$, в которой ф-ция принимает значение $= c$.

4) „Т. о нуле"

Если ф-ция непр. на отр. и на концах этого отрезка принимает значения разных знаков, то на отрезке найдётся такая точка, в кот-ой ф-ция $= 0$ (можно искать нуль какой-то функции)

$m < 0$

$M > 0$

$0 \in [m; M]$ $\quad \exists\ x_0 \in [a; b]$ такое, что $f(x_0) = 0$

9. Арифметические действия с непрерывными функциями. Непрерывность элементарных функций. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$. (показат. – ти надо, лог. – возраст. и [illegible])

Ф-ция называется непрерывной в (·) x_0, если она определена в некоторой окрестности этой (·) и $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$: $\forall \varepsilon>0\ \exists U(x_0) \Rightarrow |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$

Арифметич. св-ва непр. ф-ций:

<u>Т.:</u> Пусть ф-ции $f(x)$ и $g(x)$ непр. в (·) x_0, тогда:

1. $f(x)\pm g(x)$ непр. в (·) x_0
2. $f(x)\cdot g(x)$ непр. в (·) x_0
3. если $g(x)\neq 0$, то $\frac{f(x)}{g(x)}$ непр. в (·) x_0

Сумма, разность, произведение 2х непр. ф-ций являются непр. ф-циями:

$$\lim_{x\to x_0}(f(x)+g(x))=\lim_{x\to x_0}f(x)+\lim_{x\to x_0}g(x)=f(x_0)+g(x_0)$$

$$\lim_{x\to x_0}[f(x)\cdot g(x)]=\lim_{x\to x_0}f(x)\cdot\lim_{x\to x_0}g(x)=f(x_0)\cdot g(x_0)$$

Частное 2х непр. ф-ций явл. непр. ф-цией при условии, что знаменатель отличен от нуля в данной точке:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to x_0}f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0}g(x)}=\frac{f(x_0)}{g(x_0)}$$

$\lim\limits_{x\to x_0} x = x_0$ ($f(x)$ – непр. в люб. (·) x_0)

Тогда получается, что непрерывны след. ф-ции:

$x^2=x\cdot x$

$x^3=x^2\cdot x$

$x^k=\underbrace{x\cdot x\cdot\ldots\cdot x}_{k\text{ раз}}$, а также $a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n$ (многочлен n-ой степени)

Тогда непрерывна и рациональная ф-ция:

$$\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n}{b_0x^m+b_2x^{m-1}+\ldots+b_m}$$

<u>Т. об обр. ф-ции:</u> Пусть ф-ция $y=f(x)$ опред-на на нек. пром-ке, непр-на на нём и строго монотонна. Тогда у неё существует обр. ф-ция $x=\varphi(y)$, опред-ая на своём пром-ке, непр-ая и строго монотонная в ту же сторону, что и исходная.

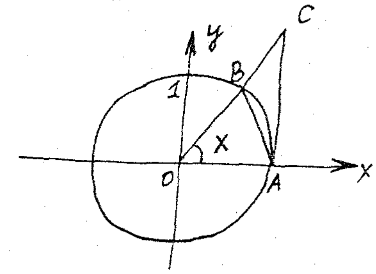
<u>Непр-ть лог. ф-ции.</u>

Показат. ф-ция $y=a^x$, где $a>0$ и $a\neq 1$, непр. и строго монотонна на всей числовой оси. По <u>Т. об обр. ф-ции</u> у неё сущ-ет обр. ф-ция, называемая логарифмической, $x=\log_a y$. Областью определения этой функции служит область значений показат. ф-ции, т.е. луч $(0;+\infty)$. Лог-ая ф-ция <u>непрерывна</u> на этом луче и строго монотонна в ту же сторону, что и показат. ф-ция

Если в качестве основания a взять число e, то и показат., a^x, и логарифмич., $\ln y$, ф-ции будут монотонно возрастающими.

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-1}{1}=\ln a$ $\quad\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x\ln a}=1$

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$



Чтобы вычислить предел, надо знать поведение функции $\frac{\sin x}{x}$ в некот. проколотой окрестности (.) 0.

Возьмём окрестность $\overset{\circ}{U}_{\frac{\pi}{2}}(0)$ радиуса $\frac{\pi}{2}$ и вначале положим $x \in (0; \frac{\pi}{2})$.

Из рисунка видно, что в этом случае $\triangle OAB$ содержится в секторе OAB, который, в свою очередь, содержится в $\triangle OAC$. Выражая площадь каждой из этих фигур через x (x измеряется в радианах) и учитывая, что радиус круга = 1, мы получим следующие соотношения:

$$\frac{1}{2}\sin x < \frac{1}{2}x < \frac{1}{2}tg(x) \quad (2)$$

Здесь мы учли, что длина отрезка $AC = tg\,x$. Поскольку все величины, участвующие в (2), положительны, мы получаем из этого нер-ва:

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1 \quad (3)$$

~~Учитывая чётность cos x и нечётность sin x, находим, что и для $x \in (-\frac{\pi}{2}; 0)$ нер-во~~

Если $x \in (-\frac{\pi}{2}; 0)$, т.е. принадлежит левой половине окрестности $\overset{\circ}{U}_{\frac{\pi}{2}}(0)$, то $(-x) \in (0; \frac{\pi}{2})$, и сл-но из (3) вытекает, что

$$\cos(-x) < \frac{\sin(-x)}{(-x)} < 1$$

Учитывая чётность cos x и нечётность sin x, находим, что и для $x \in (-\frac{\pi}{2}; 0)$ нер-во (3) остаётся справедливым. Таким образом, (3) выполняется в $\overset{\circ}{U}_{\frac{\pi}{2}}(0)$. Заметим, что в силу непрерывности косинуса

$$\lim_{x\to 0} \cos x = \cos 0 = 1$$

Очевидно, также, что $\lim\limits_{x\to 0} 1 = 1$

Тогда по Т о „зажатой переменной" мы получаем $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

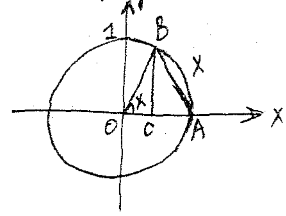
$\forall x \in R \quad |\sin x| \le |x| \quad (1)$

Пусть $x \in (0; \frac{\pi}{2})$

$\angle AOB$ (в рад.) $= x$ и расп. в I четв. => длина $\cup AB = x$ (т.к. радиус = 1),

длина $\cup AB >$ дл. AB (сл. её хорда) > перпенд. $BC = \sin x$

Итак для $x \in (0; \frac{\pi}{2})$ мы имеем $\sin x \le x$.



Поскольку на этом интервале обе части нер-ва положит., можно переписать дан. нер-во в виде:

$|\sin x| \le |x| \quad (*)$

Пусть теперь $x \in (-\frac{\pi}{2}; 0)$, тогда $-x \in (0; \frac{\pi}{2})$ и для него справедливо нер-во (*):

$|\sin(-x)| \le |-x|$

Но $|\sin(-x)| = |-\sin x| = \sin x$, а $|-x| = |x|$. Сл-но, и для этих x справедливо (*).

Если же $x > \frac{\pi}{2}$, то $|\sin x| \le 1 < \frac{\pi}{2} \le |x|$, и мы снова приходим к нер-ву (*).

Но и для $x = 0$: $|\sin x| = |\sin 0| = 0 = |x|$, сл-но (1) полностью доказано.

(10) Переход к пределу под знаком непрерывной функции. Непрерывность сложной функции. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\ln(1+x)}{x}\right)$

Т. (о переходе к пределу под знаком непр. ф-ции):

1. ф-ция $f(u)$ – непр. в (·) u_0
2. $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=u_0$

$\Rightarrow \exists \lim\limits_{x\to x_0} f(\varphi(x)) = f(u_0)$

Д.: $\varepsilon>0$ В силу определения непр. ф-ции в (·) ($\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$):

(1) $\exists\, U(u_0): \forall u\in U(u_0) \Rightarrow |f(u)-f(u_0)|<\varepsilon$

δ – рад. окр. $U(u_0)$: $U(u_0)=\{u: |u-u_0|<\delta\}$ (все такие u, что $|u-u_0|<\delta$)

т.к. $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=u_0$, то $\forall\varepsilon_1>0\ \exists\,\mathring{U}(x_0): \forall x\in\mathring{U}(x_0)\Rightarrow|\varphi(x)-u_0|<\varepsilon$

$\varepsilon_1=\delta$. Для $\forall x$ из $\mathring{U}(x_0)$ справедливо нер-во $|\varphi(x)-u_0|<\delta$, это означает, что число $\varphi(x)$ попадает в $U(u_0)$. В силу (1): $|f(\varphi(x))-f(u_0)|<\varepsilon$

Мы нашли, что $\forall\varepsilon>0\ \exists\,\mathring{U}(x_0): \forall x\in\mathring{U}(x_0)\Rightarrow|f(\varphi(x))-f(u_0)|<\varepsilon$

Это значит, что $\lim\limits_{x\to x_0} f(\varphi(x))=f(u_0)$

Т. (о непрерывности слож. ф-ции):

Пусть
1. $f(u)$ непр. в (·) u_0
2. $\varphi(x)$ непр. в (·) x_0
3. $\varphi(x_0)=u_0$

$\Downarrow$

$f(\varphi(x))$ – непр. в (·) x_0

Д.: из (2.)(3.) $\Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=\varphi(x_0)=u_0$

т.е. мы оказываемся в усл. Т (предыдущ.) $\Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0} f(\varphi(x))=f(u_0)=f(\varphi(x_0))$

Для ф-ции $f(\varphi(x))$ вып-ся определение непр. ф-ции ($\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$)

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}$

Рассмотрим $f(u)=\ln u$
$\varphi(x)=(1+x)^{\frac{1}{x}}$

Полагая $u_0=e$ и $x_0=0$ и применяя Т. о перех. к пр. под зн. непр. ф-ции получаем:

$\lim\limits_{x\to 0}\varphi(x)=\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e=u_0$

$\lim\limits_{x\to 0}f(\varphi(x))=\lim\limits_{x\to 0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{1}{x}\ln(1+x)\right]=\ln e=1$

(11) Дифференцируемость функции одной переменной, связь с непрерывностью и производной. Дифференциал.

$y = f(x)$ – определена в $U(x_0)$

$\Delta x = x - x_0$

$\Delta y = f(x) - f(x_0) = f(x_0+\Delta x) - f(x_0)$

Производной ф-ции $f(x)$ в (.) x_0 называется предел $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0)$ { др. обозн.: $y'(x_0)$; $\frac{dy}{dx}$ – обозн-е Лейбница }

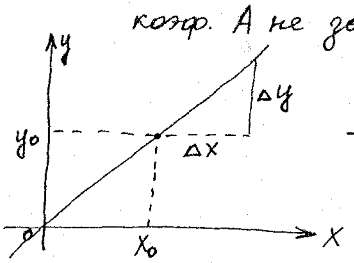
для: $y = x$
$\Delta y = \Delta x$ $\quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = 1$; $y = C$: пр-ая $= 0$ $(C' = 0)$

Опр. Ф-ция $y = f(x)$ называется дифференцируемой в (.) x_0, если в некоторой $U(x_0)$ справедливо соотношение:

$\Delta y = A\Delta x + o(\Delta x)$ $\quad (*)$

или $\Delta y = \underbrace{A\Delta x}_{} + \alpha(\Delta x)\cdot\Delta x$; $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\alpha(\Delta x) = 0$

главная линейная часть приращения Δy или дифференциал (dy), коэф. A не зависит от Δx.



$y = Ax + B$
$-\;y_0 = Ax_0 + B$
$\Delta y = A\Delta x$

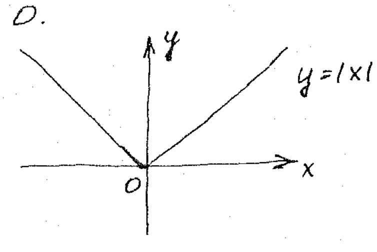
$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) \iff \lim\limits_{x\to x_0}[f(x) - f(x_0)] = 0 \iff \lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y = 0$

Определение непрерывности в (.) x_0, записанное через приращения Δx и Δy: $\boxed{\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y = 0}$

Т.: Если ф-ция дифференцируема в некоторой точке, то она непрерывна в этой точке.

Д.: Диф-сть ф-ции $y = f(x)$ в (.) x_0 означает выполнение $(*)$.
Отсюда очевидно следует $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y = 0$.

Замечание: обратное неверно!
Рассм-им ф-цию $y = |x|$ в (.) 0
Она непр. в нуле, но ни при каком A не удовлетворяет $(*)$.



Т. Связь диф-ти с производной:
Ф-ция диф-ма в (.) тогда и только тогда, когда у неё в этой (.) имеется пр-ая, причём пр-ая совпадает с коэф-ом A в дифференциале.

1. Если $f(x)$ диф-ма в (.) x_0, то у неё сущ-ет пр-ая $f'(x_0)$, равная коэф A в $(*)$.

Д.: $(*)$: $\Delta y = A\Delta x + \alpha(\Delta x)\cdot\Delta x$

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = A + \underbrace{\alpha(\Delta x)}_{\text{б.м.}}$

$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = A$, $f'(x) = A$
(по т. о связи пределов с б.м.)

2. Если у ф-ции $f(x)$ сущ-ет пр-ая в (.) x_0, то эта ф-ция диф-ма в (.) x_0.

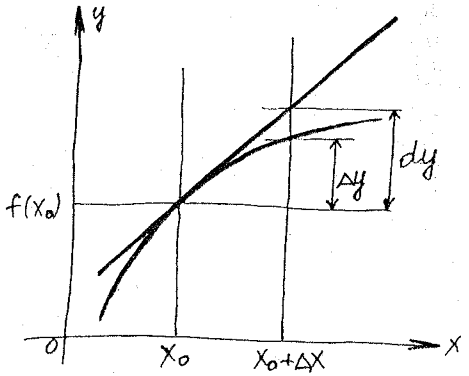
Д.: $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0)$

по т. о связи пределов с б.м.:

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) + \alpha(\Delta x)$, где $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\alpha(\Delta x) = 0$

$\Delta y = f'(x_0)\cdot\Delta x + \alpha(\Delta x)\cdot\Delta x$, получили $(*)$

Геометрический смысл дифференциала.



T.: Для того чтобы график функции $f(x)$ имел в (·) x_0 касательную, необходимо и достаточно, чтобы ф-ция $f(x)$ была дифференцируема в этой (·).

Касательная в каждой (·) единственна.

Её ур-ие: $y_{кас} = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

Все прямые, проходящие ч/з (·) графика ф-ции $y = f(x)$ с коорд. $(x_0; f(x_0))$, задаются ур-ем $y = f(x_0) + A\cdot(x - x_0)$, A - угл. коэф, всевозможные значения.

Мы ищем такую прямую (касательную), чтобы

$$y_{гр} - y_{кас} = o(\Delta x) \text{ при } \Delta x \to 0$$

D.: **1.** Пусть $f(x)$ диф-ма в (·) x_0, тогда справедливо

$$\Delta y = A\Delta x + o(\Delta x)$$

$$y_к - y_0 = A(x - x_0)$$

$$y_{гр} - y_0 = A(x - x_0) + o(\Delta x)$$

$$y_{гр} - y_к = o(\Delta x)$$

$$y_к - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

т.е. прямая, задаваемая $y_{кас} = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ является касательной, для неё выполнено $y_{гр} - y_{кас} = o(\Delta x)$ при $\Delta x \to 0$

2. Пусть сущ-ет касательная

$$y_к - y_0 = A(x - x_0)$$

$$+\ y_{гр} - y_к = o(\Delta x)$$

$$y_{гр} - y_0 = A(x - x_0) + o(\Delta x)$$

$$\Delta y = A\Delta x + o(\Delta x)$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = A + \alpha(\Delta x)$$

Это означает, что ф-ция $y = f(x)$ дифференцируема в (·) x_0 и $A = f'(x_0)$

Дифференциал функции dy равен приращению ординаты касательной к графику $y = f(x)$.

(12) Правила дифференцирования.

Т.: Пусть ф-ции $u(x)$ и $v(x)$ диф-мы в (·) x_0. Тогда функции $C\cdot u(x)$, $u(x)\pm v(x)$, $u(x)\cdot v(x)$ также диф-мы в этой (·)
Ф-ция $\frac{u(x)}{v(x)}$ диф-ма в (·) x_0 при дополнительном условии $v(x_0)\neq 0$. При этом в (·) x_0 выполняются соотношения:

1) $(C\cdot u)' = C\cdot u'$ 2) $(u\pm v)' = u'\pm v'$

3) $(u\cdot v)' = u'\cdot v + u\cdot v'$ 4) $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'\cdot v - u\cdot v'}{v^2}$

Д.: Пусть $y = C\cdot u$. Тогда

$$\Delta y = y(x) - y(x_0) = C\cdot u(x) - C\cdot u(x_0) = C\cdot(u(x)-u(x_0)) = C\cdot\Delta u$$

Вычислим $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{C\cdot\Delta u}{\Delta x} = C\cdot\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x} = C\cdot u'$

Пусть $y = u\pm v$, тогда $\Delta y = \Delta u\pm\Delta v$ и

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u\pm\Delta v}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}\pm\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x} = u'\pm v'$$

Пусть $y = u\cdot v$, тогда

$$u(x) = u(x_0)+\Delta u \quad \text{и} \quad v(x) = v(x_0)+\Delta v$$

и соответственно,

$$\Delta y = (u(x_0)+\Delta u)\cdot(v(x_0)+\Delta v) - u(x_0)\cdot v(x_0) = \Delta u\cdot v(x_0) + u(x_0)\Delta v + \Delta u\cdot\Delta v$$

Отсюда $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}\cdot v(x_0) + u(x_0)\cdot\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x} + \lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}\cdot\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta v$

Из дифференцируемости ф-ции $v(x)$ следует непр-ть этой ф-ции, а значит $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta v = 0$. Учитывая это, из $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$ получаем формулу 3).

Пусть $y = \frac{u}{v}$. Тогда

$$\Delta y = \frac{u(x_0)+\Delta u}{v(x_0)+\Delta v} - \frac{u(x_0)}{v(x_0)} = \frac{\Delta u\cdot v(x_0) - u(x_0)\cdot\Delta v}{v(x_0)\cdot(v(x_0)+\Delta v)}$$

Отсюда получаем

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{\Delta u}{\Delta x}\cdot v(x_0) - u(x_0)\cdot\frac{\Delta v}{\Delta x}}{v(x_0)\cdot(v(x_0)+\Delta v)} = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

Здесь снова воспользовались непрерывностью $v(x)$.

Т. (о дифференцировании сложной функции)

Пусть: 1. $f(u)$ дифференцируема в $(\cdot)\ u_0$
2. $\varphi(x)$ дифференцируема в $(\cdot)\ x_0$
3. $\varphi(x_0) = u_0$

$\Downarrow$

$y(x) = f(\varphi(x))$ – дифференцируема в $(\cdot)\ x_0$, причём

$y'(x_0) = f'(u_0)\cdot\varphi'(x_0)$

$y'_x = y'_u \cdot u'_x$

D.: В силу дифференцируемости $y = f(u)$

$\Delta y = f'(u_0)\cdot\Delta u + \alpha(\Delta u)\cdot\Delta u$, где $\lim\limits_{\Delta u\to 0}\alpha(\Delta u) = 0$

$u = \varphi(x)$. Тогда

$\Delta u = \varphi(x) - \varphi(x_0) = \varphi(x_0+\Delta x) - \varphi(x_0)$

делим на Δx

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(u_0)\cdot\overset{\varphi'(x_0)}{\frac{\Delta u}{\Delta x}} + \alpha(\Delta u)\cdot\overset{u'(x_0)}{\frac{\Delta u}{\Delta x}}$$

устремляем $\Delta x \to 0$:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(u_0)\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim_{\Delta x\to 0}\alpha(\Delta u)\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}$$

В силу непрерывности $\varphi(x)$ в $(\cdot)\ x_0$, кот-я вытекает из диф-ти, $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta u = 0$, но тогда и $\lim\limits_{\Delta u\to 0}\alpha(\Delta u) = 0$. Мы придерживаемся, что $\alpha(0) = 0$, что не противоречит диф-ти.

(13) Теорема Ферма.

<u>Определение.</u> Точка x_0 является точкой локального максимума (минимума) функции $f(x)$, если

$$\exists\, \mathring{U}(x_0):\ \forall x \in \mathring{U}(x_0) \Rightarrow f(x) < f(x_0) \quad (f(x) > f(x_0)).$$

Общее название лок. макс-ма и мин-ма — лок. экстремум.

<u>Т. (Ферма):</u>

Пусть

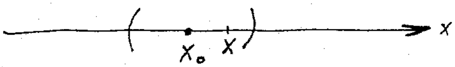
1. $f(x)$ имеет в $(\cdot)$ x_0 локальный экстремум (быть может нестрогий)
2. $f(x)$ диф-ма в $(\cdot)$ x_0

$$\Downarrow$$

$$f'(x_0) = 0$$

<u>Д.:</u> Для max.

$$\exists\, \mathring{U}(x_0):\ \forall x \in \mathring{U}(x_0) \quad f(x) \le f(x_0)$$



1) $\Delta x = x - x_0 > 0$:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\overbrace{f(x) - f(x_0)}^{\le 0}}{x - x_0} \le 0$$

$$\lim_{\Delta x \to 0_+} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) \le 0$$

2) $\Delta x < 0 \quad x - x_0 < 0$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \ge 0$$

$$\lim_{\Delta x \to 0_-} = f'(x_0) \ge 0$$

$$f'(x_0) = 0$$

(14) Теорема Ролля.

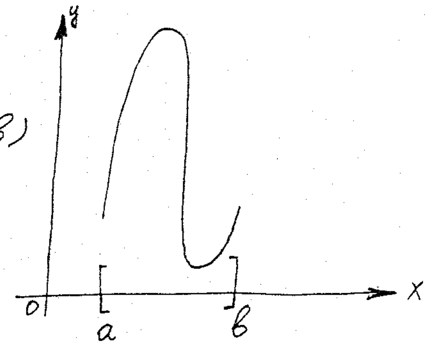
Т. (Ролля):

Пусть:

1. $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$
2. $f(x)$ дифференцируема в интервале $(a;b)$
3. $f(a)=f(b)$

$\Downarrow$

$\exists\, c \in (a;b)$ такая, что $f'(c)=0$



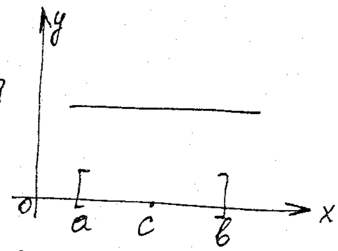
Д.: $\exists\, x_1 \in [a;b] : f(x_1) = M = \sup\limits_{[a;b]} \{f(x)\}$

$\exists\, x_2 \in [a;b] : f(x_2) = m = \inf\limits_{[a;b]} \{f(x)\}$

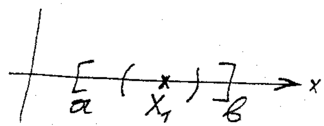
(или то же самое: $\exists\, x_1, x_2 \in [a;b] : \forall x \in [a;b] \Rightarrow f(x_1) \le f(x) \le f(x_2)$)

по св-вам ф-ций, непр-ых на отрезке

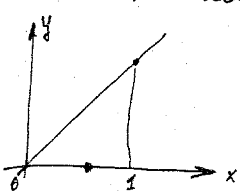
1) x_1, x_2 - находятся на концах отрезка. Тогда ф-ция $f(x)$ постоянна на $[a;b]$ и в качестве (·) c можно выбрать любую (·) интервала $(a;b)$.



2) хотя бы одна точка (например x_1) — в интервале (внутри). Выберем маленькую окрестность $U(x_1)$. Значит в (·) x_1 у функции $f(x)$ имеется локальный минимум, а тогда по Т. Ферма выполнено $f'(x_1)=0$.

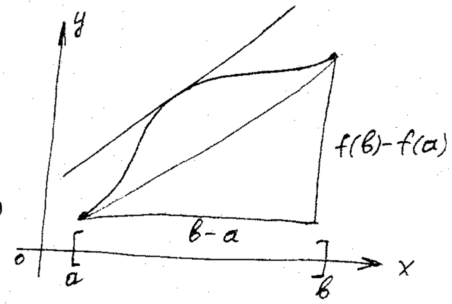


Итак, в качестве (·) c можно взять (·) x_1



если max(min) попадает в интервал, то max(min) — локальный.

(15) Теорема Лагранжа. Следствие.



Т. (Лагранжа):

Пусть

1. $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$
2. $f(x)$ дифференцируема в интервале $(a;b)$

$\Downarrow$

$\exists c \in [a;b]$ такая, что $\boxed{f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}}$ – ф-ла Лагранжа.

Д: Введём вспомогательную функцию:

(*) $\varphi(x) = f(x) - f(a) - \lambda\cdot(x-a)$, λ – пока неизвестная константа.

$\varphi(a) = 0$

$\varphi(b) = f(b) - f(a) - \lambda_0\cdot(b-a) = 0$ – подбираем λ_0 так, чтобы $\varphi(b)$ тоже равнялось нулю

отсюда:

$$\lambda_0 = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

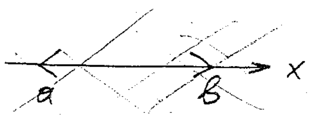
Если подставить это значение λ_0 в ф-лу (*), то $\varphi(x)$ будет удовлетворять всем условиям теоремы Ролля. Тогда в силу этой теоремы

$$\exists c \in (a;b):\ \varphi'(c) = 0$$

$\varphi'(x) = f'(x) - \lambda$, сл-но

$$f'(c) - \lambda_0 = 0$$

$f'(c) = \lambda_0$, что равносильно ф-ле $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$



Следствие. Пусть $f(x)$ диф-ма на промежутке $\langle a;b\rangle$ и во всех точках этого промежутка $f'(x)=0$. Тогда $f(x)$ постоянна на промежутке $\langle a;b\rangle$.

Д: Возьмём две произвольные точки x_1 и x_2 из $\langle a;b\rangle$ такие, что $x_1 < x_2$. На отрезке $[x_1;x_2]$ выполнены все условия Т. Лагранжа. Непр-ть на $[x_1;x_2]$ следует из диф-ти. Поэтому

$$\exists c \in (x_1;x_2):\ \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = f'(c)$$

Но по условию во всех точках $\langle a;b\rangle$, в т.ч. и в (.) c выполнено $f'(x)=0$. Находим, что

$$f(x_1) = f(x)_2$$

В силу произвольного выбора точек x_1 и x_2 это и означает постоянство $f(x)$ на $\langle a;b\rangle$.

(16) Достаточный признак экстремума функции одной переменной.

Т. (достаточный признак локального экстремума):

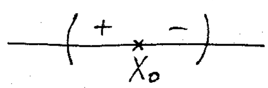
1. $f(x)$ непрерывна в $(\cdot)\ x_0$
2. $f(x)$ дифференцируема в $\overset{\circ}{U}(x_0)$
3. $f'(x)$ меняет знак при переходе через $(\cdot)\ x_0$,

   т.е. для $\forall x \in \overset{\circ}{U}(x_0)$ $f'(x)$ при $x < x_0$ и при $x > x_0$ имеет противоположные знаки.

$\Downarrow$

в $(\cdot)\ x_0\ \exists$ лок. экстремум, причём, если знак меняется с "+" на "−", то максимум, а если с "−" на "+", то минимум.

Д.: Пусть знак меняется с "+" на "−".



Возьмём произвольную $(\cdot)\ x_1 \in \overset{\circ}{U}(x_0)$, $x_1 < x_0$ и применим к отрезку $[x_1; x_0]$ т. Лагранжа. Непр-ть $f(x)$ на $[x_1; x_0)$ следует из дифференцируемости, а непр-ть в $(\cdot)\ x_0$ оговорена в условии.

Получим $\exists c_1 \in (x_1; x_0)$: $\dfrac{f(x_0) - f(x_1)}{x_0 - x_1 > 0} = f'(c_1) > 0$ c_1 – в лев. половине по усл. $f' > 0$

Сл-но $f(x_1) < f(x_0)$

Теперь рассмотрим произвольную $(\cdot)\ x_2 \in \overset{\circ}{U}(x_0)$, $x_0 < x_2$.
Применяя т. Лагранжа к отрезку $(x_0; x_2]$, получим, что

$$\exists c_2 \in (x_0; x_2): \quad \frac{f(x_2) - f(x_0)}{x_2 - x_0 > 0} = f'(c_2) < 0$$

Сл-но $f(x_0) > f(x_2)$.

Доказано, что $\forall x \in \overset{\circ}{U}(x_0)$ выполнено $f(x) < f(x_0)$.

Это и означает, что у $f(x)$ в $(\cdot)\ x_0$ имеется лок. максимум.

(Его определение: $(\cdot)\ x_0$ явл. $(\cdot)$ лок. max(min), если

$$\exists\ \overset{\circ}{U}(x_0):\ \forall x \in \overset{\circ}{U}(x_0) \Rightarrow f(x) < f(x_0)\ \ (f(x) > f(x_0))\ )$$

17. Достаточный признак возрастания (убывания) функции.

<u>Определение</u>: Функция $f(x)$ называется МОНОТОННО ВОЗРАСТАЮЩЕЙ (УБЫВАЮЩЕЙ) на промежутке $\langle a; b \rangle$, если

$$\forall x_1, x_2 \in \langle a; b \rangle : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2) \quad (f(x_1) > f(x_2)).$$

<u>Т. (достаточный признак монотонности):</u>

Пусть ф-ция $f(x)$ дифференцируема на промежутке $\langle a; b \rangle$ и во всех точках этого промежутка выполнено неравенство $f'(x) > 0$ $(f'(x) < 0)$. Тогда ф-ция $f(x)$ монотонно возрастает (убывает) на $\langle a; b \rangle$.

<u>Д.</u>: Возьмём произвольную пару точек $x_1, x_2 \in \langle a; b \rangle$, $x_1 < x_2$. Применим к отрезку $[x_1; x_2]$ теорему Лагранжа. Выполнение условий этой теоремы обеспечено дифференцируемостью $f(x)$ на $\langle a; b \rangle$. Тогда

$$\exists c \in (x_1; x_2): \quad \frac{f(x_2) - f(x_1)}{\underbrace{x_2 - x_1}_{\text{по усл.}}} = \underbrace{f'(c) > 0}_{\text{по условию}} \quad (<0)$$

Отсюда следует, что $f(x_1) < f(x_2)$ $(f(x_1) > f(x_2))$.

Теорема доказана.

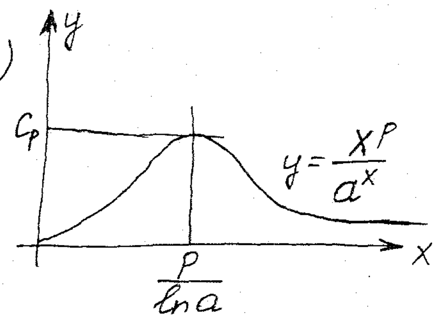
(18) Сравнение скоростей роста степенной, показательной и логарифмической функций.

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^p}{a^x} = 0$, где $a>1$, p — любое.

При $p \leq 0$ дробь $\frac{x^p}{a^x} \to 0$ при $x \to +\infty$, т.к. $\underset{\text{лок.огр.}}{x^p} \cdot \underset{\text{б.м.}}{\frac{1}{a^x}}$

При $p>0$: числ-ль и зн-ель — б.м., вопрос о пределе не решается.
Исследуем поведение этой дроби на положительной полуоси.
Для этого вычислим её производную:

$$\left(\frac{x^p}{a^x}\right)' = \frac{p\cdot x^{p-1}\cdot a^x - a^x\cdot x^p \ln a}{a^{2x}} = \frac{x^{p-1}}{a^x}(p - x\ln a)$$



Отсюда вытекает, что на отрезке $[0; \frac{p}{\ln a}]$ дробь возрастает, а на луче $[\frac{p}{\ln a}; +\infty)$ убывает.
Следовательно, существует число C_p такое, что на всей полуоси $[0;+\infty)$ выполняется неравенство

$$0 \leqslant \frac{x^p}{a^x} \leqslant C_p \quad \text{при любом } p.$$

В частности, выполнено $0 \leqslant \frac{x^{p+1}}{a^x} \leqslant C_{p+1}$
Поделим все части этого нер-ва на x, считая $x>0$:

$$0 \leqslant \frac{x^p}{a^x} \leqslant \frac{C_{p+1}}{x} \to 0$$

Правая часть нер-ва стремится к нулю, при $x \to +\infty$.
Сл-но по т. „о зажатой переменной" **1. доказано.**

2. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{(\ln x)^p}{x^\varepsilon} = 0$, где $\varepsilon > 0$, p — любое (ε может быть даже очень малым)

Обозначим $\ln x$ через t. Тогда $x = e^t$ и

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln x)^p}{x^\varepsilon} = \lim_{t\to+\infty} \frac{t^p}{e^{\varepsilon\cdot t}} = \lim_{t\to+\infty} \frac{t^p}{e^{\varepsilon t}}$$

Т.к. $e^\varepsilon > 1$, можно положить $a = e^\varepsilon$ и применить к $\lim\ldots$ только что доказанное равенство $\Rightarrow$ **2. доказано.**

3. $\lim\limits_{x\to 0_+} x^\varepsilon \cdot |\ln x|^p = 0$, где $\varepsilon>0$, p — любое.

$x = \frac{1}{t} \quad t \to +\infty$

$$\lim_{x\to 0_+} x^\varepsilon \cdot |\ln x|^p = \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{t^\varepsilon} \cdot \left|\ln \frac{1}{t}\right|^p = \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{t^\varepsilon} \cdot |-\ln t|^p = \lim_{t\to+\infty} \frac{(\ln t)^p}{t^\varepsilon} = 0$$

На последнем этапе воспользовались предыдущим пределом (2.).

Все три формулы установлены.