Вопрос 10. Тригонометрические ряды Фурье. Теорема о сходимости(без док-ва)

10.1. Тригонометрическая система функций

Определение 10.1. Две интегрируемые функции $f(x)$ и $g(x)$ называются ***ортогональными*** на отрезке $[a,b]$, если $\int\limits_a^b f(x)g(x)dx = 0.$ Конечная или бесконечная система функций называется ***ортогональной*** на отрезке $[a,b]$, если любые две функции этой системы ортогональны на этом отрезке.

Важный пример ортогональной системы функций даёт тригонометрическая система функций.

Теорема 10.1. ***Тригонометрическая система функций*** $1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x ..., \cos nx, \sin nx, ...$ ***ортогональна на отрезке*** $[-\pi,\pi]$**.**

◄ Прежде всего установим ортогональность каждой функции системы с первой из них. Имеем

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} 1\cdot\cos kx dx = \left[\frac{1}{k}\sin kx\right]_{-\pi}^{\pi} = 0$$

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} 1\cdot\sin kx dx = \left[-\frac{1}{k}\cos kx\right]_{-\pi}^{\pi} = -\frac{1}{k}(-1)^k + \frac{1}{k}(-1)^k = 0$$

Опираясь теперь на известные из средней школы тригонометрические формулы, получим

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos kx \cos lx dx = \frac{1}{2}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left[\cos(k+l)x + \cos(k-l)x\right]dx = 0, k \neq l,$$

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin kx \sin lx dx = \frac{1}{2}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left[\cos(k-l)x - \cos(k+l)x\right]dx = 0, k \neq l,$$

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin kx \cos lx dx = \frac{1}{2}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left[\sin(k+l)x + \sin(k-l)x\right]dx = 0,$$

Последнее равенство справедливо и при $k = l$. ►

10.2. Тригонометрический ряд Фурье

Определение 10.2. ***Тригонометрическим многочленом*** называется функция вида

$$T(x) = A_0/2 + (A_1\cos x + B_1\sin x) + (A_2\cos 2x + B_2\sin 2x) + \ldots + (A_n\cos nx + B_n\sin nx),$$

где $A_0, A_k, B_k, k = 1,\ldots,n -$ действительные числа. Если $A_n^2 + B_n^2 \neq 0$, то число n называется ***порядком(степенью)*** тригонометрического многочлена $T(x)$.

Функциональный ряд

$$A_0/2 + \sum_{n=1}^{\infty}(A_n\cos nx + B_n\sin nx) \qquad (1)$$

называется ***тригонометрическим рядом. Коэффициенты*** ряда $A_0,\ldots,A_n,B_1,\ldots,B_n, n\in\mathbb{N}$ $-$ произвольные действительные числа. ***Частичные суммы*** $s_n(x)$ тригонометрического ряда (1)

$$s_0(x) = A_0/2,\ s_n(x) = A_0/2 + \sum_{k=1}^{n}(A_k\cos kx + B_k\sin kx), n = 1,2,\ldots$$

представляют собой тригонометрические многочлены порядка $\leq n$.

Определение 10.3. Пусть функция $f(x)$ определена и интегрируема на отрезке $[-\pi,\pi]$. Числа

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx \quad , \qquad (2)$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos ndx, n = 1,2,\ldots \quad , \qquad (3)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nxdx, n = 1,2,\ldots \qquad (4)$$

называются ***коэффициентами Фурье*** функции $f(x)$.

Тригонометрический ряд

$$a_0/2 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx) \qquad (5)$$

(независимо от того, сходится он, или расходится) коэффициенты которого – коэффициенты Фурье интегрируемой функции $f(x)$, называется ***рядом Фурье*** этой функции.

Связь между функцией $f(x)$ и её рядом Фурье принято обозначать так:

$$f(x), x\in[-\pi,\pi] \,\square\, {}^{a_0}\!/_2 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos nx + b_n \sin nx\right), x \in \square\ .$$

Частичными суммами $s_n(f(x))$ ряда Фурье (5) функции $f(x)$ будут тригонометрические многочлены

$$s_0(f(x)) = {}^{a_0}\!/_2\ , s_n(f(x)) = {}^{a_0}\!/_2 + \sum_{k=1}^{n}\left(a_k \cos kx + b_k \sin kx\right), n = 1, 2, ... \qquad (6)$$

порядка $\leq n$.

Теорема 10.2. ***Равномерно сходящийся на $[-\pi,\pi]$ тригонометрический ряд (11) есть ряд Фурье своей суммы.***

◀Пусть тригонометрический ряд (5) равномерно сходится на $[-\pi,\pi]$ и $f(x)$ - его сумма, так что

$$f(x) = {}^{A_0}\!/_2 + \sum_{k=1}^{\infty}\left(A_k \cos kx + B_k \sin kx\right) \qquad (7)$$

и функция $f(x)$ непрерывна на $[-\pi,\pi]$. Более того, $f(x)$ - непрерывная и 2π - периодическая функция на всём множестве $\square$.

Интегрируя почленно ряд (7) и учитывая ортогональность тригонометрических функций, получим

$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{A_0}{2}dx = A_0$ и, согласно (2), $A_0 = a_0$. Умножив равенство (7) на $\cos kx$ и проинтегрировав, найдём

$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kdx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} A_k \cos^2 kdx = A_k$, и, согласно (3), $A_k = a_k, k \in \square$. Аналогично, умножив равенство (7) на $\sin kx$, покажем, что $B_k = b_k, k \in \square$ (на основании (4)). ►

Тригонометрический многочлен можно считать конечным тригонометрическим рядом, имеющим нулевые коэффициенты для всех индексов, больших его порядка n, и поэтому равномерно сходящимся на всём множестве $\square$. Согласно теореме10.2**,** многочлен $T(x)$ совпадает со своим рядом Фурье, коэффициенты которого равны нулю для всех индексов, больших индекса n. В частности, этим свойством обладают частичные суммы ряда Фурье.

Следствие. Для любого $n=0,1,2,\ldots$ ***частичные суммы*** $s_n(f(x))$ ***(6) ряда Фурье (7) интегрируемой функции*** $f(x)$ ***имеют одинаковые с*** $f(x)$ ***коэффициенты Фурье для всех индексов*** $k, 0\le k\le n$.

Замечание. Разумеется, если функция $f(x)$ разрывна, то её ряд Фурье не будет равномерно сходиться к ней (сумма равномерно сходящегося ряда непрерывных функций непрерывна).

10.3. Коэффициенты Фурье чётных и нечётных функций

Напомним, что если функции $f(x), g(x)$ интегрируемы на отрезке $[-a,a]$ и $f(x)$ – чётная, а $g(x)$ – нечётная, то

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx, \int_{-a}^{a} g(x)dx = 0,$$

в чём легко убедиться, представив интеграл $\int_{-a}^{a}$ в виде суммы интегралов $\int_{-a}^{0} + \int_{0}^{a}$ и заменив в первом из них x на $-x$.

Поэтому, если функция $f(x)$ интегрируема на этом отрезке и $f(x)$ – чётная, то её коэффициенты Фурье равны

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx dx, n=0,1,2,\ldots, b_n = 0, n=1,2,\ldots ,$$

так что

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx,$$

а если $f(x)$ – нечётная, то

$$a_n = 0, n=0,1,2,\ldots, \quad b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx dx, n=1,2,\ldots$$

и

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx \quad .$$

Пример. Рассмотрим $2\pi -$периодическую функцию f,
$f(x)=|x|, x\in[-\pi,\pi], f(-\pi)=f(\pi).$ Тогда $b_n=0, n=1,2,...$ и

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} xdx=\pi, a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nxdx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos nxdx=$$

$$=\frac{2}{\pi}\left[\frac{x\sin nx}{n}+\frac{\cos nx}{n^2}\right]_0^{\pi}=\frac{2}{\pi n^2}\left[(-1)^n-1\right], n\in\mathbb{N},$$

так что $a_0=\pi, a_{2k}=0, a_{2k-1}=-\dfrac{4}{\pi(2k-1)^2}, k=1,2,...$. Кроме того, по теореме 10.2,

$$|x|=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2},\quad x\in[-\pi,\pi], \tag{8}$$

поскольку тригонометрический ряд Фурье в правой части формулы (8) равномерно сходится на $\mathbb{R}$ по признаку Вейерштрасса(сходится мажорирующий ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2k-1)^2}$). В точке $x=0$ имеем

$$0=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2},\quad \text{откуда}\ \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}.$$

Поэтому

$$A=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k)^2}=\frac{\pi^2}{8}+\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}=\frac{\pi^2}{8}+\frac{1}{4}A,$$

откуда $A=\dfrac{\pi^2}{6}$, так что

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+...+\frac{1}{n^2}+...=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}.$$

10.4. Сходимость ряда Фурье в точке

Мы установили, что равномерно сходящийся тригонометрический ряд есть ряд Фурье своей суммы (теорема 10.2). Сформулируем без доказательства теорему, дающую достаточные условия сходимости ряда Фурье.

Теорема 10.3. ***В точке x_0, где функция $f(x)$ дифференцируема или, по крайней мере, имеет обе конечные односторонние производные, ряд Фурье сходится, причём***

сумма его равна $f(x_0)$. в точке x_0 разрыва первого рода функции f для сходимости её ряда Фурье достаточно предположить существование конечных пределов

$$D^+ f(x_0)=\lim_{t\to+0}\frac{f(x_0+t)-f(x_0+0)}{t}, D^- f(x_0)=\lim_{t\to+0}\frac{f(x_0-t)-f(x_0-0)}{-t},$$

причём на этот раз суммой ряда будет $\dfrac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}$.

10.5.Тригонометрические ряды $2l-$ периодических функций

До сих пор мы говорили о разложении функций, имеющих период 2π, в ряд по тригонометрическим функциям. Рассмотрим функции, период которых $2l$ отличен от 2π. В этом случае функция $f\left(\frac{l}{\pi}x\right)$ имеет уже период 2π. Её можно разложить в ряд Фурье

$$f\left(\frac{l}{\pi}x\right)\sim a_0/2+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos nx+b_n\sin nx\right),$$

где

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f\left(\frac{l}{\pi}x\right)\cos ndx, n=0,1,2,..., \; b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f\left(\frac{l}{\pi}x\right)\sin ndx, n=1,2,....$$

Положив $y=\frac{l}{\pi}x,$ получим $x=\frac{\pi}{l}y, dx=\frac{\pi}{l}dy,$ и

$$f(y)\sim a_0/2+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{\pi n}{l}y+b_n\sin\frac{\pi n}{l}y\right),$$

где

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(y)\cos\frac{n\pi}{l}ydy, n=0,1,2,..., \; b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(y)\sin\frac{n\pi}{l}ydy, n=1,2,.... \quad (9)$$

Понятно, что все результаты п.10.4, относящиеся к сходимости рядов Фурье, переносятся и на ряды (9).

10.6. Разложения только по косинусам или только по синусам

Предположим, что функция $f(x)$ задана лишь на отрезке $[0,\pi]$. Часто ставится задача представить её рядом Фурье, причём требуется, чтобы это разложение содержало либо только косинусы, либо только синусы. Для этого следует доопределить её в промежутке $[-\pi,0)$ соответствующим образом.

Для $0 < x \le \pi$ положим

$$f(-x) = f(x),$$

так что в результате получится чётная функция на отрезке $[-\pi, \pi]$.

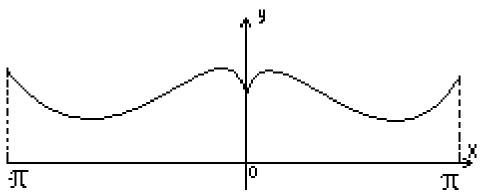
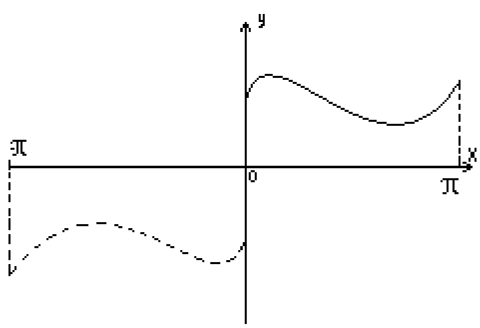


рис.

Её разложение будет содержать только косинусы. Если дополнить определение функции $f(x)$ для $0 < x \le \pi$ равенством

$$f(-x) = -f(x),$$

то получится нечётная на отрезке $[-\pi, \pi]$ функция



и в её разложении будут только члены с синусами.