Лекции по методам математической физики для физхимиков 211 группы 2004/2005 учебный год

Лектор А. В. Субботин

Лекция I

Вывод основных уравнений математической физики

Определение I.1. *Уравнением в частных производных (коротко УРЧП) называется уравнение, в котором встречаются частные производные (любых порядков) неизвестных функций u_1, u_2, …, u_N от n переменных x_1, x_2, …, x_n. Порядком уравнения называется максимальный из порядков производных, встречающихся в уравнении. Системой УРЧП называется система, состоящая из УРЧП, и порядком такой системы считается максимальный из порядков уравнений, входящих в систему.*

Уравнение называется линейным, если оно линейно относительно *всех* неизвестных функций и их производных. Уравнение называется квазилинейным, если оно линейно только относительно *старших* производных.

Примеры. $u\dfrac{\partial u}{\partial x} + u^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ — квазилинейное (но не линейное)

$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a(x,y)\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2u$ — линейное

$\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = u$ — не линейное и не квазилинейное

Основное внимание будет уделяться линейным уравнениям с постоянными коэффициентами второго порядка от одной неизвестной функции.

Примеры (и основные прототипы).

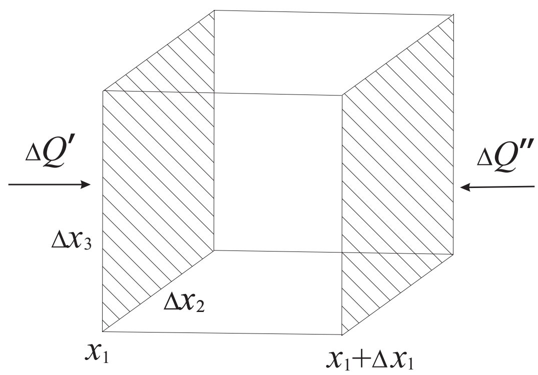
1) $\dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_3^2}$ — «уравнение теплопроводности»

2) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_3^2}$ — «волновое уравнение»

3) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} = 0$ — «уравнение Лапласа»

Пример 1. Пусть у нас есть тело, занимающее объём G в $\mathbb{R}^3$ и в каждый момент времени t функция $u(t, x_1, x_2, x_3)$ — распределение температуры внутри G. Закон Ньютона распространения тепла заключается в следующем: количество тепла, проходящего через малую площадку ΔS за промежуток времени от t до $t + \Delta t$ в направлении нормали к площадке $\vec{n}$ равно $\Delta Q \approx -k(x_1, x_2, x_3)\dfrac{\partial u}{\partial n}(t, x_1, x_2, x_3)\Delta S \Delta t$ с точностью до малых порядка высшего $\Delta S \Delta t$; здесь $k(x_1, x_2, x_3)$ — коэффициент теплопроводности, тело считаем изотропным по всем направлениям (то-есть k не зависит от направления $\vec{n}$).

Выведем из этого закона уравнение распространения тепла, предполагая, что коэффициент k непрерывно дифференцируем в области G и распределение температуры u дважды непрерывно дифференцируемо в G по пространственным переменным и один раз непрерывно дифференцируемо по времени. Для этого рассмотрим элементарный кубик $\Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3$ с вершиной в точке (x_1, x_2, x_3), полностью (вместе с границей) расположенный в области G.



Найдем количество тепла, входящего в объем куба через боковые грани, перпендикулярные оси Ox_1 за промежуток времени $[t, t + \Delta t]$. По теореме о среднем значении для тройного интеграла существуют такие точки $x_2 \leqslant \xi_2 \leqslant x_2 + \Delta x_2$ и $x_3 \leqslant \xi_3 \leqslant x_3 + \Delta x_3$, и такой момент времени $t \leqslant \tau \leqslant t + \Delta t$, что выполнено равенство $\Delta Q' + \Delta Q'' = \Big[k(x_1 + \Delta x_1, \xi_2, \xi_3)\dfrac{\partial u}{\partial x_1}(\tau, x_1 + \Delta x_1, \xi_2, \xi_3) - k(x_1, \xi_2, \xi_3)\dfrac{\partial u}{\partial x_1}(\tau, x_1, \xi_2, \xi_3)\Big]\Delta x_2 \Delta x_3 \Delta t$. По теореме Лагранжа о конечных приращениях существует точка $x_1 \leqslant \xi_1 \leqslant x_1 + \Delta x_1$, для которой $\Delta Q' + \Delta Q'' = \dfrac{\partial}{\partial x_1}\Big(k(x_1, \xi_2, \xi_3)\dfrac{\partial u}{\partial x_1}(\tau, x_1, \xi_2, \xi_3)\Big)\Big|_{x_1 = \xi_1} \Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3 \Delta t$.

Учитывая вклад остальных площадок, имеем для общего количества тепла, входящего в куб, формулу

$$\Delta Q \approx \Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3 \Delta t \sum_{l=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_l}\Big(k(x_1,x_2,x_3)\frac{\partial u}{\partial x_l}(t,x_1,x_2,x_3)\Big),$$

в котором равенство написано с точностью до малых порядка высшего $\Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3 \Delta t$. С другой стороны

$$\Delta Q \approx c(x_1,x_2,x_3)\rho(x_1,x_2,x_3)[u(t+\Delta t,x_1,x_2,x_3)-u(t,x_1,x_2,x_3)]\times$$
$$\times\,\Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3 \approx c\rho\frac{\partial u}{\partial t}(t,x_1,x_2,x_3)\Delta t \Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3,$$

где $c(x_1,x_2,x_3)$ — удельная теплоемкость, а $\rho(x_1,x_2,x_3)$ — плотность тела в точке (x_1,x_2,x_3). Сравнивая эти два уравнения и деля их на $\Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3 \Delta t$, получим при Δx_1, Δx_2, Δx_3, $\Delta t \to 0$

$$c(x_1,x_2,x_3)\rho(x_1,x_2,x_3)\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{l=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_l}\Big(k(x_1,x_2,x_3)\frac{\partial u}{\partial x_l}\Big).$$

Если тело однородно, то-есть $c(x_1,x_2,x_3) \equiv \mathrm{const}$, $k(x_1,x_2,x_3) \equiv \mathrm{const}$, $\rho(x_1,x_2,x_3) \equiv \mathrm{const}$, то

$$\frac{c\rho}{k}\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{l=1}^{3}\frac{\partial^2 u}{\partial x_l^2}$$

и, обозначая $t' = \dfrac{kt}{c\rho}$, имеем, обозначая t' опять через t,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{l=1}^{3}\frac{\partial^2 u}{\partial x_l^2}.$$

Но решений этого уравнения бесконечно много. Чтобы выделить какое-нибудь одно из них, нужно задавать дополнительные условия. Такими условиями являются *начальные* и *краевые условия*. Если задать начальное распределение температуры при $t = t_0$ и тепловой режим на границе, то решение определится при $t > t_0$ уже однозначно. Приведём примеры краевых условий, задаваемых на границе S.

I. Пусть задано распределение температуры $u_1(t,x_1,x_2,x_3) = u_1(t,\vec{x})$ снаружи тела. Тогда количество тепла, проходящего через кусок границы ΔS за промежуток Δt равно $\Delta Q \approx k_1(x_1,x_2,x_3)[u_1(t,\vec{x})-u(t,\vec{x})]\Delta S \Delta t$. Чтобы тепло не скапливалось на границе, нужно, чтобы это тепло проходило внутрь тела, то-есть $\Delta Q \approx k(x_1,x_2,x_3)\dfrac{\partial u}{\partial n}(t,\vec{x})\Delta S \Delta t \Rightarrow k\dfrac{\partial u}{\partial n} =$

$k_1[u_1 - u] \Leftrightarrow k\dfrac{\partial u}{\partial n} + k_1 u = k_1 u_1$ или $k\dfrac{\partial u}{\partial n} + k_1 u\Big|_S = f$, где f — заданная функция (смешанное краевое условие).

II. $u_1(t, \vec{x}) \equiv 0 \Rightarrow k\dfrac{\partial u}{\partial n} + k_1 u\Big|_S \equiv 0$ (однородное смешанное краевое условие).

III. $k_1(x_1, x_2, x_3) \equiv 0 \Rightarrow \dfrac{\partial u}{\partial n}\Big|_S = 0$ (однородное второе краевое условие).

IV. Если на границе S поддерживается постоянная (например, нулевая) температура, то $u\big|_S = 0$ (однородное первое краевое условие).

Если область G совпадает со всем пространством $\mathbb{R}^3$, то граничных условий задавать не нужно — решение будет существовать при любых начальных условиях при условии, что они ограничены. В этом случае решение будет единственным в классе ограниченных функций.

Пример 2. Предположим, что в предыдущем примере температура тела при одном из условий I–IV при $t \to +\infty$ установилась. Тогда очевидно, что предельное распределение температуры не зависит от t, поэтому оно удовлетворяет уравнению

$$\sum_{l=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_l}\Big(k\frac{\partial u}{\partial x_l}\Big) = 0 \text{ или } \sum_{l=1}^{3} \frac{\partial^2 u}{\partial x_l^2} = 0 \text{ (в случае } k = \mathrm{const}).$$

Лекция II

Примеры уравнений математической физики (продолжение)

Пример 3. Пусть упругая мембрана в состоянии покоя занимает область G на плоскости Ox_1x_2 и при воздействии силой $f(x_1,x_2)\Delta x_1\Delta x_2$ изогнулась по форме $u=u(x_1,x_2)$ (считаем, что точки мембраны перемещаются только по вертикали и справедливо предположение о малости перемещений, то-есть u и $\dfrac{\partial u}{\partial x_1}$, $\dfrac{\partial u}{\partial x_2}$ малы). Составим уравнение на функцию u, воспользовавшись тем, что работа, потраченная на растяжение малой части мембраны, пропорциональна изменению площади этого кусочка. Коэффициент пропорциональности обозначим T (*натяжение мембраны*): $\Delta A = T\Delta S$.

Тогда работа сил натяжения мембраны будет

$$A' = -\iint\limits_G \Big[\sqrt{1+(u'_{x_1})^2+(u'_{x_2})^2}-1\Big]T\,dx_1dx_2$$

(минус, потому что работа внешних сил, действующих на кусочек мембраны, проектирующийся на элементарный прямоугольник $\Delta x_1\Delta x_2$, равна по величине и противоположна по знаку работе, совершаемой внутренними силами кусочка мембраны). Работа силы f будет

$$A'' = \iint\limits_G fu\,dx_1dx_2.$$

Поэтому вся работа, совершаемая силами, будет

$$A = A'+A'' = \iint\limits_G [fu - T\sqrt{1+(u'_{x_1})^2+(u'_{x_2})^2}+T]\,dx_1dx_2.$$

Согласно принципу возможных перемещений вариационная производная этого выражения должна быть равной нулю, если u — это положение установившегося равновесия. Для этого придадим u возможное перемещение δu

$$\delta A \approx \iint\limits_G [f\delta u - T(u'_{x_1}\delta u'_{x_1} + u'_{x_2}\delta u'_{x_2})]\, dx_1 dx_2$$

(мы воспользовались малостью перемещений, когда после взятия вариационной производной заменили корни на близкое им значение 1).

Так как условия на u накладываются обычно на границе, то δu на границе должны быть нулевыми (вместе с производными по x_1 и x_2). Предположим, что границей области G является кусочно-гладкая кривая L, так что в слагаемых с T можно проинтегрировать по частям:

$$\delta A \approx -\int\limits_L T\frac{\partial u}{\partial n}\delta u\, ds + \iint\limits_G \Big[f\delta u + \frac{\partial}{\partial x_1}\Big(Tu'_{x_1}\Big)\delta u + \frac{\partial}{\partial x_2}\Big(Tu'_{x_2}\Big)\delta u\Big]\, dx_1 dx_2 =$$

$$= \iint\limits_G \Big[f + \frac{\partial}{\partial x_1}\Big(T\frac{\partial u}{\partial x_1}\Big) + \frac{\partial}{\partial x_2}\Big(\frac{\partial u}{\partial x_2}\Big)\Big]\delta u\, dx_1 dx_2 = 0. \qquad (\text{II}.1)$$

Так как δu может принимать любые значения внутри G, то

$$f + \frac{\partial}{\partial x_1}\Big(T\frac{\partial u}{\partial x_1}\Big) + \frac{\partial}{\partial x_2}\Big(\frac{\partial u}{\partial x_2}\Big) = 0 \text{ или}$$

$$\sum_{k=1}^{2}\frac{\partial}{\partial x_k}\Big(T\frac{\partial u}{\partial x_k}\Big) + f = 0 \qquad (\text{II}.2)$$

Если $T \equiv \text{const}$, то это уравнение называют *уравнением Пуассона*. Если $f \equiv 0$, то уравнение Пуассона становится *уравнением Лапласа*, рассмотренным выше (пример 2). Так же, как и для уравнения теплопроводности, на границе мембраны можно задавать разные краевые условия.

I. $u\big|_L = \varphi$ (φ — заданная функция на границе) — «закреплённая» мембрана. Такая задача называется *задачей Дирихле* или *первой краевой задачей* для уравнения Пуассона (или Лапласа).

II. $\dfrac{\partial u}{\partial n}\Big|_L = 0$ — «свободная» мембрана, то-есть края мембраны свободно, без трения, перемещаются в вертикальном направлении. Действительно, если мы не накладываем никаких ограничений на край мембраны, то δu могут быть произвольными как внутри области, так и на границе L. Поэтому линейный интеграл в выражении (II.1) при любых δu даёт нам $\dfrac{\partial u}{\partial n}\Big|_L = 0$.

III. Если на границу действует линейно распределенная сила $f_1(x_1, x_2)\Delta s$, то в линейном интеграле из (II.1) к подынтегральному выражению нужно прибавить $f_1\delta u$, и поэтому граничное условие будет

$T\dfrac{\partial u}{\partial n} - f_1\Big|_L = 0$. Эта задача носит название *второй краевой задачи* или *задачи Неймана.*

IV. $T\dfrac{\partial u}{\partial n} - ku\Big|_L = 0$ — «упруго закреплённая» мембрана.

Пример 4. Чтобы получить уравнение $u = u(t, x_1, x_2)$ движения мембраны под действием собственной инерции, заменим по принципу Д'Аламбера в уравнении равновесия (II.2) внешнюю силу f на произведение ускорения $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t, x_1, x_2)$ точки мембраны и плотности $\rho(x_1, x_2)$ мембраны в этой точке, взятое со знаком минус:

$$\sum_{l=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_l}\Big(T\frac{\partial u}{\partial x_l}\Big) - \rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0. \tag{II.3}$$

Это уравнение называется *уравнением движения мембраны* или *волновым уравнением* (двух переменных).

Возможные краевые условия остаются теми же, что и в примере 3, с той лишь разницей, что входящие в них заданные функции могут сами зависеть от времени. Чаще всего встречаются первое краевое условие $u\big|_L = 0$ или второе краевое условие $\dfrac{\partial u}{\partial n}\Big|_L = 0$.

Как и в случае уравнения теплопроводности, одних краевых условий недостаточно, чтобы однозначно определить решение. Из физических соображений ясно, что нужно задать начальное положение мембраны и начальную скорость точек мембраны

$$\left.\begin{aligned} u(t_0, x_1, x_2) &= \varphi_0(x_1, x_2), \\ u'_t(t_0, x_1, x_2) &= \varphi_1(x_1, x_2) \end{aligned}\right\} \quad (x_1, x_2) \in G \tag{II.4}$$

и краевые условия одного из рассмотренных типов.

Можно рассматривать и неограниченную мембрану, то-есть колебания всей плоскости, подчиненные одним условиям (II.4). В этом случае решение будет также определяться однозначно. Если же для ограниченной мембраны задать одни начальные условия (II.4), то решение однозначно определится не для всех значений t, а только для некоторого интервала $(t_0 - \Delta t, t_0 + \Delta t)$, $\Delta t > 0$, зависящего от точки (x_1, x_2), причем величина этого интервала будет тем меньше, чем ближе точка (x_1, x_2) к границе области G.

Так же, как и в случае уравнения теплопроводности, если ρ и T постоянны в области G, заменой переменных уравнение (II.3) можно привести к виду

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}.$$

Если бы мы рассматривали колебания трехмерного упругого тела, то аналогично нашли бы, что соответствующая функция $u = u(t, x_1, x_2, x_3)$ (любая из компонент вектора перемещения) должна удовлетворять уравнению

$$\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T\Big(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2}\Big).$$

Такого же вида будет уравнение колебаний газа; $u(t, x_1, x_2, x_3)$ тогда можно интерпретировать как отклонение от нормального давления в точке (x_1, x_2, x_3) в момент времени t. В одномерном случае (колебание струны, колебание газа в трубке) функция $u = u(t, x)$ удовлетворяет уравнению

$$\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Это уравнение называется *уравнением движения струны*. Здесь $\rho(x)$ — линейная плотность в точке x, а T — натяжение струны. Начальные и краевые условия вполне аналогичны соответствующим условиям для уравнения (II.3).

Постановка задачи Коши для УРЧП

Рассмотрим систему УРЧП с неизвестными функциями $u_1, \ldots, u_N$ от независимых переменных $t, x_1, \ldots, x_n$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^{n_k} u_k}{\partial t^{n_k}} = F_k\Big(t, x_1, \ldots, x_n, \ldots, \dfrac{\partial^l u_j}{\partial t^{l_0}\partial x_1^{l_1}\ldots\partial x_n^{l_n}}, \ldots\Big), \quad 1 \leqslant k \leqslant N \\ \text{в которых } l_0 + l_1 + \ldots + l_n = l \leqslant n_j, \quad l_0 < n_j \end{cases} \tag{II.5}$$

Заметим, что здесь а) время t играет роль выделенной переменной, а именно, старшие производные функций u_k по t явно выражены через производные функций u_j порядка по t меньше n_j и общего порядка $\leqslant n_j$; и б) N неизвестных функций и N уравнений системы.

Примеры. Уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2}$$

не является здесь уравнением такого вида, а уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}$$

— является.

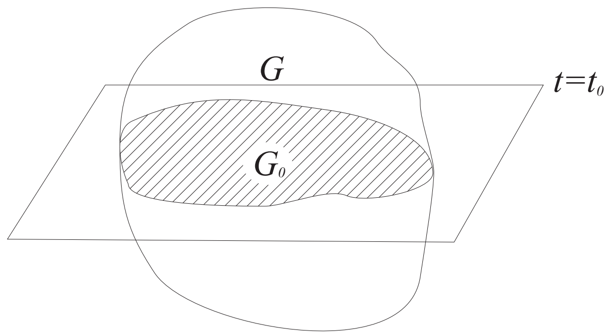
Пусть выделена область G_0 в пространстве $Ox_1 \dots x_n$ на гиперплоскости $t = t_0$ и потребуем от u_k выполнения следующих условий (для краткости вместо x_1, ..., x_n пишем $\vec{x}$):

$$\begin{cases} u_k(t,\vec{x})\Big|_{t=t_0} = \varphi_k^{(0)}(\vec{x}), \quad \vec{x} \in G_0 \\ \dfrac{\partial u_k}{\partial t}(t,\vec{x})\Big|_{t=t_0} = \varphi_k^{(1)}(\vec{x}), \\ \dots \\ \dfrac{\partial^{n_k-1} u_k}{\partial t^{n_k-1}}(t,\vec{x})\Big|_{t=t_0} = \varphi_k^{(n_k-1)}(\vec{x}). \end{cases} \qquad 1 \leqslant k \leqslant N \tag{II.6}$$

Эти условия называются начальными.

Определение II.1. *Задачей Коши для системы* (II.5) *называется система* (II.5) + *начальные условия* (II.6).

Решение — набор функций u_1, ... u_N, искомых в области G пространства $Otx_1 \dots x_n$, примыкающей с одной стороны к области G_0 в гиперплоскости $t = t_0$, то-есть часть границы области G должна совпадать с G_0. Можно, чтобы G примыкала к G_0 с двух сторон от гиперплоскости $t = t_0$, тогда G_0 будет лежать внутри области G.



Найти решение задачи Коши $\Leftrightarrow$ найти набор функций $u_1(t,\vec{x})$, ... $u_N(t,\vec{x})$ в области G, дающих при подстановке в уравнения системы (II.5) верные равенства и удовлетворяющих на гиперплоскости $t = t_0$ условиям (II.6). Если область G примыкает к части G_0 гиперплоскости $t = t_0$ только с одной стороны (например, сверху), то значения $u_k(t,\vec{x})$ при $t = t_0$ определяются как пределы $u_k(t,\vec{x})$ изнутри области G при $t \to t_0+$ (граничные значения функций $u_k(t,\vec{x})$ на G_0), и для производных $u_k(t,\vec{x})$ то же самое.

Теорема существования и единственности

Чтобы сформулировать теорему существовании и единственности, нам понадобится вспомогательное понятие.

Определение II.2. *Функция $F(x_1, \dots, x_n)$ называется аналитической в области $G \subseteq \mathbb{R}^n$, если для любой точки $(x_1^0, \dots, x_n^0) \in G$ существует окрестность $U(x_1^0, \dots, x_n^0)$, в которой*

$$F(x_1, \dots, x_n) = \sum_{k_1, \dots, k_n \in \mathbb{Z}_+} a_{k_1 \dots k_n} (x_1 - x_1^0)^{k_1} \dots (x_n - x_n^0)^{k_n}. \tag{II.7}$$

Как следствие, ряд (II.7) сходится равномерно и абсолютно (вместе со всеми производными) в любом достаточно малом параллелепипеде $|x_k - x_k^0| \leqslant r_k$, $r_k > 0$, $F \in C^\infty(G)$ и коэффициенты ряда (II.7) могут быть вычислены по формулам $a_{k_1 \dots k_n} = \dfrac{1}{k_1! \dots k_n!} \dfrac{\partial^{k_1 + \dots + k_n} F}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_n^{k_n}} (x_1^0, \dots, x_n^0)$ (то-есть, ряд (II.7) есть ряд Тейлора функции F).

Теорема (С. В. Ковалевской). *Если функции $\varphi_k^{(l_0)}(\vec{x})$ аналитичны в окрестности $(x_1^0, \dots, x_n^0)$, а F_k аналитичны в окрестности $\left(t_0, x_1^0, \dots, x_n^0, \dots, \left.\dfrac{\partial^{l_1 + \dots + l_n} \varphi_k^{(l_0)}}{\partial x_1^{l_1} \dots \partial x_n^{l_n}}\right|_{\substack{x_1 = x_1^0 \\ \dots\dots \\ x_n = x_n^0}}, \dots\right)$, то задача Коши* (II.5)+(II.6) *имеет и единственное аналитическое решение в некоторой окрестности $(t_0, x_1^0, \dots, x_n^0)$.*

Лекция III

Доказательство единственности в теореме Ковалевской

Сведение общей системы к системе уравнений первого порядка

Для простоты покажем, как одно линейное уравнение второго порядка сводится к системе линейных уравнений первого порядка. Аналогичные соображения применяются к общему случаю.

Итак, рассмотрим задачу

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \sum\limits_{l,j=1}^{n} a_{lj}(t,\vec{x})\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_l \partial x_j} + \sum\limits_{j=1}^{n} a_{0j}(t,\vec{x})\dfrac{\partial^2 u}{\partial t \partial x_j} + \\ \qquad + \sum\limits_{j=1}^{n} b_j(t,\vec{x})\dfrac{\partial u}{\partial x_j} + b_0(t,\vec{x})\dfrac{\partial u}{\partial t} + b(t,\vec{x})u + f(t,\vec{x}) \\ u\Big|_{t=t_0} = \varphi^{(0)}(\vec{x}), \quad \dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=t_0} = \varphi^{(1)}(\vec{x}), \quad \vec{x} \in G_0, \end{cases} \tag{III.1}$$

решение ищем в некоторой области G пространства $Otx_1 \dots x_n$, содержащей область G_0 в гиперплоскости $t = t_0$.

Введём новые неизвестные функции u, $u_0 = \dfrac{\partial u}{\partial t}$, $u_k = \dfrac{\partial u}{\partial x_k}$, все зависят от t, $\vec{x}$. Тогда уравнение (III.1) перепишется в виде

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_0}{\partial t} = \sum\limits_{l,j=1}^{n} a_{lj}(t,\vec{x})\dfrac{\partial u_l}{\partial x_j} + \sum\limits_{j=1}^{n} a_{0j}(t,\vec{x})\dfrac{\partial u_0}{\partial x_j} + \\ \qquad + \sum\limits_{j=1}^{n} b_j(t,\vec{x})u_j + b_0(t,\vec{x})u_0 + b(t,\vec{x})u + f(t,\vec{x}) \\ \dfrac{\partial u}{\partial t} = u_0 \text{ — из самой замены} \\ \dfrac{\partial u_k}{\partial t} = \dfrac{\partial u_0}{\partial x_k} \text{ — в силу дважды непрерывной дифференцируемости } u, \end{cases} \tag{III.2}$$

а начальные условия будут

$$\begin{cases} u\big|_{t=t_0} = \varphi^{(0)} \\ u_0\big|_{t=t_0} = \varphi^{(1)} \\ u_k\big|_{t=t_0} = \dfrac{\partial \varphi^{(0)}}{\partial x_k} \text{ — дифференцируя первое краевое условие.} \end{cases} \tag{III.3}$$

Все эти рассуждения справедливы при условии дважды непрерывной дифференцируемости функции u.

Обратно, пусть u, u_0, u_k, $k = 1, 2, \ldots, n$, удовлетворяют задаче Коши (III.2)+(III.3). Тогда $u_0 = \dfrac{\partial u}{\partial t}$. Покажем, что $u_k \equiv \dfrac{\partial u}{\partial x_k}$, $k = 1, 2, \ldots, n$, в области G. Действительно, $\dfrac{\partial u_k}{\partial t} = \dfrac{\partial u_0}{\partial x_k} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial t \partial x_k}$ (в силу $u \in C^2(G)) \Rightarrow \dfrac{\partial}{\partial t}\Big[u_k - \dfrac{\partial u}{\partial x_k}\Big] = 0 \Rightarrow u_k - \dfrac{\partial u}{\partial x_k} = \mathrm{const}$ по t (последняя импликация справедлива во всяком случае для выпуклой по переменной t области G). Так как при $t = t_0$ выполнено $u_k = \dfrac{\partial \varphi^{(0)}}{\partial x_k} = \dfrac{\partial u}{\partial x_k}$, то $u_k - \dfrac{\partial u}{\partial x_k} \equiv 0$ в G. Подставляя доказанное соотношение $u_k = \dfrac{\partial u}{\partial x_k}$ в (III.2), имеем уравнение (III.1), а из (III.3) получаем, очевидно, начальные условия (III.1). Приведенное доказательство годится для выпуклой по t области G, однако если предполагать функцию u аналитической, то из равенства $u_k - \dfrac{\partial u}{\partial x_k}$ нулю в малой выпуклой по t подобласти $g \subset G$ вытекает равенство нулю и во всей области G в силу известного свойства единственности аналитических функций.

Единственность решения системы УРЧП в аналитических функциях

Опять рассмотрим линейное уравнение 2-го порядка. Сдвигом по t и по $\vec{x}$ можем свести к случаю $t_0 = 0$, $\vec{x}^0 = 0$, G — некоторая окрестность точки 0. Как обычно, сводим уравнение (III.1) к системе (III.2). Рассмотрим более общую систему

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_k}{\partial t} = \displaystyle\sum_{j=1}^{N} \sum_{l=1}^{n} a_{lj}^{(k)} \frac{\partial u_j}{\partial x_l} + \sum_{j=1}^{N} a_j^{(k)} u_j + f_k, \quad 1 \leqslant k \leqslant N \\ u_k\big|_{t=0} = \varphi_k(\vec{x}), \quad \vec{x} \in G_0, \end{cases} \tag{III.4}$$

и докажем для неё единственность решения в предположении аналитичности u_k и коэффициентов $a_{lj}^{(k)}$, $a_j^{(k)}$, f_k в некоторой окрестности $U(0,0,\ldots,0)$.

Рассмотрев $v_k(t,\vec{x}) = u_k(t,\vec{x}) - \varphi_k(\vec{x})$, получим

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v_k}{\partial t} = \sum\limits_{j=1}^{N}\sum\limits_{l=1}^{n} a_{lj}^{(k)}\dfrac{\partial v_j}{\partial x_l} + \sum\limits_{j=1}^{N} a_j^{(k)} v_j + \Big[f_k + \sum\limits_{j=1}^{N}\sum\limits_{l=1}^{n} a_{lj}^{(k)}\dfrac{\partial \varphi_j}{\partial x_l} + \sum\limits_{j=1}^{N} a_j^{(k)}\varphi_j\Big] \\ v_k\Big|_{t=0} = 0, \quad 1 \leqslant k \leqslant N, \end{cases} \tag{III.5}$$

то-есть систему, подобную предыдущей, только с нулевыми начальными данными, причём как v_k, так и коэффициенты системы остались по-прежнему аналитическими, если таковыми были u_k и коэффициенты предыдущей системы.

Теперь предположим, обозначая v_k опять через u_k, что u_k аналитичны в некоторой окрестности точки $(0,0,\ldots,0)$, то-есть разлагаются в степенные ряды по степеням t и $x_1,\ldots,x_n$, и коэффициенты $a_{l_0 l_1\ldots l_n}^{(k)}$ этих разложений равны $\dfrac{1}{l_0!l_1!\ldots l_n!}\dfrac{\partial^{l_0+l_1+\ldots+l_n}u_k}{\partial t^{l_0}\partial x_1^{l_1}\ldots\partial x_n^{l_n}}\Bigg|_{\substack{t=0\\x_1=0\\\ldots\ldots\\x_n=0}}$. Поэтому достаточно показать, что по начальным данным (в данном случае нулевым) и коэффициентам уравнений однозначно определяются все производные u_k в точке $(0,0,\ldots,0)$.

Действительно, в силу начальных условий для любых $l_1,\ldots,l_n \in \mathbb{Z}_+$

$$\frac{\partial^{l_1+\ldots+l_n}u_k}{\partial x_1^{l_1}\ldots\partial x_n^{l_n}}\Bigg|_{\substack{t=0\\x_1=0\\\ldots\ldots\\x_n=0}} = 0. \tag{III.6}$$

Далее рассмотрим производные вида

$$\frac{\partial^{l_1+l_2+\ldots+l_n+1}u_k}{\partial t\partial x_1^{l_1}\ldots\partial x_n^{l_n}}\Bigg|_{\substack{t=0\\x_1=0\\\ldots\ldots\\x_n=0}} \tag{III.7}$$

(одно дифференцирование по t). Если продифференцировать (III.4) по x_1 l_1 раз, по x_2 l_2 раз, и так далее, по x_n l_n раз, то слева получим производную (III.7), а справа возникнут производные по переменным $x_1,\ldots,x_n$ функций u_j в точке $t = x_1 = \ldots = x_n = 0$ и коэффициентов $a_{lj}^{(k)}$, $a_j^{(k)}$, f_k. Так как производные (III.6) в точке $t = x_1 = \ldots = x_n = 0$ уже нами определены однозначно, то и производные вида (III.7) определены в точке $t = x_1 = \ldots = x_n = 0$ однозначно.

Теперь рассмотрим производные вида

$$\left.\frac{\partial^{l_1+l_2+\ldots+l_n+2}u_k}{\partial t^2\partial x_1^{l_1}\ldots\partial x_n^{l_n}}\right|_{\substack{t=0\\ x_1=0\\ \ldots\ldots\\ x_n=0}} \tag{III.8}$$

(два дифференцирования по t). Если продифференцировать уравнение (III.4) по t один раз, по x_1 l_1 раз, по x_2 l_2 раз, и так далее, по x_n l_n раз, то в левой части полученного равенства получим производную (III.8), а справа будут производные по t один раз и по $x_1,\ldots,x_n$ произвольное число раз функций u_j и коэффициентов $a_{lj}^{(k)}$, $a_j^{(k)}$, f_k, а также производные по $x_1,\ldots,x_n$. Так как производные вида (III.6) и (III.7) в точке $t=x_1=\ldots=x_n=0$ определены нами уже однозначно, то и производные (III.8) определены в точке $t=x_1=\ldots=x_n=0$ однозначно.

Поступая аналогично с производными, где встречаются 3, 4 и более производных по t, последовательно определим все производные по $t,\ x_1,\ldots,x_n$ в точке $t=x_1=\ldots=x_n=0$. Следовательно, если $u_k^{(1)}$ и $u_k^{(2)}$ — два решения (III.4), то $u_k^{(1)}\equiv u_k^{(2)}$ во всей области аналитичности этих решений, так как аналитические функции определяются по своим коэффициентам Тейлора в некоторой точке однозначно.

Контрпример. Задача $\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}\\ u\big|_{t=0}=\dfrac{1}{1-x}=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}x^n\end{cases}$ не имеет аналитического решения в окрестности $(0,0)$. Действительно, если бы аналитическое решение $u(t,x)=\sum\limits_{k,n=0}^{\infty}a_{kn}t^kx^n$ существовало в некоторой окрестности точки $(0,0)$, то коэффициенты Тейлора a_{kn} вычислялись бы по формулам

$$a_{kn}=\frac{1}{k!n!}\left.\frac{\partial^{k+n}u}{\partial t^k\partial x^n}\right|_{\substack{t=0\\ x=0}}=\frac{1}{k!n!}\left.\frac{\partial^{n+2k}u}{\partial x^{n+2k}}\right|_{\substack{t=0\\ x=0}}=\frac{(2k+n)!}{k!n!}.$$

Так как абсолютно сходящиеся двойные ряды можно суммировать с помощью повторных в любом порядке, то мы получили бы, что

$$u(t,x)=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2k+n)!}{k!n!}t^kx^n=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k}{k!}\Big(\sum_{n=0}^{\infty}x^{n+2k}\Big)^{(2k)}=$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k}{k!}\Big(\frac{1}{1-x}\Big)^{(2k)}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k}{k!}\frac{(2k)!}{(1-x)^{2k+1}}$$

и, следовательно,

$$u(t,x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(2k)!}{k!}\frac{t^k}{(1-x)^{2k+1}},$$

что невозможно, так как последний ряд расходится при $t\neq 0$.

Рассмотрим общий вид линейного уравнения в частных производных второго порядка от одной неизвестной функции

$$\sum_{l,j=1}^{n}A_{lj}\frac{\partial^2 u}{\partial x_l\partial x_j}+\sum_{j=1}^{n}B_j\frac{\partial u}{\partial x_j}+Cu+F=0, \tag{III.9}$$

где $A_{lj}=A_{jl}$, B_j, C, F — функции, непрерывно дифференцируемые в некоторой области $Ox_1\dots x_n$ с действительными значениями. Посмотрим, как преобразуются коэффициенты уравнения при линейной замене

$$y_k=\sum_{j=1}^{n}a_{kj}x_j. \tag{III.10}$$

Тогда

$$\frac{\partial u}{\partial x_1}=\frac{\partial u}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial x_1}+\frac{\partial u}{\partial y_2}\frac{\partial y_2}{\partial x_1}+\ldots+\frac{\partial u}{\partial y_n}\frac{\partial y_n}{\partial x_1}=\sum_{k=1}^{n}a_{k1}\frac{\partial u}{\partial y_k},$$

следовательно,

$$\frac{\partial u}{\partial x_j}=\sum_{k=1}^{n}a_{kj}\frac{\partial u}{\partial y_k},$$

и

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_l\partial x_j}=\sum_{k=1}^{n}\sum_{m=1}^{n}a_{ml}\frac{\partial^2 u}{\partial y_m\partial y_k}=\sum_{k,m=1}^{n}a_{kj}a_{ml}\frac{\partial^2 u}{\partial y_m\partial y_k},$$

следовательно, уравнение приобретет вид

$$\sum_{l,j=1}^{n}A_{lj}\sum_{k,m=1}^{n}a_{kj}a_{ml}\frac{\partial^2 u}{\partial y_m\partial y_k}+\ldots=\sum_{k,m=1}^{n}\Bigl(\sum_{l,j=1}^{n}a_{ml}A_{lj}a_{kj}\Bigr)\frac{\partial^2 u}{\partial y_m\partial y_k}+\ldots=$$
$$=\sum_{k,m=1}^{n}A'_{km}\frac{\partial^2 u}{\partial y_m\partial y_k}+\text{младшие производные}=0.$$

Обозначая матрицу коэффициентов при вторых производных $A=(A_{jl})$, находим, что при переходе к новым координатам она преобразуется по закону $A' = aAa^T$, где $a = (a_{kj})$ — матрица коэффициентов замены (III.10). Видно, что коэффициенты уравнения преобразуются как коэффициенты квадратичной формы

$$A(\xi, \xi) = \sum_{l,j=1}^{n} A_{lj}\xi_l\xi_j \tag{III.11}$$

при замене $\xi_j = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{kj}\eta_k$ или, в матричной записи, $\xi = a^T\eta$. Из линейной алгебры известно, что существует невырожденное преобразование, приводящее форму (III.11) к (нормальному) виду

$$\sum_{k=1}^{r} \pm\eta_k^2 \quad (r\text{— ранг матрицы } A).$$

Беря соответствующее преобразование координат для уравнения (III.9), приведем (III.9) к виду

$$\sum_{k,m=1}^{n} A'_{km}(x_1^0, \ldots, x_n^0)\frac{\partial^2 u}{\partial y_k \partial y_m} + \text{ младшие производные } = 0,$$

где

$$\begin{aligned} A'_{km} &= \pm 1, \quad \text{если } k = m \leqslant r \\ A'_{km} &= 0, \quad\;\;\, \text{если } k = m > r \text{ или } k \neq m. \end{aligned}$$

Этот вид уравнения (III.9) называется каноническим. В каждой точке $\vec{x}^0 \in G$ преобразование (III.10), приводящее (III.9) к каноническому виду, вообще говоря, своё, в других точках G это преобразование может не приводить (III.9) к каноническому виду. Примеры показывают, что если переменных > 2, то не существует даже нелинейной замены общего вида, приводящей (III.9) к каноническому виду ни в какой сколь угодно малой области.

Определение III.1. *Уравнение* (III.9) *называется*

эллиптическим в точке $\vec{x}^0$, *если все A'_{kk} отличны от нуля и одного знака (то-есть квадратичная форма* (III.11) *положительно определена или отрицательно определена);*

гиперболическим в $\vec{x}^0$, *если все A'_{kk} ненулевые и все, кроме одного, имеют одинаковый знак;*

ультрагиперболическим в $\vec{x}^0$, *если все A'_{kk} ненулевые и существует больше одного положительного и > 1 отрицательного коэффициента A'_{kk};*

параболическим в широком смысле, *если есть нулевые* A'_{kk}, *а все остальные имеют одинаковый знак;*

параболическим в узком смысле, *если все* A'_{kk}, *кроме одного, ненулевые и одного знака, а один, например,* A'_{11}, *равен нулю, причём коэффициент при* $\dfrac{\partial u}{\partial y_1}$ *нулю не равен.*

Лекция IV

Приведение к каноническому виду в области

Если уравнение эллиптично в каждой точке области G, то оно называется *эллиптическим в области* G. Аналогично для других типов. Иногда бывает, что в одной части области G уравнение имеет один тип, например, эллиптический, а в другой — гиперболический. Например, уравнение Трикоми

$$y\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0.$$

Примеры.

Уравнение	$A(\xi,\xi)$	тип
$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}+\ldots+\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}=0$	$\xi_1^2+\xi_2^2+\ldots+\xi_n^2$	эллиптический
$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_0^2}-\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}-\ldots-\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}=0$	$\xi_0^2-\xi_1^2-\ldots-\xi_n^2$	гиперболический
$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}-\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_3^2}-\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_4^2}=0$	$\xi_1^2+\xi_2^2-\xi_3^2-\xi_4^2$	ультрагиперболический
$\dfrac{\partial u}{\partial x_0}-\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}-\ldots-\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}=0$	$-\xi_1^2-\xi_2^2-\ldots-\xi_n^2$	параболический

Многочлен $A(\xi,\xi)$ называется характеристическим, а уравнение $A(\xi,\xi)=0$ — характеристическим. Видно, что в первом случае характеристическое уравнение не имеет нетривиальных действительных решений. Часто так эллиптические уравнения и определяют.

Если n — произвольное, а коэффициенты A_{lj} постоянны, то преобразование (III.10), приводящее (III.9) к каноническому виду в одной точке, приведёт (III.9) к каноническому виду и во всех остальных точках области G (так как коэффициенты A_{lj} одни и те же во всей области).

Если A_{lj} непостоянны, а число переменных равно двум, то такое преобразование также возможно.

Итак, рассмотрим общее квазилинейное уравнение второго порядка

$$A(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2B(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+C(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+F\Big(x,y,u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}\Big)=0 \quad \text{(IV.1)}$$

где A, B, C, F непрерывно дифференцируемы и A, B, C не обращаются в нуль одновременно. В этих предположениях перейдем от переменных x, y к переменным z, w по формулам

$$\begin{cases} z = \varphi(x,y) \\ w = \psi(x,y) \end{cases} \quad \text{где } \varphi, \psi \in C^2 \text{ и } J(\varphi,\psi) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial\varphi}{\partial x} & \dfrac{\partial\varphi}{\partial y} \\ \dfrac{\partial\psi}{\partial x} & \dfrac{\partial\psi}{\partial y} \end{vmatrix} \neq 0. \tag{IV.2}$$

При этих условиях существует (по крайней мере, локально) обратная замена $x = \alpha(z,w)$, $y = \beta(z,w)$. Обозначим $u(\alpha(z,w),\beta(z,w)) = \widetilde{u}(z,w)$ и будем обозначать $\widetilde{u}$ по-старому как u (то-есть у нас u иногда будет $u(x,y)$, а иногда $u(z,w)$). Тогда

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial u}{\partial z}\dfrac{\partial z}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial w}\dfrac{\partial w}{\partial x} = \dfrac{\partial u}{\partial z}\big(\varphi(x,y),\psi(x,y)\big)\dfrac{\partial\varphi}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial w}\big(\varphi(x,y),\psi(x,y)\big)\dfrac{\partial\psi}{\partial x} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{\partial u}{\partial z}\dfrac{\partial z}{\partial y} + \dfrac{\partial u}{\partial w}\dfrac{\partial w}{\partial y} = \dfrac{\partial u}{\partial z}\big(\varphi(x,y),\psi(x,y)\big)\dfrac{\partial\varphi}{\partial y} + \dfrac{\partial u}{\partial w}\big(\varphi(x,y),\psi(x,y)\big)\dfrac{\partial\psi}{\partial y}, \end{cases}$$

откуда

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}\Big(\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}\Big)^2 + 2\dfrac{\partial^2 u}{\partial z\partial w}\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}\dfrac{\partial\psi}{\partial x} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial w^2}\Big(\dfrac{\partial\psi}{\partial x}\Big)^2 + \text{мл произв по } z,w \\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}\dfrac{\partial\psi}{\partial y} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z\partial w}\Big(\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}\dfrac{\partial\psi}{\partial y} + \dfrac{\partial\psi}{\partial x}\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}\Big) + \dfrac{\partial^2 u}{\partial w^2}\dfrac{\partial\psi}{\partial x}\dfrac{\partial\psi}{\partial y} + \text{мл произв} \\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}\Big(\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}\Big)^2 + 2\dfrac{\partial^2 u}{\partial z\partial w}\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}\dfrac{\partial\psi}{\partial y} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial w^2}\Big(\dfrac{\partial\psi}{\partial y}\Big)^2 + \text{мл произв по } z,w \end{cases}$$

$\Rightarrow$ уравнение (IV.1) перепишется

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\Big[A\Big(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\Big)^2 + 2B\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial y} + C\Big(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\Big)^2\Big] + \\ &\qquad + 2\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial w}\Big[A\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial x} + B\Big(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial y} + \frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial y}\Big) + C\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial y}\Big] + \\ &\quad + \frac{\partial^2 u}{\partial w^2}\Big[A\Big(\frac{\partial\psi}{\partial x}\Big)^2 + 2B\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial y} + C\Big(\frac{\partial\psi}{\partial y}\Big)^2\Big] + F_1\Big(z,w,u,\frac{\partial u}{\partial z},\frac{\partial u}{\partial w}\Big) = 0. \end{aligned} \tag{IV.3}$$

Покажем, что φ и ψ всегда можно выбрать так, что уравнение (IV.3) приобретет канонический вид. Для этого нам понадобится рассмотреть три случая $B^2 - AC > 0$ (гиперболический тип), $B^2 - AC < 0$ (эллиптический тип) и $B^2 - AC = 0$ (параболический тип) в некоторой окрестности (x_0, y_0). Можем считать, что либо $A \neq 0$ либо $C \neq 0$ в некоторой окрестности (x_0, y_0), иначе сделаем замену $\begin{cases} x = x' - y' \\ y = y' \end{cases}$ или $\begin{cases} x = x' \\ y = y' - x'. \end{cases}$ Считаем для определенности, что $A \neq 0$.

I. $B^2 > AC$. Рассмотрим уравнение на первый коэффициент при $\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}$

$$A\Big(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\Big)^2 + 2B\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial y} + C\Big(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\Big)^2 = 0. \tag{IV.4}$$

Это однородное уравнение относительно $\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}$ $\Rightarrow$ делим на $\Big(\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}\Big)^2$ (предполагая временно, что $\dfrac{\partial\varphi}{\partial y} \neq 0$) $\Rightarrow$

$$A\Big(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\Big/\frac{\partial\varphi}{\partial y}\Big)^2 + 2B\Big(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\Big/\frac{\partial\varphi}{\partial y}\Big) + C = 0 \text{ — квадратное уравнение.}$$

Если рассмотрим линию $\varphi(x, y) = \varphi(x_1, y_1)$, где (x_1, y_1) — любая фиксированная точка окрестности (x_0, y_0), то из предположения $\dfrac{\partial\varphi}{\partial y} \neq 0$ вытекает существование неявной функции $y = y(x)$, причём $y'(x) = -\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}\Big/\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}$. Следовательно, подставляя это соотношение в предыдущее квадратное уравнение, находим

$$A(y')^2 - 2By' + C = 0 \quad \text{(уравнение характеристик).}$$

Решая его относительно y', имеем $D = 4B^2 - 4AC > 0$ и

$$y' = \frac{2B \pm 2\sqrt{B^2 - AC}}{2A} = \frac{B}{A} \pm \frac{\sqrt{B^2 - AC}}{A}, \tag{IV.5}$$

— два обыкновенных дифференциальных уравнения относительно неизвестной функции $y = y(x)$, где мы воспользовались также предположением $A \neq 0$. Из теории обыкновенных дифференциальных уравнений известно, что существуют первоинтегралы $\varphi(x, y) = C_1$, $\psi(x, y) = C_2$ этих уравнений, дающие при подстановке значений C_1 и C_2 из некоторых окрестностей $C_1^0 = \varphi(x_0, y_0)$ и $C_2^0 = \psi(x_0, y_0)$, соответственно, всевозможные решения уравнений (IV.5) с начальными данными из некоторой окрестности $U(x_0, y_0)$. При этом $\varphi, \psi \in C^2(U(x_0, y_0))$, $\operatorname{grad}\varphi, \operatorname{grad}\psi \neq \vec{0}$ и $\dfrac{d}{dx}\big[\varphi(x, y(x))\big] \equiv 0$, $\dfrac{d}{dx}\big[\psi(x, y(x))\big] \equiv 0$ для любого решения $y(x)$ соответствующего уравнения из (IV.5) и для всех значений x, при которых

$(x, y(x)) \in U(x_0, y_0)$. Тогда

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y} y'(x) = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial\psi}{\partial x} + \frac{\partial\psi}{\partial y} y'(x) = 0 \quad \text{или}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\Big(\frac{B}{A} + \frac{\sqrt{B^2 - AC}}{A}\Big) \equiv 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial\psi}{\partial x} + \frac{\partial\psi}{\partial y}\Big(\frac{B}{A} - \frac{\sqrt{B^2 - AC}}{A}\Big) \equiv 0$$

в некоторой окрестности (x_0, y_0).

Теперь объясним, почему $\dfrac{\partial\varphi}{\partial y} \neq 0$. Если бы $\dfrac{\partial\varphi}{\partial y} = 0$, то из уравнения (IV.4) (так как $A \neq 0$) вытекало бы $\dfrac{\partial\varphi}{\partial x} = 0$, что противоречит выбору φ. То же относится к $\dfrac{\partial\psi}{\partial y} \neq 0$. Более того, так как $\operatorname{grad}\varphi$ и $\operatorname{grad}\psi$ ортогональны векторам $(A, B + \sqrt{B^2 - AC})$ и $(A, B - \sqrt{B^2 - AC})$, соответственно, и вектора $(A, B + \sqrt{B^2 - AC})$ и $(A, B - \sqrt{B^2 - AC})$ непропорциональны, то $\operatorname{grad}\varphi$ и $\operatorname{grad}\psi$ неколлинеарны $\Rightarrow J(\varphi, \psi) \neq 0$. Поэтому имеем право сделать замену переменных (IV.2). Обозначив коэффициенты при $\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial z \partial w}$ и $\dfrac{\partial^2 u}{\partial w^2}$ в преобразованном уравнении через $\widetilde{A}$, $2\widetilde{B}$ и $\widetilde{C}$, соответственно, заметим, что в силу тождества $\widetilde{B}^2 - \widetilde{A}\widetilde{C} = (B^2 - AC)|J(\varphi, \psi)|^2$ (докажите его!) тип уравнения не меняется при невырожденной замене координат. Далее, так как коэффициент при $\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ равен

$$\widetilde{A} = \frac{1}{A}\Big(A\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \big(B + \sqrt{B^2 - AC}\big)\frac{\partial\varphi}{\partial y}\Big)\Big(A\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \big(B - \sqrt{B^2 - AC}\big)\frac{\partial\varphi}{\partial y}\Big),$$

то $\widetilde{A} = 0$ и аналогично $\widetilde{C} = 0$, поэтому $\widetilde{B} \neq 0$ (так как $\widetilde{B}^2 - \widetilde{A}\widetilde{C} > 0$) и, деля на $2\widetilde{B}$, имеем

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial w} = \Phi\Big(z, w, u, \frac{\partial u}{\partial z}, \frac{\partial u}{\partial w}\Big).$$

Этот вид уравнения гиперболического типа также называется каноническим, он легко сводится к классическому с помощью замены

$$\begin{cases} z = z' + w' \\ w = z' - w' \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 u}{\partial z'^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial w'^2} = \Phi_1\Big(z', w', u, \frac{\partial u}{\partial z'}, \frac{\partial u}{\partial w'}\Big).$$

II. $B^2 \equiv AC$. Тогда A или $C \neq 0$ (иначе все A, B, $C = 0$). Допустим $A \neq 0$. Тогда оба уравнения для φ и ψ сливаются в одно

$$A\frac{\partial\varphi}{\partial x} + B\frac{\partial\varphi}{\partial y} = 0 \qquad \text{(IV.6)}$$

и так как (A, B) и (B, C) — пропорциональны (в силу случая II), то и

$$B\frac{\partial \varphi}{\partial x} + C\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0.$$

Теперь сделаем замену

$$\begin{cases} z = \varphi(x, y) \\ w = \psi(x, y), \end{cases}$$

где $\psi(x, y)$ — произвольная C^2-функция, $\operatorname{grad}\psi \neq \vec{0}$, и такая, что замена невырождена, то-есть

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} & \dfrac{\partial \varphi}{\partial y} \\ \dfrac{\partial \psi}{\partial x} & \dfrac{\partial \psi}{\partial y} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Так как $\dfrac{\partial \varphi}{\partial y} \neq 0$ (иначе из (IV.6) и $\dfrac{\partial \varphi}{\partial x} = 0$, что противоречит выбору φ), то в качестве ψ можно взять $\psi(x, y) = x$. Тогда коэффициент при $\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ будет $\dfrac{1}{A}\Big(A\dfrac{\partial \varphi}{\partial x} + B\dfrac{\partial \varphi}{\partial y}\Big)^2 = 0$, половина коэффициента при $\dfrac{\partial^2 u}{\partial z \partial w}$ равна $\Big(A\dfrac{\partial \varphi}{\partial x} + B\dfrac{\partial \varphi}{\partial y}\Big)\dfrac{\partial \psi}{\partial x} + \Big(B\dfrac{\partial \varphi}{\partial x} + C\dfrac{\partial \varphi}{\partial y}\Big)\dfrac{\partial \psi}{\partial y} = 0$, а коэффициент при $\dfrac{\partial^2 u}{\partial w^2}$ будет $\dfrac{1}{A}\Big(A\dfrac{\partial \psi}{\partial x} + B\dfrac{\partial \psi}{\partial y}\Big)^2 \neq 0$, так как иначе столбцы матрицы $\begin{pmatrix} \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} & \dfrac{\partial \varphi}{\partial y} \\ \dfrac{\partial \psi}{\partial x} & \dfrac{\partial \psi}{\partial y} \end{pmatrix}$ были бы линейно зависимы и замена была бы вырождена. Поэтому получаем

$$\widetilde{C}\frac{\partial^2 u}{\partial w^2} = F_1\Big(z, w, u, \frac{\partial u}{\partial z}, \frac{\partial u}{\partial w}\Big)$$

и делим на $\widetilde{C} \neq 0 \Rightarrow$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial w^2} = F_2\Big(z, w, u, \frac{\partial u}{\partial z}, \frac{\partial u}{\partial w}\Big).$$

Если первоначальное уравнение было линейным, то-есть $F_2\Big(z, w, u, \dfrac{\partial u}{\partial z}, \dfrac{\partial u}{\partial w}\Big) = A_1\dfrac{\partial u}{\partial z} + B_1\dfrac{\partial u}{\partial w} + C_1 u + D_1$, это уравнение можно упростить, заменив неизвестную функцию $u = vk$, где коэффициент $k(z, w)$ подберем так, чтобы уравнение на v приобрело ещё более простой вид. Действительно, подставляем

$$\frac{\partial^2 v}{\partial w^2}k + 2\frac{\partial v}{\partial w}\frac{\partial k}{\partial w} + v\frac{\partial^2 k}{\partial w^2} = A_1\frac{\partial v}{\partial z}k + B_1\frac{\partial v}{\partial w}k + C_2 v + D_1$$

и если $2\dfrac{\partial k}{\partial w} = B_1 k$, то-есть

$$k(z, w) = e^{\frac{1}{2}\int B_1(z,w)\,dw},$$

то уравнение перепишется

$$\frac{\partial^2 v}{\partial w^2} = A_1 \frac{\partial v}{\partial z} + C_3 v + D_2$$

Это простейший вид линейного уравнения параболического типа.

Лекция V

Приведение к каноническому виду в области (продолжение)

III. $B^2 < AC$. Тогда A и $C \neq 0$, так как B^2 не может быть меньше нуля. Тогда уравнения на нахождение φ и ψ — комплексные

$$A\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \big(B + \sqrt{\underbrace{B^2 - AC}_{<0}}\big)\frac{\partial\varphi}{\partial y} = 0 \tag{V.1}$$

и, к сожалению, чтобы найти решения такого уравнения, нам придется воспользоваться теоремой Ковалевской, и поэтому предположим, что коэффициенты A, B, C — аналитические в окрестности (x_0, y_0). В этом случае существует решение $\varphi(x,y) = \varphi^*(x,y) + i\psi^*(x,y)$ уравнения (V.1), с C^2-функциями φ^* и ψ^*, причём $\operatorname{grad}\varphi \neq \vec{0}$. Сделаем замену с помощью функций φ^* и ψ^*

$$\begin{cases} z = \varphi^*(x,y) \\ w = \psi^*(x,y). \end{cases}$$

Проверим, что эта замена невырождена. Отделяя действительную и мнимую части в (V.1), имеем

$$A\frac{\partial\varphi^*}{\partial x} = -B\frac{\partial\varphi^*}{\partial y} + \sqrt{AC - B^2}\frac{\partial\psi^*}{\partial y} \quad \text{и} \quad A\frac{\partial\psi^*}{\partial x} = -B\frac{\partial\psi^*}{\partial y} - \sqrt{AC - B^2}\frac{\partial\varphi^*}{\partial y}.$$

Умножая первое уравнение на $\dfrac{\partial\psi^*}{\partial y}$, второе на $\dfrac{\partial\varphi^*}{\partial y}$ и вычитая из первого второе, имеем

$$AJ(\varphi^*, \psi^*) = \sqrt{AC - B^2}\Big[\Big(\frac{\partial\psi^*}{\partial y}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial\varphi^*}{\partial y}\Big)^2\Big]$$

$$\text{или} \quad J(\varphi^*, \psi^*) = \frac{\sqrt{AC - B^2}}{A}\Big[\Big(\frac{\partial\varphi^*}{\partial y}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial\psi^*}{\partial y}\Big)^2\Big].$$

Поэтому, если $J(\varphi^*, \psi^*) = 0$, то $\dfrac{\partial\psi^*}{\partial y} = \dfrac{\partial\varphi^*}{\partial y} = 0 \Rightarrow \dfrac{\partial\varphi^*}{\partial x} = \dfrac{\partial\psi^*}{\partial x} = 0 \Rightarrow$ $\operatorname{grad}\varphi = \vec{0}$, противоречие с выбором φ.

Посмотрим, чему будут равны при замене коэффициенты $\widetilde{A}$, $\widetilde{B}$ и $\widetilde{C}$. Функция φ удовлетворяет уравнению

$$A\Big(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\Big)^2 + 2B\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial y} + C\Big(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\Big)^2 = 0$$

и выделяя действительную и мнимую части, имеем

$$A\Big(\frac{\partial\varphi^*}{\partial x}\Big)^2 + 2B\frac{\partial\varphi^*}{\partial x}\frac{\partial\varphi^*}{\partial y} + C\Big(\frac{\partial\varphi^*}{\partial y}\Big)^2 - A\Big(\frac{\partial\psi^*}{\partial x}\Big)^2 - 2B\frac{\partial\psi^*}{\partial x}\frac{\partial\psi^*}{\partial y} - C\Big(\frac{\partial\psi^*}{\partial y}\Big)^2 = 0$$

$\Rightarrow \widetilde{A} = \widetilde{C}$ и

$$A\frac{\partial\varphi^*}{\partial x}\frac{\partial\psi^*}{\partial x} + B\Big(\frac{\partial\varphi^*}{\partial x}\frac{\partial\psi^*}{\partial y} + \frac{\partial\psi^*}{\partial x}\frac{\partial\varphi^*}{\partial y}\Big) + C\frac{\partial\varphi^*}{\partial y}\frac{\partial\psi^*}{\partial y} = 0$$

$\Rightarrow \widetilde{B} = 0$. Поэтому уравнение перейдет в уравнение

$$\widetilde{A}\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \widetilde{C}\frac{\partial^2 u}{\partial w^2} = F_1\Big(z, w, u, \frac{\partial u}{\partial z}, \frac{\partial u}{\partial w}\Big),$$

причём $\widetilde{A} = \widetilde{C} \neq 0$ (иначе бы уравнение стало первого порядка). Деля на $\widetilde{A} = \widetilde{C}$, имеем

$$\Delta u = F_2\Big(z, w, u, \frac{\partial u}{\partial z}, \frac{\partial u}{\partial w}\Big),$$

где

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial w^2} \text{ — оператор Лапласа по двум переменным,}$$

— канонический вид уравнения эллиптического типа.

Формула Д‘Аламбера для одномерного волнового уравнения

Рассмотрим задачу Коши для одномерного волнового уравнения

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(0, x) = \varphi(x) \text{ — начальный профиль струны} \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(0, x) = \psi(x) \text{ — начальная скорость} \end{cases}$$

Приведем уравнение к другому каноническому виду, из которого легче будет найти общее решение. Характеристический многочлен будет

$A(\xi,\xi) = \xi_0^2 - a^2\xi_1^2$. Характеристика — это такая кривая, нормаль к которой удовлетворяет характеристическому уравнению $\xi_0^2 - a^2\xi_1^2 = 0$. Если кривая представлена в виде $x = x(t)$, то нормаль к этой кривой имеет координаты $\left(-\dfrac{dx}{dt}, 1\right) \Rightarrow$ уравнения характеристик $\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2 - a^2 = 0 \Leftrightarrow$ $\dfrac{dx}{dt} = \pm a \Leftrightarrow x = \pm at + C_\pm \Rightarrow$ первые интегралы уравнений характеристик будут $x \pm at = C_\mp$. Делаем замену переменных с помощью этих первых интегралов

$$\begin{cases} \xi = x + at \\ \eta = x - at \end{cases} \text{ и } u(t,x) = \widetilde{u}(\xi,\eta) \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = a\Big(\dfrac{\partial \widetilde{u}}{\partial \xi} - \dfrac{\partial \widetilde{u}}{\partial \eta}\Big) \\ \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial \widetilde{u}}{\partial \xi} + \dfrac{\partial \widetilde{u}}{\partial \eta} \end{cases}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a\Big(\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \widetilde{u}}{\partial \xi}(x+at, x-at) - \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \widetilde{u}}{\partial \eta}(x+at, x-at)\Big) =$$
$$= a^2\Big(\frac{\partial^2 \widetilde{u}}{\partial \xi^2} - 2\frac{\partial^2 \widetilde{u}}{\partial \eta \partial \xi} + \frac{\partial^2 \widetilde{u}}{\partial \eta^2}\Big), \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \widetilde{u}}{\partial \xi^2} + 2\frac{\partial^2 \widetilde{u}}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 \widetilde{u}}{\partial \eta^2}.$$

Следовательно, уравнение перепишется

$$a^2\Big(\frac{\partial^2 \widetilde{u}}{\partial \xi^2} - 2\frac{\partial^2 \widetilde{u}}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 \widetilde{u}}{\partial \eta^2}\Big) = a^2\Big(\frac{\partial^2 \widetilde{u}}{\partial \xi^2} + 2\frac{\partial^2 \widetilde{u}}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 \widetilde{u}}{\partial \eta^2}\Big) \Leftrightarrow \frac{\partial^2 \widetilde{u}}{\partial \xi \partial \eta} = 0.$$

Покажем, что общее решение последнего уравнения имеет следующий вид $\widetilde{u}(\xi,\eta) = f(\xi) + g(\eta)$, в котором f и g — произвольные функции одного переменного, причем g — дифференцируема. Для этого предположим, что уравнение $\dfrac{\partial^2 \widetilde{u}}{\partial \xi \partial \eta} = 0$ выполняется в некоторой выпуклой области G плоскости $O\xi\eta$. Обозначим функцию $v(\xi,\eta) = \dfrac{\partial \widetilde{u}}{\partial \eta}(\xi,\eta)$, тогда уравнение перепишется $\dfrac{\partial v}{\partial \xi}(\xi,\eta) = 0$. Зафиксируем переменную $\eta = \eta_0$. Тогда функция $v(\xi,\eta_0)$ одного переменного ξ удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению $\dfrac{dv}{d\xi} = 0$, общее решение которого имеет вид $v = C$, где C — произвольная постоянная. При каждом фиксированном $\eta = \eta_0$ эта постоянная своя, поэтому получаем $\dfrac{\partial \widetilde{u}}{\partial \eta}(\xi,\eta) = C(\eta)$, где $C = C(\eta)$ — некоторая функция (в этом последнем выводе мы пользовались тем, что область G выпукла; если этого не предполагать, то функция $\dfrac{\partial \widetilde{u}}{\partial \xi}(\xi,\eta)$ может зависеть и от ξ, однако так, что на каждой связной компоненте пересечения прямой $\eta = \eta_0$ с областью G она постоянна). Фиксируя теперь $\xi = \xi_0$, получаем дифференциальное уравнение $\dfrac{d\widetilde{u}}{d\eta} = C(\eta)$, которое имеет решение не для произвольной функции $C(\eta)$. Если точная первообразная у функции $C(\eta)$ существует, то любое решение этого уравнения имеет вид $\widetilde{u}(\xi_0, \eta) = F(\eta) + D$, где $F(\eta)$ какая-то одна фиксированная (точная) первообразная функции $C(\eta)$, а D — произвольная постоянная. Так как при каждом фиксированном $\xi = \xi_0$ постоянная $D = D(\xi)$ может быть своя, то получаем общий вид решения, указанный выше. Таким образом, любое решение $\widetilde{u}(\xi, \eta)$ представляется в виде $f(\xi) + g(\eta)$, где g — дифференцируемая функция одного переменного, а f — произвольная функция в интервалах, являющихся проекциями области G на оси координат. Непосредственная проверка показывает, что и обратно, для любых функций такого вида функция $\widetilde{u}(\xi, \eta) = f(\xi) + g(\eta)$ является решением уравнения.

Для того чтобы функция $\widetilde{u}$ была дважды непрерывно дифференцируемой (что требуется, когда мы делаем замену переменных), нужно потребовать от функций f и g дважды непрерывной дифференцируемости, то-есть $u(t, x) = f(x + at) + g(x - at)$, $f, g \in C^2(\mathbb{R})$.

Теперь будем удовлетворять начальным условиям:

$$u(0, x) = f(x) + g(x) = \varphi(x) \quad \text{и} \quad u'_t(0, x) = af'(x) - ag'(x) = \psi(x)$$

или

$$\begin{cases} f(x) + g(x) = \varphi(x) \\ a(f'(x) - g'(x)) = \psi(x) \end{cases} \Rightarrow 2af'(x) = \psi(x) + a\varphi'(x) \Rightarrow f(x) =$$

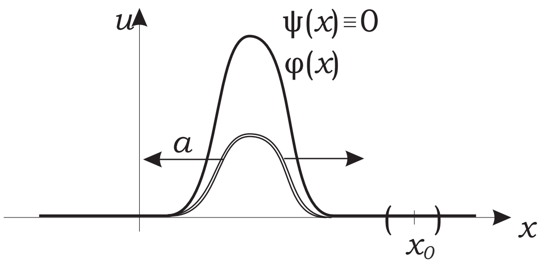
$$= \frac{1}{2a}\int\limits_0^x \psi(\xi)\,d\xi + \frac{\varphi(x)}{2} + C \Rightarrow g(x) = -\frac{1}{2a}\int\limits_0^x \psi(\xi)\,d\xi + \frac{\varphi(x)}{2} - C$$

$$\Rightarrow \boxed{u(t, x) = \frac{\varphi(x + at) + \varphi(x - at)}{2} + \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at} \psi(\xi)\,d\xi} \quad \text{Формула Д'Аламбера}$$

Чтобы функции f и g были $C^2(\mathbb{R})$, нужно $\varphi \in C^2(\mathbb{R})$, $\psi \in C^1(\mathbb{R})$.

И обратно, если φ и ψ такие, то формула Д'Аламбера удовлетворяет уравнению и начальным условиям с этими функциями φ и ψ.

Пример 1. Пусть начальный профиль струны имеет вид волны, показанной на рисунке, и нулевую начальную скорость.

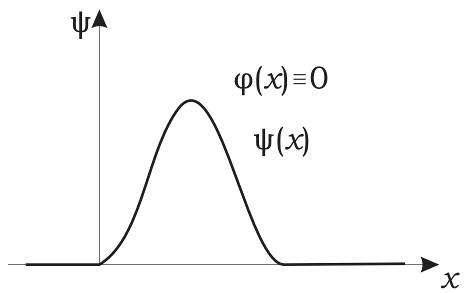


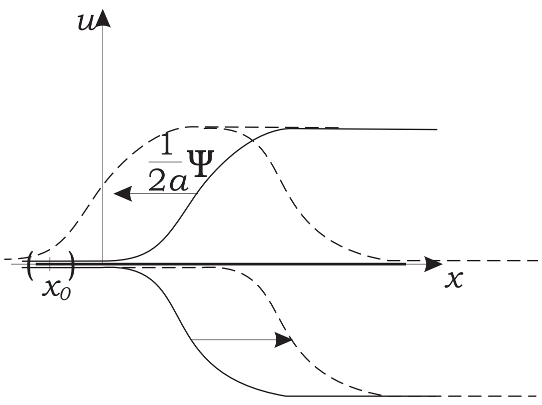
$\varphi(x+at)/2$ — побежала влево со скоростью a, $\varphi(x-at)/2$ — побежала вправо со скоростью a, результирующее положение струны получается *наложением* (*суперпозицией, интерференцией*) этих двух полуволн.

Если $\varphi(x) \equiv 0$ в некоторой окрестности x_0, то после того, как волна пройдет, решение $u(t,x)$ будет в этой окрестности опять нулевым, то-есть после прохода одиночных волн над точкой не остается "след"волн или, как говорят, нет диффузии волн.

Пример 2. Пусть теперь $\varphi(x) \equiv 0$, а ψ имеет вид, указанный на картинке ниже. Если Ψ — первообразная функции ψ, то, согласно формуле Д'Аламбера, решение запишется в виде

$$u(t,x) = \frac{1}{2a}\Big[\Psi(x+at) - \Psi(x-at)\Big].$$





Одна волна $\dfrac{1}{2a}\Psi$ побежит влево со скоростью a, вторая волна $-\dfrac{1}{2a}\Psi$ побежит вправо со скоростью a, получится горб и при $t \to +\infty$ он расширяется. После прохождения волн струна сдвинется на постоянную величину. Пунктиром показано некоторое промежуточное положение волн и результирующего профиля струны. Таким образом, если $\psi(x) \not\equiv 0$, то хотя $u(t,x)$ в начальный момент времени в некоторой окрестности x_0 вместе с $u'_t(t,x)$ была нулевая, но волна после прохода над этой точкой будет ощущаться ($u(t,x) \neq 0$) в любой сколь угодно большой момент времени. Имеет место диффузия волн.

На самом деле при некотором очень частном условии диффузия отсутствует. Это условие — финитность ψ (равенство нулю вне некоторого конечного отрезка) и

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \psi(x)\,dx = 0 \quad \text{(начальный импульс струны равен нулю).}$$

Пример Адамара

Рассмотрим задачу Коши для уравнения Лапласа

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \\ u(0,x) = 0 & \qquad n, k > 0. \\ u'_t(0,x) = \dfrac{\sin nx}{n^{k-1}} \end{cases}$$

Решение этого уравнения $u(t,x) = \dfrac{\operatorname{sh} nt \sin nx}{n^k}$. При этом

а) оба начальных условия $\to 0$ при $n \to \infty$ вместе со всеми производными до порядка $k-1$ не включительно;

б) решение $u(t,x)$ при любом $t > 0$ неограниченно при $n \to \infty$.

То-есть начальные условия (вместе со своими производными до сколь угодно большого заранее заданного порядка) малы, а решение изменяется сильно в любой сколь угодной близости от начального момента времени. Это плохо. Можно также показать, что и при любых начальных данных (при которых решение существует) малое изменение этих начальных данных может привести к большим изменениям решения уравнения. Такого быть не должно.

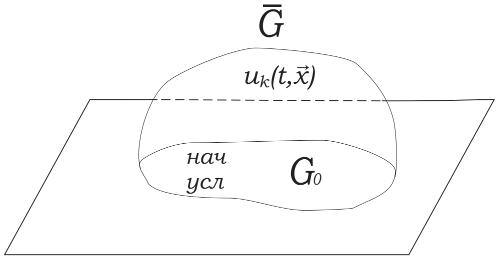
Общее определение корректности системы линейных УРЧП

Определение V.1. *Говорят, что задача Коши для системы*

$$\left\{ \frac{\partial^{n_k} u_k}{\partial t^{n_k}} = \sum_{j=1}^{N} \sum_{l_0 l_1 \ldots l_n} A_{kj}^{(l_0 l_1 \ldots l_n)} \frac{\partial^{l_0 + l_1 + \ldots + l_n} u_j}{\partial t^{l_0} \partial x_1^{l_1} \ldots \partial x_n^{l_n}} \right. \qquad \begin{array}{l} (\, l = l_0 + l_1 + \ldots + l_n \leqslant n_j, \\ \; l_0 < n_j) \end{array}$$

поставлена корректно в замкнутой области $\overline{G}$ пространства (t,x), примыкающей к области начальных данных G_0 в гиперплоскости $t = t_0$, если существуют такие числа $L_1, L_2 \in \mathbb{Z}_+$, что

1) *Для любых начальных данных, непрерывно дифференцируемых в области G_0 до порядка L_1 включительно, решение задачи Коши существует и единственно в области $\overline{G}$;*



2) *если начальные условия изменились мало вместе со своими производными до порядка L_2 включительно, то решение $u(t,x)$ изменится в области $\overline{G}$ мало.*

Таким образом, корректность $= \exists! +$ устойчивость по начальным данным. Начальные данные из опыта находятся приблизительно, поэтому малые ошибки в данных опыта не должны повлечь больших искажений решения уравнения. Только такие задачи имеют физический смысл.

Задача Коши для уравнения Лапласа, как показывает пример Адамара, поставлена некорректно.

Лекция VI

Понятие об обобщенном решении

Прошлый раз решали задачу Коши на прямой

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u\Big|_{t=0} = \varphi(x) \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \psi(x) \end{cases} \underset{\psi\in C^1}{\overset{\varphi\in C^2}{\Longrightarrow}} u(t,x) = \frac{\varphi(x+at)+\varphi(x-at)}{2} + \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)\,d\xi$$

(формула Д'Аламбера)

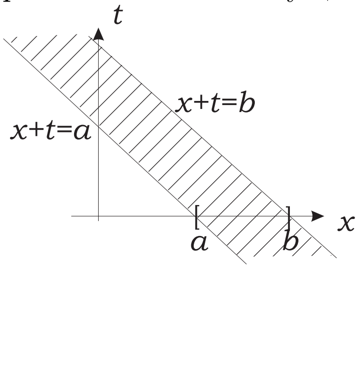
В этой формуле нет необходимости предполагать гладкость φ и ψ, можно подставлять любую непрерывную (!) φ и интегрируемую (!) ψ. Но тогда функция u может быть недифференцируемой, отсюда неясен смысл уравнения $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$. А в физических задачах данные находятся из опыта приближенно, с ошибкой, и непонятен сам смысл слова «гладкие». Поэтому важно придать этим решениям строгий смысл.

Определение VI.1. *Обобщенным решением системы УрЧП в области G называется набор функций $u_k(t,\vec{x})$, $k=1,2,\ldots,N$, являющихся равномерным пределом в области G последовательности «обычных» гладких решений $u_k^{(l)}(t,\vec{x})$ при $l\to\infty$, то-есть*

$$\lim_{l\to\infty}\sup_{(t,\vec{x})\in G}|u_k^{(l)}(t,\vec{x}) - u_k(t,\vec{x})| = 0, \quad k=1,\ldots,N.$$

Замечания потом, сейчас пример.

Пример 1. Рассмотрим «уравнение переноса» $\dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial u}{\partial x}$ с начальным условием $u\big|_{t=0} = \varphi(x) \in C^1[a,b] \Rightarrow u(t,x) = \varphi(x+t)$ — классическое решение. Решение существует в области $\overline{G} : a \leqslant x+t \leqslant b$.



Теперь предположим, что φ — любая непрерывная в $[a,b]$ функция. Тогда существует последовательность непрерывно-дифференцируемых функций $\varphi^{(l)}(x) \underset{[a,b]}{\overset{l\to\infty}{\rightrightarrows}} \varphi(x)$ (например, полиномов по аппроксимационной теореме Вейерштрасса).

Им соответствует последовательность «обычных» решений $u^{(l)}(t,x) = \varphi^{(l)}(x+t)$ в области $\overline{G}$. Тогда $u^{(l)}(t,x) \rightrightarrows \varphi(x+t) = u(t,x)$ — это и есть обобщенное решение уравнения переноса с начальным условием $u\big|_{t=0} = \varphi(x) \in C[a,b]$.

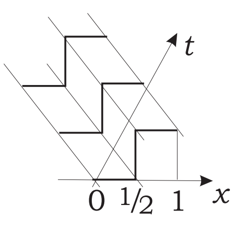
Замечания. 1. Если задача Коши поставлена корректно в области $\overline{G}$ (в смысле определения с прошлой лекции), то-есть решение $\exists!$ с непрерывно-дифференцируемыми до порядка $L_1 \in \mathbb{Z}_+$ включительно начальными функциями и непрерывно зависит от начальных данных вместе с их производными до порядка $L_2 \in \mathbb{Z}_+$ включительно, то обобщенное решение $\exists!$ с начальными данными, непрерывно-дифференцируемыми до порядка L_2 включительно.

Действительно, если $L_1 = L_2$, то доказывать нечего. Если же $L_2 < L_1$ (почему L_2 не может быть больше L_1?), то взяв для любых L_2 раз непрерывно-дифференцируемых начальных функций их приближения L_1 раз непрерывно-дифференцируемыми функциями так, чтобы приближались и все производные до порядка L_2 включительно, из определения корректности получим, что последовательность соответствующих им единственных решений в области $\overline{G}$ фундаментальна в метрике равномерной сходимости и, в силу полноты равномерной сходимости, сходится в области $\overline{G}$ равномерно к некоторому набору непрерывных функций. Этот набор и будет обобщенным решением задачи Коши. Похоже доказывается и единственность обобщенного решения в классе L_2 раз непрерывно-дифференцируемых начальных функций и классе непрерывных обобщенных решений.

2. Если уравнение эллиптического или параболического типа, то оказывается, что определенные таким образом обобщенные решения автоматически получаются гладкими, даже аналитическими, поэтому основная тяжесть определения ложится на гиперболические уравнения.

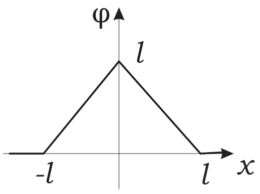
3. С. Л. Соболев рассматривал обобщенные решения и в смысле сходимости в среднем, то-есть такие, что

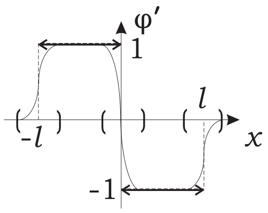
$$\lim_{l\to\infty} \int\limits_G [u_k^{(l)}(t,\vec{x}) - u_k(t,\vec{x})]^2 \, dt dx_1 \dots dx_n = 0.$$



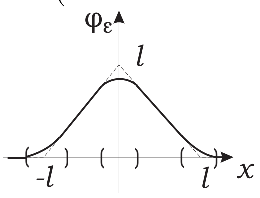
Такие решения могут оказаться разрывными. Например, уравнение переноса $\dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial u}{\partial x}$ с начальным условием $u\big|_{t=0} = \varphi(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0,1/2) \\ 1/2, & x \in [1/2,1] \end{cases}$ имеет обобщенное решение $u = \varphi(x+t)$ в области $\overline{G}_T = \{0 \leqslant t+x \leqslant 1, 0 \leqslant t \leqslant T\}$, имеющее линию разрыва $x+t = 1/2$.

Пример 2. Рассмотрим задачу Коши для волнового уравнения на прямой $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $-\infty < x < +\infty$, с начальными функциями $u\big|_{t=0} = \varphi(x) = \begin{cases} 0, & |x| > l; \\ l - |x|, & |x| \leqslant l, \end{cases}$ и $\dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} \equiv 0$. Построим обобщенное решение для такой задачи.



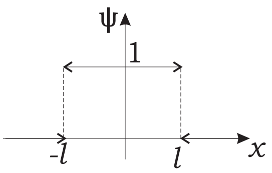


Для этого приблизим φ' C^1-функцией φ'_ε так, чтобы она отличалась (не более чем на 1) от $\varphi'(x)$ только в ε-окрестностях точек разрыва $-l$, 0, l (например, кусочно-параболическими функциями, как это показано на картинке). Тогда $\int\limits_{-\infty}^{x} |\varphi'_\varepsilon(\xi) - \varphi'(\xi)|\, d\xi \leqslant 6\varepsilon$ $\forall\, x$ (так как точек разрыва три и размер каждой окрестности 2ε).



Теперь рассмотрим $\varphi_\varepsilon(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} \varphi'_\varepsilon(\xi)\, d\xi \Rightarrow |\varphi_\varepsilon(x) - \varphi(x)| \leqslant \int\limits_{-\infty}^{x} |\varphi'_\varepsilon(\xi) - \varphi'(\xi)|\, d\xi \leqslant 6\varepsilon\ \forall\, x$. Беря $\varepsilon_l = 1/l$, получим последовательность C^2-функций $\varphi^{(l)}(x) \rightrightarrows \varphi(x)$, $l \to \infty$, а соответствующие им решения $u^{(l)}(t,x) = \dfrac{\varphi^{(l)}(x+at) + \varphi^{(l)}(x-at)}{2} \rightrightarrows \dfrac{\varphi(x+at) + \varphi(x-at)}{2} = u(t,x)$, так что формула Д'Аламбера дает обобщенное решение нашей задачи.

Аналогично можно рассмотреть случай $\varphi(x) \equiv 0$ и $\psi(x) =$



при этом требуется доказывать малость не $\psi^{(l)}(x) - \psi(x)$, а $\int\limits_{-\infty}^{x} \psi^{(l)}(\xi)\, d\xi - \int\limits_{-\infty}^{x} \psi(\xi)\, d\xi$ — разности первообразных (проверьте!). Доказательство то же.

Полуограниченная струна. Типы краевых условий

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad x \geqslant 0 \\ u\big|_{t=0} = \varphi(x) \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \psi(x) \end{cases}$$

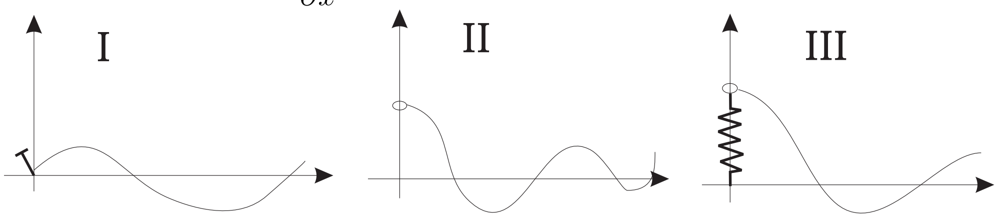
Продолжим φ и ψ произвольным образом в область $x < 0$ (с сохранением гладкости) $\Rightarrow$ по формуле Д'Аламбера получаем решение. Но решение сильно неединственно — выбор продолжений достаточно произволен. Чтобы выделить единственное решение, надо наложить на u какие-то дополнительные условия. Обычно условия накладываются на край $x = 0$. Все они имеют физический смысл. Типы краевых условий:

I $u\big|_{x=0} = 0$ (1^e краевое условие) — «закрепленный конец»;

II $u_x\big|_{x=0} = 0$ (2^e краевое условие) — «свободный конец»;

III $u_x - \alpha u\big|_{x=0} = 0$ (3^e краевое или смешанное условие) — «упруго-закрепленный конец»;

здесь u_x обозначает $\dfrac{\partial u}{\partial x}$, α — постоянное число, обычно положительное.



Решение этих задач. I $u\big|_{x=0} = 0$ — продолжим φ и ψ нечетным образом в $x < 0$:

$$\widetilde{\varphi}(x) = -\varphi(-x), \text{ если } x < 0, \text{ и } \widetilde{\psi}(x) = -\psi(-x),$$

при этом предполагаем $\varphi \in C^2(\mathbb{R}_+) = C^2[0, +\infty)$, $\psi \in C^1(\mathbb{R}_+)$, и $\varphi(0) = \varphi''(0) = \psi(0) = 0$.

Покажем, что продолженные функции $\widetilde{\varphi}$ и $\widetilde{\psi}$ также будут классов $C^2(\mathbb{R})$ и $C^1(\mathbb{R})$, соответственно.

а) $\widetilde{\varphi}(x) = -\varphi(-x) \to -\varphi(0) = 0 = \widetilde{\varphi}(0)$ при $x \to 0- \Rightarrow \widetilde{\varphi} \in C(\mathbb{R})$;
$(\widetilde{\varphi}(x))' = (-\varphi(-x))' = \varphi'(-x)$ при $x < 0 \Rightarrow \lim\limits_{x \to 0-} \widetilde{\varphi}'(x) = \varphi'(0) = \widetilde{\varphi}'_+(0) \Rightarrow \widetilde{\varphi} \in C^1(\mathbb{R})$;
$(\widetilde{\varphi}(x))'' = -\varphi''(-x) \xrightarrow[x \to 0-]{} -\varphi''(0) = 0 = \widetilde{\varphi}''_+(0) \Rightarrow \widetilde{\varphi} \in C^2(\mathbb{R})$;

б) $\widetilde{\psi}(x) = -\psi(-x) \xrightarrow[x \to 0-]{} -\psi(0) = 0 = \psi(0) \Rightarrow \psi \in C(\mathbb{R})$; $\widetilde{\psi}'(x) = (-\psi(-x))' = \psi'(-x) \xrightarrow[x \to 0-]{} \psi'(0) = \widetilde{\psi}'_+(0) \Rightarrow \psi \in C^1(\mathbb{R})$.

Тогда

$$\widetilde{u}(t,x) = \frac{\widetilde{\varphi}(x+at) + \widetilde{\varphi}(x-at)}{2} + \frac{1}{2a} \int\limits_{x-at}^{x+at} \widetilde{\psi}(\xi)\, d\xi$$

— решение волнового уравнения.

Очевидно, что выполняются начальные условия

$$\begin{cases} \widetilde{u}\Big|_{t=0} = \varphi(x), \quad\quad x \geqslant 0, \text{ так как } \widetilde{\varphi}(x) = \varphi(x) \text{ для } x \geqslant 0, \\ \dfrac{\partial \widetilde{u}}{\partial t}\Big|_{t=0} = \psi(x), \quad x \geqslant 0, \text{ так как } \widetilde{\psi}(x) = \psi(x) \text{ для } x \geqslant 0. \end{cases}$$

Проверим краевое условие

$$\widetilde{u}\Big|_{x=0} = \frac{\widetilde{\varphi}(at) + \widetilde{\varphi}(-at)}{2} + \frac{1}{2a}\int\limits_{-at}^{at} \widetilde{\psi}(\xi)\,d\xi =$$

$$= \frac{\widetilde{\varphi}(at) - \widetilde{\varphi}(at)}{2} + \frac{1}{2a}\int\limits_{-at}^{at} \widetilde{\psi}(\xi)\,d\xi = 0,$$

так как интеграл от нечетной функции по симметричному промежутку равен нулю. Этим доказательство существования решения первой краевой задачи для полуограниченной струны заканчивается.

II $u_x\Big|_{x=0} = 0$. Продолжим φ и ψ в область $x < 0$ четным образом, то-есть $\widetilde{\varphi}(x) = \varphi(-x)$ и $\widetilde{\psi}(x) = \psi(-x)$, $x < 0$. Предположим, что $\varphi \in C^2(\mathbb{R}_+)$, $\psi \in C^1(\mathbb{R}_+)$ и $\varphi'(0) = 0$, $\psi'(0) = 0$. Проверим, что $\widetilde{\varphi} \in C^2(\mathbb{R})$ и $\widetilde{\psi} \in C^1(\mathbb{R})$.

а) $\lim\limits_{x\to 0-} \widetilde{\varphi}(x) = \lim\limits_{x\to 0-} \varphi(-x) = \varphi(0) = \widetilde{\varphi}(0) \Rightarrow \widetilde{\varphi} \in C(\mathbb{R})$;
$\widetilde{\varphi}'(x) = (\varphi(-x))' = -\varphi'(-x) \xrightarrow[x\to 0-]{} -\varphi'(0) = 0 = \widetilde{\varphi}'_+(0) \Rightarrow \widetilde{\varphi} \in C^1(\mathbb{R})$;
$\widetilde{\varphi}''(x) = (\varphi(-x))'' = \varphi''(-x) \xrightarrow[x\to 0-]{} \varphi''(0) = \widetilde{\varphi}''_+(0) \Rightarrow \widetilde{\varphi} \in C^2(\mathbb{R})$;

б) $\widetilde{\psi}(x) = \psi(-x) \xrightarrow[x\to 0-]{} \psi(0) = \widetilde{\psi}(0) \Rightarrow \widetilde{\psi} \in C(\mathbb{R})$;
$\widetilde{\psi}'(x) = (\psi(-x))' = -\psi'(-x) \xrightarrow[x\to 0-]{} -\psi'(0) = 0 = \widetilde{\psi}'_+(0) \Rightarrow \widetilde{\psi} \in C^1(\mathbb{R})$.

Тогда

$$\widetilde{u}(t,x) = \frac{\widetilde{\varphi}(x+at) + \widetilde{\varphi}(x-at)}{2} + \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at} \widetilde{\psi}(\xi)\,\xi$$

— решение волнового уравнения. Очевидно, начальные условия выполняются, так как $\widetilde{\varphi}(x) = \varphi(x)$ и $\widetilde{\psi}(x) = \psi(x)$ для $x \geqslant 0$. Проверим краевое условие. Действительно,

$$\frac{\partial \widetilde{u}}{\partial x}\Big|_{x=0} = \frac{\widetilde{\varphi}'(at) + \widetilde{\varphi}'(-at)}{2} + \frac{1}{2}\big[\widetilde{\psi}(at) - \widetilde{\psi}(-at)\big] = 0,$$

так как $\widetilde{\varphi}'$ — нечетная (как производная четной), а $\widetilde{\psi}$ — четная функции.

III $u_x - \alpha u\big|_{x=0} = 0$. Решение аналитическим методом. Так как область $x > 0$, $t > 0$ — выпуклая, то $u = f(x + at) + g(x - at)$; считаем $a > 0$, $t > 0$. При $t = 0$ имеем

$$\begin{cases} f(x) + g(x) = \varphi(x) \\ a(f'(x) - g'(x)) = \psi(x) \end{cases} \overset{x \geqslant 0}{\Longrightarrow} f(x), g(x) \text{ при } x \geqslant 0.$$

Чтобы найти $g(x)$ при $x < 0$, напишем краевое условие:

$$\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=0} = f'(at) + g'(-at) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u_x - \alpha u\big|_{x=0} = f'(at) + g'(-at) - \alpha f(at) - \alpha g(-at) = 0 \Leftrightarrow$$

$$g'(-at) - \alpha g(-at) = \underbrace{\alpha f(at) - f'(at)}_{\text{известная функция}}$$

и после замены $-at = \eta$, $\eta < 0$, имеем $g'(\eta) - \alpha g(\eta) = \alpha f(-\eta) - f'(-\eta)$ — дифференциальное уравнение для нахождения функции g при отрицательных значениях аргумента. Начальное условие $g(0)$ — известно, так как $g(\eta)$ при $\eta \geqslant 0$ известно. Решая, находим $g(\eta) \Rightarrow$ ответ

$$u(t, x) = \begin{cases} f(x + at) + g(x - at) & \text{при} \quad x < at, \\ f(x + at) + g(x - at) & \text{при} \quad x \geqslant at. \end{cases}$$

Заметим, что вторая часть ответа (при $x \geqslant at$) находится по формуле Д'Аламбера, в то время как первая (при $x < at$) дается формулой, отличной от формулы Д'Аламбера.

Лекция VII

Ограниченная струна

Постановка краевых задач

Ищется $u(t,x)$, непрерывно-дифференцируемая на замкнутом прямоугольнике $\overline{Ц}_T = [0,T] \times [0,l]$ $(T > 0,\ l > 0)$, дважды непрерывно-дифференцируемая в $Ц_T = (0,T) \times (0,l)$ и удовлетворяющая в $Ц_T$ уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{VII.1}$$

а на границе удовлетворяющая а) начальным условиям $u(0,x) = \varphi_0(x)$, $\dfrac{\partial u}{\partial t}(0,x) = \varphi_1(x)$, $0 \leqslant x \leqslant l$; б) краевым условиям одного из следующих трех типов

I $u(t,0) = u(t,l) = 0$;

II $\dfrac{\partial u}{\partial x}(t,0) = \dfrac{\partial u}{\partial x}(t,l) = 0$;

III $\left.\dfrac{\partial u}{\partial x} + \sigma_0 u\right|_{x=0} = \left.\dfrac{\partial u}{\partial x} + \sigma_1 u\right|_{x=l} = 0$, $\sigma_0 \leqslant 0$, $\sigma_1 \geqslant 0$.

В соответствии с этим краевая задача называется I, II или III типа, а вся задача (вместе с уравнением, начальными условиями и одним из краевых условий) называется смешанной задачей для волнового уравнения на отрезке.

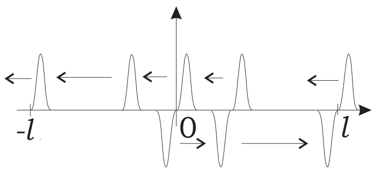
Корректность I краевой задачи

Теорема 1 (существование). *Если $\varphi_0 \in C^2[0,l]$, $\varphi_0(0) = \varphi_0(l) = 0$, $\varphi_0''(0) = \varphi_0''(l) = 0$, и $\varphi_1 \in C^1[0,l]$, $\varphi_1(0) = \varphi_1(l) = 0$, то I краевая задача для уравнения движения струны на $[0,l]$ имеет хотя бы одно решение.*

Доказательство. Область $Ц_T$, где ищется решение — выпукла $\Rightarrow$ решение имеет вид $f(x+at)+g(x-at)$. При $t=0$ имеем $f(x)+g(x)=\varphi_0(x)$ и $af'(x)-ag'(x)=\varphi_1(x)$, $0\leqslant x\leqslant l \Rightarrow$

$$\left.\begin{aligned} f(x)&=\frac{\varphi_0(x)}{2}+\frac{1}{2a}\int\limits_0^x\varphi_1(\xi)\,d\xi\\ g(x)&=\frac{\varphi_0(x)}{2}-\frac{1}{2a}\int\limits_0^x\varphi_1(\xi)\,d\xi\end{aligned}\right\} 0\leqslant x\leqslant l,$$

то-есть $f(x)$ и $g(x)$ при $0\leqslant x\leqslant l$ уже определены. Вопрос только заключается в том, чтобы найти $f(x)$ и $g(x)$ при $x\notin[0,l]$, так как при больших t $x+at$ и $x-at$ могут выйти за пределы $[0,l]$.



Из наглядных соображений продолжим $\varphi_0(x)$ и $\varphi_1(x)$ на $[-l,l]$ нечетным способом и на $\mathbb{R}$ $2l$-периодически. Покажем, что такие продолжения $\widetilde{\varphi}_0$ и $\widetilde{\varphi}_1$ (при наших условиях на φ_0 и φ_1) — «хорошие».

Действительно, так как $\varphi_0(0)=\varphi_0(l)=0$ и $\varphi_0\in C[0,l]\Rightarrow\widetilde{\varphi}_0\in C(\mathbb{R})$. Далее, $\widetilde{\varphi}_0'$ — четная и $2l$-периодическая при $x\neq kl$, $k\in\mathbb{Z}$ ($\Rightarrow$ симметричная и относительно прямых $x=kl$)и $\varphi_0\in C^1[0,l]$, поэтому у $\widetilde{\varphi}_0$ в точках $x=kl$ не может быть изломов $\Rightarrow\widetilde{\varphi}_0\in C^1(\mathbb{R})$. Наконец, $\widetilde{\varphi}_0''$ — нечетная $2l$-периодическая при $x\neq kl$ и $\varphi_0\in C^2[0,l]$ и $\varphi_0''(0)=\varphi_0''(l)=0$ $\Rightarrow\widetilde{\varphi}_0\in C^2(\mathbb{R})$.

Теперь разберемся с $\dfrac{1}{2a}\displaystyle\int\limits_0^x\widetilde{\varphi}_1(\xi)\,d\xi$. Так как $\widetilde{\varphi}_1(\xi)$ — нечетная и $2l$-периодическая, то $\dfrac{1}{2a}\displaystyle\int\limits_0^x\widetilde{\varphi}_1(\xi)\,d\xi$ — четная и $2l$-периодическая, и так как $\left(\dfrac{1}{2a}\displaystyle\int\limits_0^x\widetilde{\varphi}_1(\xi)\,d\xi\right)'=\dfrac{1}{2a}\widetilde{\varphi}_1(x)$ и $\varphi_1\in C[0,l]$, $\varphi_1(0)=\varphi_1(l)=0\Rightarrow$ $\dfrac{1}{2a}\displaystyle\int\limits_0^x\widetilde{\varphi}_1(\xi)\,d\xi\in C^1(\mathbb{R})$. Далее, так как $\left(\dfrac{1}{2a}\displaystyle\int\limits_0^x\widetilde{\varphi}_1(\xi)\,d\xi\right)''=\dfrac{1}{2a}\widetilde{\varphi}_1'(x)$ — четная и $2l$-периодическая при $x\neq kl$ (а, значит, симметричная относительно прямых $x=kl$, $k\in\mathbb{Z}$) и $\varphi_1\in C^1[0,l]$, то $\dfrac{1}{2a}\displaystyle\int\limits_0^x\widetilde{\varphi}_1(\xi)\,d\xi\in C^2(\mathbb{R})$.

Итак, проверено, что функции $\widetilde{\varphi}_0$ и $\dfrac{1}{2a}\displaystyle\int\limits_0^x\widetilde{\varphi}_1(\xi)\,d\xi$ класса $C^2(\mathbb{R})$, поэтому определим функции $f(x)$ и $g(x)$ при $x \notin [0,l]$ по формулам

$$f(x) = \frac{\widetilde{\varphi}_0(x)}{2} + \frac{1}{2a}\int\limits_0^x \widetilde{\varphi}_1(\xi)\,d\xi, \quad g(x) = \frac{\widetilde{\varphi}_0(x)}{2} - \frac{1}{2a}\int\limits_0^x \widetilde{\varphi}_1(\xi)\,d\xi.$$

Тогда функция $\widetilde{u}(t,x) = f(x+at) + g(x-at)$, то-есть

$$\widetilde{u}(t,x) = \frac{\widetilde{\varphi}_0(x+at) + \widetilde{\varphi}_0(x-at)}{2} + \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at} \widetilde{\varphi}_1(\xi)\,d\xi,$$

является решением уравнения движения струны (для всех x). Проверим выполнение начальных и краевых условий для сужения $u(t,x) = \widetilde{u}(t,x) \restriction_{\substack{0\leqslant t\leqslant T\\ 0\leqslant x\leqslant l}}$.

Очевидно, начальные условия на отрезке $[0,l]$ выполнены, так как $\widetilde{\varphi}_0(x) = \varphi_0(x)$, $\widetilde{\varphi}_1(x) = \varphi_1(x)$, $0 \leqslant x \leqslant l$. Проверим выполнение краевых условий.

При $x = 0$ имеем

$$u(t,0) = \frac{\widetilde{\varphi}_0(at) + \widetilde{\varphi}_0(-at)}{2} + \frac{1}{2a}\int\limits_{-at}^{at} \widetilde{\varphi}_1(\xi)\,d\xi = 0$$

в силу нечетности $\widetilde{\varphi}_0$ и $\widetilde{\varphi}_1$. При $x = l$, в силу $2l$-периодичности и нечетности функции $\widetilde{\varphi}_0$ и $2l$-периодичности и четности функции $\frac{1}{2a}\int\limits_0^x \widetilde{\varphi}_1(\xi)\,d\xi$, имеем

$$u(t,l) = \frac{\widetilde{\varphi}_0(l+at) + \widetilde{\varphi}_0(l-at)}{2} + \frac{1}{2a}\int\limits_{l-at}^{l+at} \widetilde{\varphi}_1(\xi)\,d\xi =$$

$$= \frac{\widetilde{\varphi}_0(l+at) + \widetilde{\varphi}_0(-l-at)}{2} + \frac{1}{2a}\int\limits_0^{l+at} \widetilde{\varphi}_1(\xi)\,d\xi -$$

$$- \frac{1}{2a}\int\limits_0^{l-at} \widetilde{\varphi}_1(\xi)\,d\xi = \frac{1}{2a}\int\limits_0^{l+at} \widetilde{\varphi}_1(\xi)\,d\xi - \frac{1}{2a}\int\limits_0^{-l-at} \widetilde{\varphi}_1(\xi)\,d\xi = 0,$$

что и требовалось доказать. □

Теорема 2 (единственность). *Решений I краевой задачи для волнового уравнения на $[0,l]$ в классе $C^1(\overline{\text{Ц}}_T) \cap C^2(\text{Ц}_T)$ не может быть два.*

Доказательство. Пусть $u_1(t,x)$ и $u_2(t,x)$ — два решения уравнения (VII.1) в области $Ц_T$, причем $u_1, u_2 \in C^1(\overline{Ц}_T) \cap C^2(Ц_T)$ и $u_{1,2}\big|_{t=0} = \varphi_0(x)$, $0 \leqslant x \leqslant l$, $\dfrac{\partial u_{1,2}}{\partial t}\Big|_{t=0} = \varphi_1(x)$, $0 \leqslant x \leqslant l$, $u_{1,2}\big|_{x=0} = u_{1,2}\big|_{x=l} = 0$. Рассмотрим — тоже решение , но с нулевыми начальными условиями (краевые условия сохранятся). Рассмотрим интеграл (вообще говоря, несобственный, в этом случае исчерпания области нужно брать прямоугольные)

$$\iint\limits_{Ц_\tau} \frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\,dt\,dx = \int\limits_0^l \frac{1}{2}\int\limits_0^\tau \frac{\partial}{\partial t}\Big(\frac{\partial u}{\partial t}\Big)^2 dt\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^l \Big[\Big(\frac{\partial u}{\partial t}\Big)^2\Big|_{t=\tau} - \underbrace{\Big(\frac{\partial u}{\partial t}\Big)^2\Big|_{t=0}}_{\substack{\text{равно нулю}\\ \text{в силу вто-}\\ \text{рого началь-}\\ \text{ного условия}}}\Big]\,dx = \frac{1}{2}\int\limits_0^l \Big(\frac{\partial u}{\partial t}\Big)^2\Big|_{t=\tau} dx,$$

где $0 < \tau \leqslant T$. Далее

$$\iint\limits_{Ц_\tau} \frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,dt\,dx = \int\limits_0^\tau \int\limits_0^l \frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\partial u}{\partial x}\Big)\,dx\,dt = \left|\begin{matrix}\text{проинтегрируем}\\ \text{по частям по } x\end{matrix}\right| =$$

$$= \int\limits_0^\tau \Big[\underbrace{\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=l}}_{0,\ \text{так как } u|_{x=l}=0} - \overbrace{\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=0}}^{0,\ \text{так как } u|_{x=0}=0} - \int\limits_0^l \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}\frac{\partial u}{\partial x}dx\Big]dt = -\int\limits_0^l \frac{1}{2}\int\limits_0^\tau \frac{\partial}{\partial t}\Big(\frac{\partial u}{\partial x}\Big)^2 dtdx =$$

$$= -\frac{1}{2}\int\limits_0^l \Big[\Big(\frac{\partial u}{\partial x}\Big)^2\Big|_{t=\tau} - \underbrace{\Big(\frac{\partial u}{\partial x}\Big)^2\Big|_{t=0}}_{0,\ \text{в силу первого начального условия}}\Big]\,dx = -\frac{1}{2}\int\limits_0^l \Big(\frac{\partial u}{\partial x}\Big)^2\Big|_{t=\tau} dx.$$

Следовательно,

$$0 = \iint\limits_{Ц_\tau} \frac{\partial u}{\partial t}\Big(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Big)\,dt\,dx = \underbrace{\int\limits_0^l \frac{1}{2}\Big[\Big(\frac{\partial u}{\partial t}\Big)^2 + a^2\Big(\frac{\partial u}{\partial x}\Big)^2\Big]\Big|_{t=\tau} dx}_{\text{(интеграл энергии)}}$$

$\Rightarrow \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial u}{\partial x} = 0$ $\forall 0 \leqslant x \leqslant l$ и $\forall 0 < t = \tau \leqslant T \Rightarrow u(t,x) = \text{const}$ в $Ц_T$ и $\text{const} = 0$ в силу краевых (или начальных) условий $\Rightarrow u_1(t,x) \equiv u_2(t,x)$ $\square$

Теорема 3 (непрерывная зависимость). *Если* $u_1(t,x)$ *и* $u_2(t,x)$ — *решения уравнения* (VII.1) *с начальными условиями*

$$u_1(0,x) = \varphi_0^{(1)}(x), \quad \frac{\partial u_1}{\partial t}(0,x) = \varphi_1^{(1)}(x),$$
$$u_2(0,x) = \varphi_0^{(2)}(x), \quad \frac{\partial u_2}{\partial t}(0,x) = \varphi_1^{(2)}(x),$$

и краевыми условиями $u_{1,2}\big|_{x=0} = u_{1,2}\big|_{x=l} = 0$, *то* $\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0 \mid |(\varphi_0^{(1)}(x))' - (\varphi_0^{(2)}(x))'| < \delta$, $|\varphi_1^{(1)}(x) - \varphi_1^{(2)}(x)| < \delta$ *при* $0 \leqslant x \leqslant l \Rightarrow |u_1(t,x) - u_2(t,x)| < \varepsilon$ *в* $\overline{Ц}_T$.

Доказательство. Аналогично доказательству единственности обозначим $u(t,x) = u_1(t,x) - u_2(t,x) \Rightarrow$ (закон сохранения энергии)

$$\frac{1}{2}\int_0^l \Big[\Big(\frac{\partial u}{\partial t}\Big)^2 + a^2\Big(\frac{\partial u}{\partial x}\Big)^2\Big]\Big|_{t=\tau} dx = \frac{1}{2}\int_0^l \Big[\Big(\frac{\partial u}{\partial t}\Big)^2 + a^2\Big(\frac{\partial u}{\partial x}\Big)^2\Big]\Big|_{t=0} dx, 0 < \tau \leqslant T,$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\int_0^l a^2\Big(\frac{\partial u}{\partial x}\Big)^2\Big|_{t=\tau} dx < \frac{1}{2} l(\delta^2 + a^2\delta^2) \Rightarrow$$

$$|u(\tau,x) - u(\tau,0)| = \Big|\int_0^l 1\frac{\partial u}{\partial x}(\tau,\xi)\,d\xi\Big| \leqslant \Big|\text{нер-во Коши–Буняковского}\Big| \leqslant$$
$$\leqslant \sqrt{l}\sqrt{\int_0^l \Big(\frac{\partial u}{\partial x}\Big)^2\Big|_{t=\tau} dx} < \sqrt{l}\frac{\sqrt{l}\delta\sqrt{1+a^2}}{a} = \frac{l\delta\sqrt{1+a^2}}{a}$$

$\Rightarrow$ если $\delta = \dfrac{\varepsilon a}{l\sqrt{1+a^2}}$, то $|u(t,x)| < \varepsilon\ \forall 0 < t = \tau \leqslant T$, $\forall 0 \leqslant x \leqslant l$. □

Следствие (всех трех теорем). *I краевая задача для волнового уравнения на* $[0,l]$ *поставлена корректно в классе начальных функций* $\varphi_0 \in C^2[0,l]$, $\varphi_0(0) = \varphi_0(l) = \varphi_0''(0) = \varphi_0''(l) = 0$, *и* $\varphi_1 \in C^1[0,l]$, $\varphi_1(0) = \varphi_1(l) = 0$, *причем устойчивость имеет место по* φ_0 *в* C^1*-норме и по* φ_1 *в норме* C *(в определении корректности* $L_1 = 2 +$ *некоторое дополнительное условие* ($\varphi_0'' = 0$) *на концах и* $L_2 = 1$ *по* φ_0, *и* $L_1 = 1$, $L_2 = 0$ *по* φ_1*).*

Лекция VIII

Формула для решения волнового уравнения в пространстве

Пусть φ — непрерывная функция в области $G_0 \subseteq \mathbb{R}^3$. Рассмотрим

$$u(t, x_1, x_2, x_3) = u(t, \vec{x}) = \frac{1}{4\pi t} \iint\limits_{S_t(\vec{x})} \varphi(\vec{y})\, dS_t(\vec{y}),$$

где $S_t(\vec{x}) = \{|\vec{y} - \vec{x}| = t\}$ — сфера радиуса $t > 0$ с центром в $\vec{x}$, $dS_t(\vec{y})$ — элемент площади на $S_t(\vec{x})$; u определена в области расширенного пространства $G = \{(t, \vec{x}) \in \mathbb{R}^4 \mid K_t(\vec{x}) \subset G_0\}$, где $K_t(\vec{x}) = \{|\vec{y} - \vec{x}| \leqslant t\}$ — замкнутый шар с центром в $\vec{x}$ радиуса $t > 0$.

Докажем, что u удовлетворяет волновому уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} \quad \text{в } G.$$

Для этого преобразуем $u(t, \vec{x})$ к виду интеграла по неподвижной сфере:

$$u(t, \vec{x}) = \left| \begin{array}{l} \vec{y} = \vec{x} + t\vec{\xi} \\ \vec{\xi} \in S_1(\vec{0}) \\ dS_t(\vec{y}) = t^2 dS_1(\vec{\xi}) \end{array} \right| = \frac{t}{4\pi} \iint\limits_{S_1(\vec{0})} \varphi(\vec{x} + t\vec{\xi})\, dS_1(\vec{\xi})$$

Так как $\varphi(\vec{x} + t\vec{\xi}) = \varphi(x_1 + t\xi_1, x_2 + t\xi_2, x_3 + t\xi_3)$, то

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t, \vec{x}) = \frac{1}{4\pi} \iint\limits_{S_1(\vec{0})} \varphi(\vec{x} + t\vec{\xi})\, dS_1(\vec{\xi}) + \frac{t}{4\pi} \iint\limits_{S_1(\vec{0})} \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial \varphi}{\partial y_k}(\vec{x} + t\vec{\xi}) \xi_k\, dS_1(\vec{\xi}) =$$

$$= \frac{u(t, \vec{x})}{t} + \frac{1}{4\pi t} \iint\limits_{S_t(\vec{x})} (\operatorname{grad} \varphi(\vec{y}), \vec{n}) dS_t(\vec{y}) = \frac{u(t, \vec{x})}{t} + \frac{1}{4\pi t} \iiint\limits_{K_t(\vec{x})} \Delta\varphi dy_1 dy_2 dy_3,$$

где мы заметили, что ξ_k — это координаты единичной нормали к $S_1(\vec{0})$ в точке $\vec{\xi}$, $\vec{n}$ обозначили единичную нормаль к сфере $S_t(\vec{x})$ в точке $\vec{y}$ и воспользовались формулой Гаусса–Остроградского, в которой $\Delta\varphi$ обозначен оператор Лапласа $\Delta\varphi = \sum\limits_{k=1}^{3} \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial y_k^2}$ от трех переменных. Все рассуждения справедливы при условии $\varphi \in C^2(G_0)$. Чтобы удобнее было дифференцировать по t еще один раз, перейдем к сферическим координатам по формулам $y_1 = x_1 + r\cos\varphi\cos\psi$, $y_2 = x_2 + r\sin\varphi\cos\psi$, $y_3 = x_3 + r\sin\psi$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,\vec{x}) = \frac{1}{t}u(t,\vec{x}) + \frac{1}{4\pi t}\int\limits_0^t\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \Delta\varphi(y_1,y_2,y_3)r^2\cos\psi\,d\psi d\varphi dr.$$

Тогда

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\frac{1}{t^2}u(t,\vec{x}) + \frac{1}{t}\Big(\frac{1}{t}u(t,\vec{x}) + \frac{1}{4\pi t}\iint\limits_{S_t(\vec{x})}(\operatorname{grad}\varphi,\vec{n})\,dS_t(\vec{y})\Big) -$$
$$- \frac{1}{4\pi t^2}\iint\limits_{S_t(\vec{x})}(\operatorname{grad}\varphi,\vec{n})\,dS_t(\vec{y}) + \frac{1}{4\pi t}t^2\iint\limits_{S_1(\vec{0})}\Delta\varphi(\vec{x}+t\vec{\xi})\,dS_1(\vec{\xi}) =$$
$$= \frac{1}{4\pi t}\iint\limits_{S_t(\vec{x})}\Delta\varphi(\vec{y})\,dS_t(\vec{y}),$$

где мы преобразовали объемный интеграл опять к поверхностному (по той же формуле Гаусса–Остроградского), а также заметили (после дифференцирования по верхнему пределу), что $\cos\psi\,d\psi d\varphi = dS_1(\vec{\xi})$.

Далее

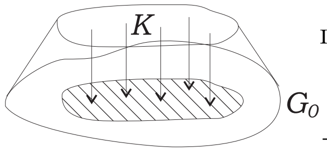
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}(t,\vec{x}) = \frac{t}{4\pi}\iint\limits_{S_1(\vec{0})}\frac{\partial^2\varphi}{\partial y_1^2}(\vec{x}+t\vec{\xi})\,dS_1(\vec{\xi}) = \frac{1}{4\pi t}\iint\limits_{S_t(\vec{x})}\frac{\partial^2\varphi}{\partial y_1^2}(\vec{y})\,dS_t(\vec{y})$$

$$\Rightarrow \Delta u = \frac{1}{4\pi t}\iint\limits_{S_t(\vec{x})}\Delta\varphi(\vec{y})\,dS_t(\vec{y}).$$

Сравнивая $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ и Δu, получаем волновое уравнение.

Теперь проверим начальные условия при $t \to 0+$.

Рассмотрим компакт $K \subset G_0$ и обозначим $U_t(K)$ — t-окрестность компакта $K \Rightarrow \max\limits_{\vec{x}\in K}|u(t,\vec{x})| \leqslant \max\limits_{\vec{y}\in U_t(K)}|\varphi|\dfrac{1}{4\pi t}4\pi t^2 = t\max\limits_{\vec{y}\in U_t(K)}|\varphi| \to 0$ при $t \to 0+ \Rightarrow$ доопределив $u(t,\vec{x})$ при $t=0$ как 0, получаем, что продолженная функция (в силу равномерной сходимости на компактах) непрерывна в G и на нижней границе $t=0$, $\vec{x}\in G_0$. Значит, $u\big|_{t=0} = 0$, $\vec{x}\in G_0$.



Теперь $\dfrac{\partial u}{\partial t}$ при $t \to 0+$. Опять рассматриваем компакт $K \subset G_0 \Rightarrow \dfrac{\partial u}{\partial t}(t,\vec{x}) = \dfrac{1}{4\pi t^2}\iint\limits_{S_t(\vec{x})} \varphi(\vec{y})\, dS_t(\vec{y}) + \dfrac{1}{4\pi t}\iint\limits_{S_t(\vec{x})} (\operatorname{grad}\varphi, \vec{n})\, dS_t(\vec{y})$. Второе слагаемое

$$\left|\frac{1}{4\pi t}\iint\limits_{S_t(\vec{x})} (\operatorname{grad}\varphi, \vec{n})\, dS_t(\vec{y})\right| \leqslant \max_{\vec{y}\in U_t(K)} |\operatorname{grad}\varphi| \frac{1}{4\pi t} 4\pi t^2 =$$

$$= t \max_{\vec{y}\in U_t(K)} |\operatorname{grad}\varphi| \to 0 \ \text{ при } \ t \to 0+ \quad \Rightarrow \quad \underset{K}{\rightrightarrows} 0.$$

Первое слагаемое

$$\left|\frac{1}{4\pi t^2}\iint\limits_{S_t(\vec{x})} \varphi(\vec{y})\, dS_t(\vec{y}) - \varphi(\vec{x})\right| = \left|\frac{1}{4\pi t^2}\iint\limits_{S_t(\vec{x})} [\varphi(\vec{y}) - \varphi(\vec{x})]\, dS_t(\vec{y})\right|.$$

Так как φ равномерно непрерывна на $\overline{U}_{t_0}(K)$, $0 < t_0 < \rho(K, \partial G_0) \Rightarrow \forall\,\varepsilon > 0\ \exists\,\delta > 0 \mid |\varphi(\vec{y}) - \varphi(\vec{x})| < \varepsilon$, если $\vec{x}, \vec{y} \in \overline{U}_{t_0}(K)$ и $|\vec{x} - \vec{y}| < \delta$. Поэтому если $0 < t < \delta$ (и $t \leqslant t_0$) $\Rightarrow$

$$\left|\frac{1}{4\pi t^2}\iint\limits_{S_t(\vec{x})} \varphi(\vec{y})\, dS_t(\vec{y}) - \varphi(\vec{x})\right| \leqslant \frac{1}{4\pi t^2}\,\varepsilon\, 4\pi t^2 = \varepsilon$$

при $\vec{x} \in K$, $0 < t < \min(\delta, t_0) \Rightarrow \underset{K}{\rightrightarrows} \varphi(\vec{x})$ при $t \to 0+$.

Поэтому если доопределить $\dfrac{\partial u}{\partial t}$ при $t = 0$ как $\varphi(\vec{x})$, то (в силу равномерной сходимости и теоремы о пределе производной) доопределенная функция будет непрерывна в G и на нижней границе $t = 0$, $\vec{x} \in G_0 \Rightarrow \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \varphi(\vec{x})$, $\vec{x} \in G_0$.

Итак, $u = u_\varphi(t, \vec{x})$ удовлетворяет уравнению и начальным условиям

$$u\big|_{t=0} = 0, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \varphi(\vec{x}), \quad \varphi \in C^2(G_0).$$

Предположим, что $\varphi \in C^3(G_0)$ и рассмотрим

$$\frac{\partial u_\varphi}{\partial t} = \frac{1}{4\pi t^2}\iint\limits_{S_t(\vec{x})} \varphi(\vec{y})\, dS_t(\vec{y}) + \frac{1}{4\pi t}\iint\limits_{S_t(\vec{x})} (\operatorname{grad}\varphi, \vec{n})\, dS_t(\vec{y}).$$

Тогда $\dfrac{\partial u_\varphi}{\partial t}$ а) дважды непрерывно-дифференцируема в G, так как

$$\frac{\partial u_\varphi}{\partial t} = \frac{1}{4\pi}\iint\limits_{S_1(\vec 0)} \varphi(\vec x + t\vec\xi)\, dS_1(\vec\xi) + \frac{t}{4\pi}\iint\limits_{S_1(\vec 0)} (\operatorname{grad}\varphi(\vec x + t\vec\xi), \vec\xi)\, dS_1(\vec\xi)$$

$$\text{и}\quad \frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial t^2} = \frac{1}{4\pi t}\iint\limits_{S_t(\vec x)} \Delta\varphi(\vec y)\, dS_1(\vec y) = \frac{t}{4\pi}\iint\limits_{S_1(\vec 0)} \Delta\varphi(\vec x + t\vec\xi)\, dS_1(\vec\xi)$$

$\Rightarrow \dfrac{\partial^2 u_\varphi}{\partial t^2} = u_{\Delta\varphi}$ и $\Delta\varphi \in C^1(G_0)$ (по условию) $\Rightarrow u_{\Delta\varphi} \in C^1(G)$; и так как

$$\frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial x_k^2} = \frac{1}{4\pi t}\iint\limits_{S_t(\vec x)} \frac{\partial^2\varphi}{\partial y_k^2}(\vec y)\, dS_t(\vec y) = u_{\frac{\partial^2\varphi}{\partial y_k}}$$

и $\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial y_k^2} \in C^1(G_0)$, то $\dfrac{\partial^2 u_\varphi}{\partial x_k^2} \in C^1(G)$;

б) удовлетворяет волновому уравнению $\dfrac{\partial^3 u_\varphi}{\partial t^3} = \Delta\dfrac{\partial u_\varphi}{\partial t}$, так как уравнение $\dfrac{\partial^2 u_\varphi}{\partial t^2} = \Delta u_\varphi$ можно продифференцировать по t еще раз, и $\dfrac{\partial}{\partial t}\Delta u_\varphi = \Delta\dfrac{\partial u_\varphi}{\partial t}$ в силу трижды непрерывной дифференцируемости u_φ;

в) $\dfrac{\partial u_\varphi}{\partial t}$ удовлетворяет начальным условиям $\dfrac{\partial u_\varphi}{\partial t}\Big|_{t=0} = \varphi$ (это мы проверили) и $\dfrac{\partial}{\partial t}\Big(\dfrac{\partial u_\varphi}{\partial t}\Big)\Big|_{t=0} = 0$, так как $\dfrac{\partial^2 u_\varphi}{\partial t^2} = u_{\Delta\varphi}$, а $u_\varphi\big|_{t=0} = 0\ \forall\,\varphi \in C(G_0)$.

Теорема. *Пусть* $\varphi_0 \in C^3(G_0)$ *и* $\varphi_1 \in C^2(G_0) \Rightarrow$

$$\begin{aligned} u(t,\vec x) =& u_{\varphi_1} + \frac{\partial u_{\varphi_0}}{\partial t} = \frac{1}{4\pi t}\iint\limits_{S_t(\vec x)} \varphi_1(\vec y)\, dS_t(\vec y) + \\ &+ \frac{1}{4\pi t^2}\iint\limits_{S_t(\vec x)} \varphi_0(\vec y)\, dS_t(\vec y) + \frac{1}{4\pi t}\iint\limits_{S_t(\vec x)} (\operatorname{grad}\varphi_0, \vec n)\, dS_t(\vec y) \end{aligned} \qquad \textit{(формула Кирхгофа)}$$

является решением задачи Коши для $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta u$ *с начальными условиями* $u\big|_{t=0} = \varphi_0$, $\dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \varphi_1$.

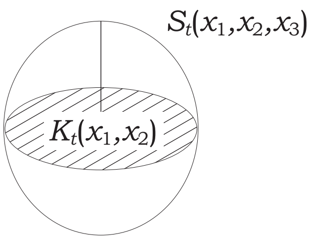
Замечание. В эту формулу можно подставлять $\varphi_0 \in C^1(G_0)$ и $\varphi_1 \in C(G_0)$, но тогда решения понимаются в обобщенном смысле.

Формула Пуассона

Пусть $\varphi(x_1, x_2, x_3) = \varphi(x_1, x_2)$ не зависит от переменной $x_3 \Rightarrow$

$$u_\varphi(t, x_1, x_2) = \frac{1}{4\pi t} \iint\limits_{S_t(\vec{x})} \varphi(y_1, y_2)\, dS_t(\vec{y}).$$

$S_t(\vec{x}) = \{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + (y_3 - x_3)^2 = t^2\} \Leftrightarrow y_3 = x_3 \pm \sqrt{t^2 - (y_1 - x_1)^2 - (y_2 - x_2)^2} \Rightarrow$ элемент поверхности $dS_t(y_1, y_2) =$



$$= \sqrt{1 + \Big(\mp \frac{y_1 - x_1}{\sqrt{t^2 - (y_1 - x_1)^2 - (y_2 - x_2)^2}}\Big)^2 + \Big(\mp \frac{y_2 - x_2}{\sqrt{t^2 - (y_1 - x_1)^2 - (y_2 - x_2)^2}}\Big)^2}\, dy_1 dy_2 =$$

$$= \frac{t\, dy_1 dy_2}{\sqrt{t^2 - (y_1 - x_1)^2 - (y_2 - x_2)^2}}$$

$$\Rightarrow u_\varphi(t, x_1, x_2) = \frac{2}{4\pi} \iint\limits_{K_t(x_1, x_2)} \frac{\varphi(y_1, y_2)\, dy_1 dy_2}{\sqrt{t^2 - (y_1 - x_1)^2 - (y_2 - x_2)^2}} =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \iint\limits_{K_t(x_1, x_2)} \frac{\varphi(y_1, y_2)\, dy_1 dy_2}{\sqrt{t^2 - (y_1 - x_1)^2 - (y_2 - x_2)^2}}$$

(интеграл несобственный!) $\Rightarrow$ задача Коши для $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}$ с начальными условиями $u\Big|_{t=0} = \varphi_0(x_1, x_2)$, $\dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \varphi_1(x_1, x_2)$ имеет решение

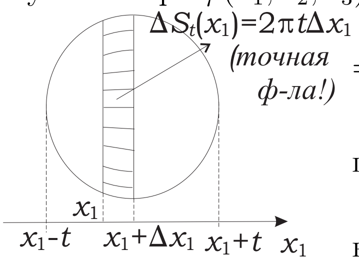
$$u(t, x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi} \iint\limits_{K_t(x_1, x_2)} \frac{\varphi_1(y_1, y_2)\, dy_1 dy_2}{\sqrt{t^2 - (y_1 - x_1)^2 - (y_2 - x_2)^2}} + \frac{\partial}{\partial t}\Big(\frac{1}{2\pi} \iint\limits_{K_t(x_1, x_2)} \frac{\varphi_0(y_1, y_2)\, dy_1 dy_2}{\sqrt{t^2 - (y_1 - x_1)^2 - (y_2 - x_2)^2}}\Big), \quad \text{(формула Пуассона)}$$

в старых предположениях $\varphi_0 \in C^3(G_0)$, $\varphi_1 \in C^2(G_0)$.

Лекция IX

Формула Д'Аламбера (другой вывод)

Пусть теперь $\varphi(x_1, x_2, x_3) = \varphi(x_1)$ зависит только от x_1.



$\Rightarrow$ $dS_t(x_1) = 2\pi t dx_1$ $\Rightarrow$ задача Коши $\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}, x_1 \in G_0, \\ u\Big|_{t=0} = \varphi_0, \dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \varphi_1 \end{cases}$ имеет решение, представленное в следующем виде

$$u(t, x_1) = \frac{1}{4\pi t} \int\limits_{x_1-t}^{x_1+t} \varphi_1(y_1) 2\pi t\, dy_1 + \frac{\partial}{\partial t}\Big(\frac{1}{4\pi t} \int\limits_{x_1-t}^{x_1+t} \varphi_0(y_1) 2\pi t\, dy_1 \Big) =$$

$$= \frac{1}{2} \int\limits_{x_1-t}^{x_1+t} \varphi_1(y_1)\, dy_1 + \frac{1}{2}\big[\varphi_0(x_1+t) + \varphi_0(x_1-t)\big] (\text{формула Д'Аламбера}),$$

однако при более сильных, чем приведенные в лекции ЛV, условиях $\varphi_1 \in C^2(G_0)$, $\varphi_0 \in C^3(G_0)$.

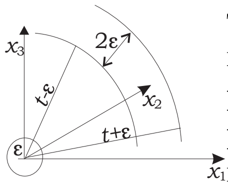
Замечание. Такой способ выведения формул решения в низших размерностях из формул для высших размерностей называется *методом спуска.*

Исследование формул решения волнового уравнения

I $\underline{n=1}$. В формуле Д'Аламбера не участвуют производные $\Rightarrow$ из малости φ_0 и φ_1 следует малость решения $u(t, x)$ (при ограниченных t).

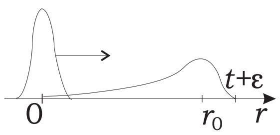
В случае $n = 2$ и $n = 3$ это неверно — из малости φ_0 и φ_1 не вытекает, вообще говоря, малость $u(t, \vec{x})$ даже при сколь угодно малых заданных $t > 0$ — функции φ_0 и φ_1 могут быть сколь угодно малыми, а решение $u(t, \vec{x})$ — сколь угодно большим (из-за производных φ_0).

II $\underline{n=3}$. Пусть φ_0 и φ_1 отличны от нуля только в ε-окрестности начала координат. Где будет ненулевым решение $u(t, \vec{x})$? Так как в формуле участвует интеграл по сфере $S_t(\vec{x})$,



то там, где сфера пересекает ε-окрестность точки $\vec{0}$ — в шаровом слое с центром в точке $\vec{0}$ и внутренним-внешним радиусами $t-\varepsilon$ и $t+\varepsilon$. Таким образом, пущенная волна разбегается со скоростью 1 от центра внутри разбегающегося слоя ширины 2ε. Не распыляется.

III <u>$n = 2$</u>. Опять, если φ_0 и φ_1 ненулевые только в ε-окрестности точки $(0, 0)$, то так как интеграл берется *по кругу* $K_t(x_1, x_2)$, то $u(t, x_1, x_2)$ будет ненулевым в круге радиуса $t+\varepsilon$. Площадь волны расширяется, занимая всю плоскость. Распыление. Диффузия волн. Если нарисовать профиль

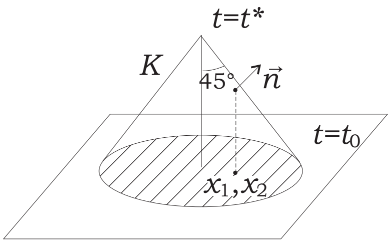


волны по радиусу, то у нее в момент времени t будет резкий передний фронт и размытый «размазанный» задний фронт (хотя «хвост» и стремится к нулю).

В случае $n = 3$ диффузии не происходит (волна проходит через точку и потом решение опять нулевое при $t > T(\vec{x}, \varepsilon) = |\vec{x}| + \varepsilon$).

Единственность решения волнового уравнения

Теорема 1. *Пусть функция $u \in C^1(K)$, где K — конус с вершиной в точке (t^*, x_1^0, x_2^0), осью, параллельной Ot, и образующей, составляющей угол 45° с осью, и основание которого лежит в плоскости $t = t_0$ (круг радиуса $|t^* - t_0|$), которая внутри K удовлетворяет уравнению $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}$ (в частности, внутри K и дважды непрерывно-дифференцируема). Тогда $u(t, \vec{x})$ внутри K однозначно определяется своими значениями (и значениями $\dfrac{\partial u}{\partial t}$) на основании конуса.*



Конус K называют характеристическим, так как его нормаль $\vec{n} = (\xi_0, \xi_1, \xi_2)$ удовлетворяет характеристическому уравнению $\xi_0^2 - \xi_1^2 - \xi_2^2 = 0$. Из всей теоремы главное запомнить, что значения внутри характеристического конуса полностью определяются по значениям на основании конуса.

Доказательство. Без ограничения общности считаем $t^* > t_0$, как показано на картинке. Пусть $u_1(t, \vec{x})$ и $u_2(t, \vec{x})$ — два решения волнового уравнения с одними и теми же начальными условиями $u_k(0, \vec{x}) = \varphi_0(\vec{x})$, $\dfrac{\partial u_k}{\partial t}\big(0, \vec{x}\big) = \varphi_1(\vec{x})$, $k = 1, 2$, $\vec{x} \in$ основанию конуса. Рассмотрим $u(t, \vec{x}) = u_1(t, \vec{x}) - u_2(t, \vec{x}) \Rightarrow u(0, \vec{x}) = 0$, $\dfrac{\partial u}{\partial t}\big(0, \vec{x}\big) = 0$, $\vec{x} \in$ основанию конуса.

Рассмотрим интеграл (вообще говоря, несобственный)

$$\iiint\limits_K \underbrace{\frac{\partial u}{\partial t}\Big(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}}_{\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\Big)\, dtdx_1dx_2,$$

а два остальных слагаемых преобразуем по формуле Гаусса–Остроградского

$$\iiint\limits_K \frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2}\, dtdx_1dx_2 = \iint\limits_{\partial K} \frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial x_k}\cos(\vec{n}, x_k)\, dS -$$
$$- \iiint\limits_K \underbrace{\frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial t}\frac{\partial u}{\partial x_k}}_{\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)^2}\, dtdx_1dx_2,$$

где $\vec{n}$ — внешняя нормаль к поверхности конуса, $\cos(\vec{n}, x_k)$ — направляющие косинусы для $\vec{n}$ и мы воспользовались следствием формулы Гаусса–Остроградского

$$\iiint\limits_V u\frac{\partial v}{\partial x_k}\, dx_1dx_2dx_3 = \iint\limits_S uv\cos(\vec{n}, x_k)\, dS - \iiint\limits_V \frac{\partial u}{\partial x_k} v\, dx_1dx_2dx_3,$$

u и v — непрерывно-дифференцируемы внутри области V, ограниченной кусочно-гладкой поверхностью S, и u, v — непрерывны в замкнутой области $\overline{V}$ (формула интегрирования по частям).

Тогда

$$0 \equiv \iiint\limits_K \frac{\partial u}{\partial t}\Big(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\Big)\, dtdx_1dx_2 =$$
$$= -\iint\limits_{\partial K}\Big[\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial x_1}\cos(\vec{n}, x_1) + \frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial x_2}\cos(\vec{n}, x_2)\Big]\, dS +$$
$$+ \frac{1}{2}\iiint\limits_K \frac{\partial}{\partial t}\Big[\Big(\frac{\partial u}{\partial t}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial u}{\partial x_1}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial u}{\partial x_2}\Big)^2\Big]\, dtdx_1dx_2.$$

Последний интеграл запишем в виде повторного по t

$$\frac{1}{2}\iint\limits_{\partial K_{\text{осн}}}\Big[\Big(\frac{\partial u}{\partial t}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial u}{\partial x_1}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial u}{\partial x_2}\Big)^2\Big]\Big|_{t=t_0}^{t=t^* - \sqrt{(x_1-x_1^0)^2+(x_2-x_2^0)^2}} dx_1dx_2,$$

а в первом заметим, что интеграл по основанию $\partial K_{\text{осн}}$ равен нулю, так как $\dfrac{\partial u}{\partial t} = 0$ при $t = t_0$. И во втором преобразованном интеграле при $t = t_0$ значения подынтегральной функции равны нулю, так как $\dfrac{\partial u}{\partial t} = 0$ при $t = t_0$ и $u = 0$ при $t = t_0$ ($\Rightarrow \dfrac{\partial u}{\partial x_1} = 0$ и $\dfrac{\partial u}{\partial x_2} = 0$).

Следовательно,

$$0 \equiv -\iint\limits_{\partial K_{\text{бок}}} \frac{\partial u}{\partial t}\Big[\frac{\partial u}{\partial x_1}\cos(\vec{n}, x_1) + \frac{\partial u}{\partial x_2}\cos(\vec{n}, x_2)\Big] dS_{\text{бок}} + \\ + \frac{1}{2}\iint\limits_{\partial K_{\text{осн}}} \Big[\Big(\frac{\partial u}{\partial t}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial u}{\partial x_1}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial u}{\partial x_2}\Big)^2\Big]\Big|_{t=t^* - \sqrt{(x_1-x_1^0)^2+(x_2-x_2^0)^2}} dx_1 dx_2.$$

Заметим, что $dS_{\text{бок}} = \sqrt{2}\,dx_1 dx_2$, а $t = t^* - \sqrt{(x_1-x_1^0)^2+(x_2-x_2^0)^2}$ — находится на $\partial K_{\text{бок}}$ и, кроме того (в силу того, что боковая поверхность конуса наклонена под углом $45°$), $\cos^2(\vec{n}, t) = \cos^2(\vec{n}, x_1) + \cos^2(\vec{n}, x_2) = \dfrac{1}{2}$ $\Rightarrow$ все выражение преобразуется к виду

$$0 \equiv \iint\limits_{\partial K_{\text{бок}}} \Big[\frac{1}{2}\Big(\frac{\partial u}{\partial t}\Big)^2 \frac{\cos^2(\vec{n}, x_1)}{\cos(\vec{n}, t)} + \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial u}{\partial t}\Big)^2 \frac{\cos^2(\vec{n}, x_2)}{\cos(\vec{n}, t)} - \frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial x_1}\cos(\vec{n}, x_1) - \\ - \frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial x_2}\cos(\vec{n}, x_2) + \Big(\frac{\partial u}{\partial x_1}\Big)^2\cos(\vec{n}, t) + \Big(\frac{\partial u}{\partial x_2}\Big)^2\cos(\vec{n}, t)\Big] dS_{\text{бок}} = \\ = \frac{1}{2}\iint\limits_{\partial K_{\text{бок}}} \cos(\vec{n}, t)\Big[\Big(\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\cos(\vec{n}, x_1)}{\cos(\vec{n}, t)} - \frac{\partial u}{\partial x_1}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\cos(\vec{n}, x_2)}{\cos(\vec{n}, t)} - \frac{\partial u}{\partial x_2}\Big)^2\Big] dS_{\text{бок}}.$$

Так как все функции под знаком интеграла — непрерывны на $\partial K_{\text{бок}}$ и подынтегральное выражение неотрицательно $\Rightarrow$

$$\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\cos(\vec{n}, x_1)}{\cos(\vec{n}, x_2)} - \frac{\partial u}{\partial x_1} \equiv 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial u}{\partial t}\frac{\cos(\vec{n}, x_2)}{\cos(\vec{n}, t)} - \frac{\partial u}{\partial x_2} \equiv 0$$

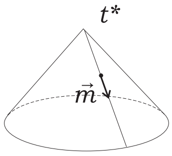
на $\partial K_{\text{бок}}$ $\Leftrightarrow$

$$\frac{\dfrac{\partial u}{\partial t}}{\cos(\vec{n}, t)} = \frac{\dfrac{\partial u}{\partial x_1}}{\cos(\vec{n}, x_1)} = \frac{\dfrac{\partial u}{\partial x_2}}{\cos(\vec{n}, x_2)} = \lambda.$$

Если вектор $\vec{m}$ направлен по образующей конуса, то $\vec{m} = (-\cos(\vec{n}, t), \cos(\vec{n}, x_1), \cos(\vec{n}, x_2))$ $\Rightarrow$

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{m}} = -\frac{\partial u}{\partial t}\cos(\vec{n}, t) + \frac{\partial u}{\partial x_1}\cos(\vec{n}, x_1) + \frac{\partial u}{\partial x_2}\cos(\vec{n}, x_2) = \\ = \lambda\big(-\cos^2(\vec{n}, t) + \cos^2(\vec{n}, x_1) + \cos^2(\vec{n}, x_2)\big) = 0$$

(то же самое другими словами — $\vec{m} \perp \vec{n}$, а $\operatorname{grad} u \parallel \vec{n}$ и $\dfrac{\partial u}{\partial \vec{m}} = (\operatorname{grad} u, \vec{m})$)



$\Rightarrow u$ — постоянна вдоль образующих конуса и так как на основании конуса $u = 0$, то $\Rightarrow u$ в вершине конуса тоже $= 0$. Так как в качестве конуса можно взять любой характеристический конус с вершиной внутри K, то $u = 0$ всюду внутри $K \Rightarrow u_1(t, \vec{x}) \equiv u_2(t, \vec{x})$ внутри K.

□

Итак, доказано, что любое решение задачи Коши для волнового уравнения однозначно определяется формулами, данными на прошлой лекции (и частично на сегодняшней) в области $G = \{(t, \vec{x}) \mid K_{|t|}(\vec{x}) \subset G_0\}$. Докажем еще непрерывную зависимость от начальных данных.

Непрерывная зависимость от начальных условий

Теорема 2. *Пусть $T > 0$ — фиксировано и $u_1(t, \vec{x})$, $u_2(t, \vec{x})$ — решения волнового уравнения с начальными условиями $u_k(0, \vec{x}) = \varphi_0^{(k)}(\vec{x})$ и $\dfrac{\partial u_k}{\partial t}(0, \vec{x}) = \varphi_1^{(k)}(\vec{x})$, $k = 1, 2$, в области $G_T = \{(t, \vec{x}) \mid |t| \leqslant T, K_{|t|}(\vec{x}) \subset G_0\}$. Тогда $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 \mid |\varphi_0^{(1)}(\vec{x}) - \varphi_0^{(2)}(\vec{x})| < \delta$, $|\varphi_1^{(1)}(\vec{x}) - \varphi_1^{(2)}(\vec{x})| < \delta$ и, кроме того, $|\operatorname{grad} \varphi_0^{(1)}(\vec{x}) - \operatorname{grad} \varphi_0^{(2)}(\vec{x})| < \delta$ при $\vec{x} \in G_0$, то $|u_1(t, \vec{x}) - u_2(t, \vec{x})| < \varepsilon\ \forall (t, \vec{x}) \in G_T$.*

Доказательство. Рассмотрим $u = u_1 - u_2$ — удовлетворяет задаче Коши с начальными условиями $u(0, \vec{x}) = \varphi_0(\vec{x}) = \varphi_0^{(1)}(\vec{x}) - \varphi_0^{(2)}(\vec{x})$ $\dfrac{\partial u}{\partial t}(0, \vec{x}) = \varphi_1(\vec{x}) = \varphi_1^{(1)}(\vec{x}) - \varphi_1^{(2)}(\vec{x}) \Rightarrow$ по формуле Кирхгофа

$$u(t, \vec{x}) = \frac{1}{4\pi t^2} \iint\limits_{S_t(\vec{x})} \varphi_0(\vec{y})\, dS_t(\vec{y}) +$$

$$+ \frac{1}{4\pi t} \iint\limits_{S_t(\vec{x})} (\operatorname{grad} \varphi_0, \underset{\substack{\uparrow \\ \text{единичная нормаль к} S_t(\vec{x})}}{\vec{\xi}})\, dS_t(\vec{y}) + \frac{1}{4\pi t} \iint\limits_{S_t(\vec{x})} \varphi_1(\vec{y})\, dS_t(\vec{y})$$

$$\Rightarrow\ |u(t, \vec{x})| < \frac{1}{4\pi t^2}\, \delta\, 4\pi t^2 + \frac{1}{4\pi t}\, \delta\, 4\pi t^2 + \frac{1}{4\pi t}\, \delta\, 4\pi t^2 \leqslant \delta(1 + 2T).$$

Если взять $\delta = \dfrac{\varepsilon}{1 + 2T}$, то получаем наше утверждение. □

Лекция X

Комментарии к полученным теоремам

Следствие (всех трёх теорем). *Задача Коши для волнового уравнения в случае $n = 3$ поставлена корректно в классе функций $\varphi_0 \in C^3(G_0)$, $\varphi_1 \in C^2(G_0)$, причем непрерывная зависимость имеет место по φ_0 и производным φ_0 и по значениям φ_1.*

Замечание 1. Если φ_0 и φ_1 не зависят от x_3, или от x_2 и x_3, получаем корректность в случае $n = 2$ и $n = 1$.

Замечание 2. Аналогичные формулам Д'Аламбера, Пуассона и Кирхгофа формулы можно получить и в случае произвольного числа переменных $n \in \mathbb{N}$, причем корректность опять имеет место с $L_1 = \left[\frac{n}{2}\right] + 2$ и $L_2 = \left[\frac{n}{2}\right]$.

$$\left.\begin{array}{lll} n = 1 & L_1 = 2 & L_2 = 0 \\ n = 2 & L_1 = 3 & L_2 = 1 \\ n = 3 & L_1 = 3 & L_2 = 1 \end{array}\right\} \text{— всё верно}$$

Следствие 2. *Решение задачи Коши можно определить и для любых $\varphi_0 \in C^1(G_0)$ и $\varphi_1 \in C^0(G)$. Для этого нужно рассмотреть приближения φ_0 гладкими функциями $\varphi_0^{(l)} \in C^3(G_0)$, так чтобы* $\operatorname{grad}\varphi_0$ *приближался функциями* $\operatorname{grad}\varphi_0^{(l)}$, *и приближения (равномерные) функции φ_1 функциями $\varphi_1^{(l)}$ класса $C^2(G_0)$ $\Rightarrow$ в силу корректности соответствующие им классические решения $u^{(l)}(t, \vec{x}) \underset{\overline{G}_T}{\rightrightarrows} u(t, \vec{x})$ — обобщенное решение задачи, равное формуле Кирхгофа (или Пуассона или Д'Аламбера в случае меньшего числа переменных).*

Метод Фурье для уравнения гиперболического типа
Общее рассмотрение

Рассмотрим задачу

$$A(t)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + C(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + D(t)\frac{\partial u}{\partial t} + E(x)\frac{\partial u}{\partial x} + [F_1(t) + F_2(x)]u = 0 \qquad \text{(X.1)}$$

с начальными условиями

$$u(0,x)=\varphi_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}\big(0,x\big)=\varphi_1(x) \tag{X.2}$$

и краевыми условиями

$$A_0u(t,0)+B_0\frac{\partial u}{\partial x}\big(t,0\big)=0, \quad A_1u(t,l)+B_1\frac{\partial u}{\partial x}\big(t,l\big)=0. \tag{X.3}$$

Решение ищем при $0\leqslant x\leqslant l$, $0\leqslant t\leqslant T$. Числовые коэффициенты $(A_0^2+B_0^2)(A_1^2+B_1^2)\neq 0$, функции $A(t)\geqslant a_0>0$ и $C(x)\leqslant c_0<0$, коэффициенты A,C,D,E,F_1,F_2 — достаточно гладкие (потом выясним до какой степени). Метод Фурье состоит из двух частей.

I. Разделение переменных. Ищем решение в виде

$$u(t,x)=T(t)X(x), \quad T\in C^2[0,T], \quad X\in C^2[0,l],$$

причем потребуем от T и X выполнения следующих двух условий:

а) $u(t,x)$ — нетривиальное решение (X.1);

б) $u(t,x)$ удовлетворяет краевым условиям (X.3).

а) подставляем $\Rightarrow$

$$A(t)T''(t)X(x)+C(x)T(t)X''(x)+D(t)T'(t)X(x)+E(x)T(t)X'(x)+\\+[F_1(t)+F_2(x)]T(t)X(x)=0.$$

Собираем отдельно слагаемые с $T(t)$ и $X(x)$:

$$X(x)[A(t)T''(t)+D(t)T'(t)+F_1(t)T(t)]=\\=-T(t)[C(x)X''(x)+E(x)X'(x)+F_2(x)X(x)].$$

Так как $T(t)\not\equiv 0$, то $\exists\, t_0\in[0,T]\mid T(t_0)\neq 0\Rightarrow$ подставляя $t=t_0$ и деля на $T(t_0)$, имеем

$$C(x)X''(x)+E(x)X'(x)+F_2(x)X(x)=\\=\underbrace{-\frac{A(t_0)T''(t_0)+D(t_0)T'(t_0)+F_1(t_0)T(t_0)}{T(t_0)}}_{\lambda_1}X(x)$$

или

$$C(x)X''(x)+E(x)X'(x)+F_2(x)X(x)=\lambda_1X(x),$$

где λ_1 — число и $X(x) \not\equiv 0$.

Так как $X(x) \not\equiv 0$, то $\exists\, x_0 \in [0, l] \mid X(x_0) \neq 0 \Rightarrow$ подставляя $x = x_0$ и деля на $X(x_0)$, имеем

$$\begin{aligned} &A(t)T''(t) + D(t)T'(t) + F_1(t)T(t) = \\ &\qquad\qquad = -\underbrace{\frac{C(x_0)X''(x_0) + E(x_0)X'(x_0) + F_2(x_0)X(x_0)}{X(x_0)}}_{\lambda_2} T(t) \end{aligned}$$

или

$$A(t)T''(t) + D(t)T'(t) + F_1(t)T(t) = -\lambda_2 T(t),$$

λ_2 — число, $T(t) \not\equiv 0$.

Подставляя одновременно $x = x_0$ и $t = t_0$, видим, что $\lambda_1 = -\lambda_2 = \lambda$ $\Rightarrow$ получаем два уравнения

$$A(t)T''(t) + D(t)T'(t) + F_1(t)T(t) + \lambda T(t) = 0 \tag{X.4$'$}$$

$$C(x)X''(x) + E(x)X'(x) + F_2(x)X(x) - \lambda X(x) = 0 \tag{X.4$''$}$$

б) Подставим $u(t, x)$ в (X.3) $\Rightarrow$ $A_0T(t)X(0) + B_0T(t)X'(0) = A_1T(t)X(l) + B_1T(t)X'(l) = 0\ \forall\, t \in [0, T]$. Так как $T(t) \not\equiv 0 \Rightarrow$

$$A_0X(0) + B_0X'(0) = 0 \quad \text{и} \quad A_1X(l) + B_1X'(l) = 0. \tag{X.4}$$

Задача нахождения значений λ, при которых (X.4$''$) с краевыми условиями (X.4) имеет нетривиальные решение, называется задачей на собственные значения. Сами нетривиальные решения $X(x)$ называются собственными функциями, а λ — собственными значениями этой задачи. Про эту задачу известно следующее: если коэффициенты непрерывно-дифференцируемы, причем $C(x) \leqslant c_0 < 0$, то существует счетное число собственных значений $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k \to +\infty$ (спектр задачи), а соответствующие им собственные функции $X_1(x), X_2(x), \ldots, X_k(x), \ldots$ образуют полную ортогональную систему с некоторым весом $\rho(x) > 0$ (определяемым функциями $C(x)$ и $E(x)$) в пространстве функций с интегрируемым квадратом на $[0, l]$. То-есть $\forall\, \varphi \in L^2[0, l]$

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k X_k(x), \quad \text{где } c_k = \frac{1}{l_k}\int\limits_0^l \varphi(x)X_k(x)\rho(x)\,dx,$$

а $l_k = \int\limits_0^l X_k^2(x)\rho(x)\,dx$, причем сходимость ряда понимается в среднем квадратическом:

$$\int\limits_0^l \Big[\varphi(x) - \sum_{k=1}^{n} c_k X_k(x)\Big]^2 \rho(x)\,dx \to 0 \quad \text{при } n \to \infty.$$

II. Метод Фурье. Подберем для каждого λ_k такие $T_k^*(t)$ и $T_k^{**}(t)$, чтобы они удовлетворяли уравнению

$$A(t)T_k''(t) + D(t)T_k'(t) + F_1(t)T_k(t) + \lambda_k T_k(t) = 0$$

$\Rightarrow$ ФСР и всегда можно подобрать такие комбинации ФСР, чтобы

$$\begin{cases} T_k^*(0) = 1, & (T_k^*)'(0) = 0 \\ T_k^{**}(0) = 0, & (T_k^{**})'(0) = 1 \end{cases}$$

и будем искать решение гиперболического уравнения в виде

$$u(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} X_k(x)[a_k T_k^*(t) + b_k T_k^{**}(t)],$$

где a_k, b_k — неопределенные коэффициенты. Подставляем $t = 0 \Rightarrow \sum\limits_{k=1}^{\infty} X_k(x) a_k = \varphi_0(x) \Rightarrow a_k$ — коэффициенты Фурье φ_0 по системе $X_k(x)$. $\dfrac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=0} \Rightarrow \dfrac{\partial u}{\partial t}\big(0,x\big) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} X_k(x) b_k = \varphi_1(x) \Rightarrow b_k$ — коэффициенты $\varphi_1(x)$ по $X_k(x)$. Поэтому если ряды Фурье для $\varphi_0(x)$ и $\varphi_1(x)$ сходятся равномерно и абсолютно, то выполняются начальные и краевые условия, а если ряд для $u(t,x)$ можно дифференцировать два раза по t и по x (то-есть ряды для $u(t,x)$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}\big(t,x\big)$ и $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}\big(t,x\big)$ сходятся равномерно) в прямоугольнике $[0,T] \times [0,l]$, то и уравнению (X.1), так как этому уравнению удовлетворяет каждое слагаемое $u_k(t,x)$ (согласно первой части метода Фурье).

Приведем для конкретности теорему сходимости разложения по собственным функциям.

Теорема. *Если $\varphi(x)$ — квадратично-интегрируема и кусочно-непрерывна (то-есть имеет конечное число точек разрыва) на $[0,l]$, то ряд Фурье $\varphi(x)$ по $X_k(x)$ сходится в среднем квадратическом. А если $\varphi \in C^1[0,l]$ и $\varphi(0) = \varphi(l) = 0$ (рассматриваем I краевое условие), то и равномерно на $[0,l]$.*

Простейшие свойства собственных функций и значений

Замечание. Общая задача (X.4″) сводится умножением на некоторую подобранную $\rho(x)$ к задаче

$$[p(x)X'(x)]' - q(x)X(x) + \lambda\rho(x)X(x) = 0, \tag{X.5}$$

где $p \in C^1[0,l]$, $q \in C[0,l]$, $p(x) \geqslant p_0 > 0$. Действительно, из (X.4″) получаем

$$-\rho(x)C(x)X''(x) - \rho(x)E(x)X'(x) - F_2(x)\rho(x)X(x) + \lambda\rho(x)X(x) = 0,$$

а должно быть

$$p(x)X''(x) + p'(x)X'(x) - q(x)X(x) + \lambda\rho(x)X(x) = 0, \tag{X.5′}$$

то-есть $p(x) = -\rho(x)C(x)$, $p'(x) = -\rho(x)E(x)$, $-q(x) = -F_2(x)\rho(x) \Rightarrow$

$$\frac{p'(x)}{p(x)} = \frac{E(x)}{C(x)} \quad \Leftarrow p(x) = e^{\int\limits_0^x \frac{E(\xi)}{C(\xi)}\,d\xi} \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \rho(x) = -\frac{1}{C(x)}e^{\int\limits_0^x \frac{E(\xi)}{C(\xi)}\,d\xi} > 0, \quad q(x) = -\frac{F_2(x)}{C(x)}e^{\int\limits_0^x \frac{E(\xi)}{C(\xi)}\,d\xi},$$

и чтобы $p(x) \in C^1[0,l]$, нужно, чтобы $E, C \in C[0,l]$, $C(x) \leqslant c_0 < 0$, а для $q(x) \in C[0,l]$ нужно $F_2 \in C[0,l]$.

Теорема 1 (простота спектра). *Если $X_1(x)$ и $X_2(x)$ — две собственные функции, соответствующие одному и тому же собственному значению λ, то X_1 и X_2 пропорциональны.*

Доказательство. Пусть X_1 и X_2 линейно независимы $\Rightarrow W(X_1,X_2) = \begin{vmatrix} X_1 & X_2 \\ X_1' & X_2' \end{vmatrix} \neq 0 \ \forall x \in [0,l]$. Но X_1 и X_2 удовлетворяют, например, при $x = 0$ одному и тому же краевому условию $A_0X_1(0) + B_0X_1'(0) = 0$ и $A_0X_2(0) + B_0X_2'(0) = 0 \Rightarrow$ строки $W(X_1,X_2)$ зависимы, противоречие. □

Теорема 2 (ортогональность). *Если X_1 и X_2 — собственные функции, соответствующие разным собственным значениям λ_1 и λ_2, $\lambda_1 \neq \lambda_2$, то X_1 и X_2 ортогональны с весом $\rho(x)$.*

Доказательство. Напишем коротко (X.5) для X_1 и X_2:

$$\begin{array}{ll} [pX_1']' - qX_1 + \lambda_1\rho X_1 = 0 & \text{Умножим первое на } X_2, \\ [pX_2']' - qX_2 + \lambda_2\rho X_2 = 0 & \text{второе на } X_1 \text{ и вычтем} \end{array}$$

$\Rightarrow (\lambda_1-\lambda_2)\rho(x)X_1(x)X_2(x) = -X_2(x)[p(x)X_1'(x)]' + X_1(x)[p(x)X_2'(x)]'$ и проинтегрируем справа и слева с интегрированием по частям $\Rightarrow$

$$(\lambda_1-\lambda_2)\int\limits_0^l \rho(x)X_1(x)X_2(x)\,dx = [-X_2(x)X_1'(x)+X_1(x)X_2'(x)]p(x)\Big|_0^l +$$

$$+\int\limits_0^l X_2'(x)p(x)X_1'(x)\,dx - \int\limits_0^l X_1'(x)p(x)X_2(x)\,dx =$$

$$= p(x)W(X_1,X_2)\Big|_0^l.$$

Но у X_1 и X_2 в точках $x=0$ и $x=l$ выполняются одни и те же краевые условия $\Rightarrow W(X_1,X_2)=0$ при $x=0$ и $x=l \Rightarrow (\lambda_1\neq\lambda_2)$ $\int\limits_0^l \rho(x)X_1(x)X_2(x)\,dx = 0.$ □

Теорема 3 (полнота). *Для любой кусочно-непрерывной функции $\varphi(x)$ (то-есть, имеющей конечное число точек разрыва) с интегрируемым квадратом на $[0,l]$ справедливо*

$$\int\limits_0^l \rho(x)\Big[\varphi(x)-\sum_{n=1}^{N}c_nX_n(x)\Big]^2 dx \to 0,\quad N\to\infty,$$

где

$$c_n = \int\limits_0^l \rho(x)\varphi(x)X_n(x)\,dx$$

(здесь $X_n(x)$ — нормированы:

$$\int\limits_0^l \rho(x)X_n^2(x)\,dx = 1!)$$

Лекция XI

Замечание к методу Фурье

Пусть задан линейный оператор $L[X] = [pX']' - qX$, $p \in C^1[0,l]$, $q \in C[0,l]$, $p(x) \geqslant p_0 > 0$, на линейном пространстве $X(0) = X(l) = 0$, $X \in C^2[0,l]$. Обратный оператор к этому оператору записывается в виде

$$L^{-1}[f] = \int\limits_0^l G(x,s)f(s)\,ds,$$

где $G(x,s)$ — функция Грина оператора L, определяемая свойствами

1) $G(x,s)$ — непрерывна на $[0,l] \times [0,l]$;
2) $G(x,s) \in C_x^2$ при $x \neq s$ и $G'_x(x,s)$ имеет скачок $1/p(s)$ в $x = s$;
3) $L_x[G(x,s)] = 0$ при $x \neq s$;
4) $G(0,s) = G(l,s) = 0$.

Доказывается, что функция Грина обладает свойством симметричности $G(x,s) = G(s,x)$ (относительно этого и других свойств см. [1, гл. 2 §24]).

Тогда задача на собственные значения $L[X] + \lambda\rho(x)X(x) = 0$ может быть переписана (применяя L^{-1}) в виде

$$X(x) + \lambda\int\limits_0^l G(x,s)\rho(s)X(s)\,ds = 0$$

или, если $\lambda \neq 0$ (что будет, например, в случае $q(x) \geqslant 0$), то

$$\int\limits_0^l G(x,s)\rho(s)X(s)\,ds = -\frac{1}{\lambda}X(x)$$

— почти собственные значения интегрального оператора, но вес $\rho(s)$ входит несимметрично. Симметризуем: $Y(x) = \sqrt{\rho(x)}X(x)$, $K(x,s) = G(x,s)\sqrt{\rho(x)\rho(s)} \Rightarrow$

$$\int\limits_0^l K(x,s)Y(s)\,ds = -\frac{1}{\lambda}Y(x)$$

$\Rightarrow Y(x)$ — собственный вектор, а $-\dfrac{1}{\lambda}$ — собственное значение интегрального оператора. К такого типа операторам применима следующая теорема, доказательство которой можно посмотреть, например, в книге [2].

Теорема (Гильберт–Шмидт). *Пусть A — симметрический компактный оператор в гильбертовом пространстве H, тогда в H существует ортонормированный базис, состоящий из собственных векторов этого оператора, причем собственные значения $\mu_n \to 0$ при $n \to \infty$.*

В нашем случае H — пространство квадратично-интегрируемых функций на $[0, l]$, оператор

$$A[Y] = \int\limits_0^l K(x,s)Y(s)\,ds$$

— симметрический относительно скалярного произведения

$$(Y_1, Y_2) = \int\limits_0^l Y_1(s)Y_2(s)\,ds,$$

так как $K(x,s) = K(s,x)$, и компактный, как любой интегральный оператор.

Собственные функции $Y_k(s)$ с собственными значениями $\mu_k \Rightarrow$ у нашей задачи собственные функции $X_k(s) = \dfrac{Y_k(s)}{\sqrt{\rho(s)}}$ — нормированные ортогональные с весом $\rho(s)$, и собственные значения $\lambda_k = -\dfrac{1}{\mu_k} \to +\infty$ при $k \to \infty$, а любая функция $\varphi(s)$ с интегрируемым квадратом раскладывается в ряд Фурье по $Y_k(s)$:

$$\varphi(s) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k Y_k(s) \Rightarrow \underset{\displaystyle f(s)}{\underset{\shortparallel}{\frac{\varphi(s)}{\sqrt{\rho(s)}}}} = \sum_{k=1}^{\infty} c_k X_k(s)$$

и

$$c_k = \int\limits_0^l \varphi(s)Y_k(s)\,ds = \int\limits_0^l f(s)X_k(s)\rho(s)\,ds$$

— обычные формулы для коэффициентов Фурье функции $f(s)$ по $X_k(s)$ с весом $\rho(s)$.

Как итог обоснованию метода Фурье, приведем достаточные условия для применения метода Фурье, принадлежащие О. А.Олейник и ...

Теорема. *Если* $\varphi_0 \in C^3[0,l]$, $\varphi_0\big|_{\substack{x=0\\x=l}} = L[\varphi_0]\big|_{\substack{x=0\\x=l}} = 0$, $\varphi_1 \in C^1[0,l]$, $\varphi_1\big|_{\substack{x=0\\x=l}} = 0$, *коэффициенты* A, C, D, E, F_1, F_2 *— трижды непрерывно-дифференцируемы на* $[0,l]$ *или* $[0,T]$, $A(t) \geqslant a_0 > 0$, $C(x) \leqslant c_0 < 0$, *то в прямоугольнике* $\overline{Ц}_T$ *существует и единственная функция*

$$u(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} X_k(x)[a_k T_k^*(t) + b_k T_k^{**}(t)], \tag{XI.1}$$

имеющая непрерывные производные в $\overline{Ц}_T$ *до второго порядка включительно и удовлетворяющая уравнению*

$$A(t)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + C(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + D(t)\frac{\partial u}{\partial t} + E(x)\frac{\partial u}{\partial x} + [F_1(t) + F_2(x)]u = 0$$

и начальным условиям $u\big|_{t=0} = \varphi_0$, $\dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \varphi_1$ *и краевым условиям* $u\big|_{\substack{x=0\\x=l}} = 0$. *При этом ряды, полученные дифференцированием* (XI.1) *по* t *и по* x *до двух раз включительно, сходятся равномерно и абсолютно в* $\overline{Ц}_T$.

Уравнения эллиптического типа

Стандартным примером уравнения эллиптического типа является уравнение Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \ldots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} = 0$$

— этим уравнением описывается стационарное распределение температуры в трехмерном теле, ньютонов или кулонов потенциал вне распределения масс или зарядов, логарифмический потенциал, положение покоя упругой мембраны, упругого трехмерного тела.

Определение XI.1. *Непрерывная в области* $G \subseteq \mathbb{R}^n$ *функция* $u(x_1, \ldots, x_n)$ *называется гармонической, если* $\Delta u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \ldots + \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} = 0$ *в* G.

Задача. Доказать, что функция $u(\vec{x}) = f(r)$, $r = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$ — гармоническая в кольце $r_1 < |\vec{x}| < r_2 \Leftrightarrow f(r) = C_1 + C_2 \ln\dfrac{1}{r}$, $n = 2$, и $f(r) = C_1 + \dfrac{C_2}{r^{n-2}}$, $n > 2$.

Принцип максимума

Теорема. *Пусть* $u(\vec{x})$ *— гармоническая в ограниченной области* G *и непрерывна в* $\overline{G}$. *Если* $u(\vec{x}) \leqslant M$ *на* ∂G, *то* $u(\vec{x}) \leqslant M$ *в* G ($\max\limits_{\vec{x}\in\overline{G}} u(\vec{x}) = \max\limits_{\vec{x}\in\partial G} u(\vec{x})$).

Доказательство. Доказательство проведем методом И. И. Привалова (см. [3]).

Пусть $u(\vec{x}^0) > M$ в некоторой точке $\vec{x}^0 \in G$. Рассмотрим $u_\varepsilon(\vec{x}) = u(\vec{x}) + \varepsilon[(x_1 - x_1^0)^2 + \ldots + (x_n - x_n^0)^2]$. Тогда 1) $\Delta u_\varepsilon(\vec{x}) = 2n\varepsilon$; 2) $u_\varepsilon(\vec{x}^0) > M$; и если выбрать $0 < \varepsilon < \dfrac{u(\vec{x}^0) - M}{2d^2}$, где $d^2 = \max\limits_{\partial G} |\vec{x} - \vec{x}^0|^2$, то $u_\varepsilon(\vec{x}) \leqslant M + \dfrac{u(\vec{x}^0) - M}{2d^2} d^2 = \dfrac{u(\vec{x}^0) + M}{2} < u(\vec{x}^0)$, $\vec{x} \in \partial G \Rightarrow \max\limits_{\overline{G}} u_\varepsilon(\vec{x}) = u_\varepsilon(\vec{y}^0)$, $\vec{y}^0 \in G$ — некоторая точка из G. Тогда $\dfrac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial x_k^2}(\vec{y}^0) \leqslant 0$ (так как $\vec{y}^0$ — точка максимума) $\Rightarrow \Delta u_\varepsilon(\vec{y}^0) \leqslant 0$ — противоречие с $\Delta u_\varepsilon(\vec{x}) = 2n\varepsilon$. □

Следствие (принцип минимума). *Если* $u \in C(\overline{G})$ *и гармонична в ограниченной области* G, *то* $\min\limits_{\overline{G}} u(\vec{x}) = \min\limits_{\partial G} u(\vec{x})$.

Доказательство. $\min\limits_{\overline{G}} u(\vec{x}) = -\max\limits_{\overline{G}}[-u(\vec{x})] = -\max\limits_{\partial G}[-u(\vec{x})] = \min\limits_{\partial G} u(\vec{x})$ □

Постановка задачи Дирихле

Найти гармоническую в ограниченной области G функцию $u(\vec{x})$, непрерывную на замыкании $\overline{G} = G \cup \Gamma$, где Γ — граница G, и такую что u на Γ совпадает с заданной непрерывной функцией $f(\vec{x})$:

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \ \text{ в } \ G \\ u\big|_\Gamma = f. \end{cases}$$

Постановка задачи Неймана

Пусть область G ограничена кусочно-гладкой поверхностью Γ. Найти гармоническую в G функцию u, непрерывную на $\overline{G}$, что на границе Γ $\dfrac{\partial u}{\partial n}$ совпадает с заданной функцией $f(\vec{x})$, где $\vec{n}$ — внешняя нормаль к Γ:

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \ \text{ в } \ G \\ \dfrac{\partial u}{\partial n}\Big|_\Gamma = f. \end{cases}$$

Следствия принципа максимума

Следствие 1. *Задача Дирихле имеет (если имеет) единственное решение.*

Доказательство. Пусть u_1 и u_2 — два решения одной и той же задачи Дирихле

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \\ u\big|_\Gamma = f. \end{cases}$$

Тогда $u = u_1 - u_2$ удовлетворяет задаче $\Delta u = 0$ и $u\big|_\Gamma = 0$, причем $u \in C(\overline{G})$. Согласно принципу максимума $\max\limits_{\overline{G}} u = \max\limits_{\Gamma} u = 0$ и согласно принципу минимума $\min\limits_{\overline{G}} u = \min\limits_{\Gamma} u = 0 \Rightarrow u \equiv 0$ в $G \Rightarrow u_1 \equiv u_2$ в G. $\square$

Следствие 2. *Пусть $u_n(\vec{x})$ — гармонические в ограниченной области G и непрерывны на замыкании $\overline{G} = G \cup \Gamma$, где Γ — граница G. Если $u_n(\vec{x})$ равномерно сходятся на Γ, то $u_n(\vec{x})$ сходятся равномерно на $\overline{G}$.*

Доказательство. Согласно критерию Коши равномерной сходимости на Γ $\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N} \mid \forall m, n \geqslant N \Rightarrow |u_n(\vec{x}) - u_m(\vec{x})| < \varepsilon\ \forall \vec{x} \in \Gamma$, или $-\varepsilon < u_n(\vec{x}) - u_m(\vec{x}) < \varepsilon$. Следовательно, $\max\limits_{\overline{G}}[u_n(\vec{x}) - u_m(\vec{x})] = \max\limits_{\Gamma}[u_n(\vec{x}) - u_m(\vec{x})] < \varepsilon$ и аналогично $\min\limits_{\overline{G}}[u_n(\vec{x}) - u_m(\vec{x})] = \min\limits_{\Gamma}[u_n(\vec{x}) - u_m(\vec{x})] > -\varepsilon$, то-есть $|u_n(\vec{x}) - u_m(\vec{x})| < \varepsilon\ \forall \vec{x} \in \overline{G}$. По критерию Коши равномерной сходимости на $\overline{G}$ последовательность $u_n(\vec{x})$ сходится равномерно на $\overline{G}$. $\square$

Пример (неединственности). $G = \{y > 0\}$ в $\mathbb{R}^2$, $u_1(x, y) = y$, $u_2(x, y) = 2y$, $f = 0$.

Единственность задачи Неймана

Теорема 1. *Два решения u_1 и u_2 одной и той же задачи Неймана*

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial n}\Big|_\Gamma = f, \end{cases}$$

непрерывно-дифференцируемые в $\overline{G}$, могут отличаться только на постоянную величину.

Доказательство. Пусть $u(\vec{x}) = u_1(\vec{x}) - u_2(\vec{x})$. Тогда u удовлетворяет задаче $\Delta u = 0$ в G и $\dfrac{\partial u}{\partial n}\Big|_\Gamma = 0$. Рассмотрим

$$\iint\limits_G \dots \int u \Delta u \, dx_1 \dots dx_n.$$

Преобразуем

$$\iint\limits_G \dots \int u \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} \, dx_1 \dots dx_n = \int\limits_\Gamma \dots \int u \frac{\partial u}{\partial x_k} \cos(\vec{n}, x_k) \, dS - \\ - \iint\limits_G \dots \int \Big(\frac{\partial u}{\partial x_k}\Big)^2 dx_1 \dots dx_n.$$

Складываем для $k = 1, \dots, n \Rightarrow$

$$0 = \iint\limits_G \dots \int u \Delta u \, dx_1 \dots dx_n = \int\limits_\Gamma \dots \int u \frac{\partial u}{\partial n} \, dS - \\ - \iint\limits_G \dots \int \sum_{k=1}^n \Big(\frac{\partial u}{\partial x_k}\Big)^2 dx_1 \dots dx_n$$

$$\Rightarrow \iint\limits_G \dots \int \Big(\frac{\partial u}{\partial x_k}\Big)^2 dx_1 \dots dx_n = 0 \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x_k} = 0 \text{ в } G \Rightarrow u \equiv \mathrm{const}. \qquad \square$$

Необходимое условие разрешимости задачи Неймана

Теорема 2. *Пусть задача Неймана*

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} = f \end{cases}$$

имеет непрерывно-дифференцируемое в $\overline{G}$ решение. Тогда

$$\int\limits_\Gamma \dots \int f \, dS = 0.$$

Доказательство. Рассмотрим интеграл (вообще говоря, несобственный)

$$\iint\limits_G \dots \int \Delta u \, dx_1 \dots dx_n.$$

Согласно формуле интегрирования по частям

$$\int\!\!\int_G\!\!\dots\!\int 1\frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2}\,dx_1\dots dx_n = \int_\Gamma\!\!\dots\!\int \frac{\partial u}{\partial x_k}\cos(\vec{n}, x_k)\,dS.$$

Складывая для $k = 1, \dots, n \Rightarrow$

$$0 = \int\!\!\int_G\!\!\dots\!\int \Delta u\,dx_1\dots dx_n = \int_\Gamma\!\!\dots\!\int \frac{\partial u}{\partial n}\,dS,$$

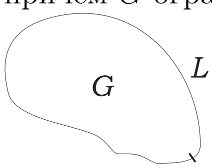
что и требовалось доказать. $\square$

Сведение задачи Неймана к задаче Дирихле ($n = 2$)

Пусть $u \in C^1(\overline{G}) \cap C^2(G)$ — решение задачи Неймана

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial n}\right|_L = f(x, y), \end{cases}$$

причем G ограничена кусочно-гладкой кривой L.



Зафиксируем $(x_0, y_0) \in L$ и определим функцию на L формулой $g(x, y) = \int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} f(x, y)\,ds$, где криволинейный интеграл берется вдоль L против часовой стрелки. Очевидно, $g(x, y) \in C(L)$, так как $\int\limits_L f(x, y)\,ds = 0$, согласно необходимому условию разрешимости задачи Неймана. Определим

$$v(x, y) = \int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} -\frac{\partial u}{\partial y}\,dx + \frac{\partial u}{\partial x}\,dy,$$

где (x_0, y_0) соединяется с (x, y) по любой кусочно-гладкой кривой, лежащей в $\overline{G}$.

Лекция XII

Сведение задачи Неймана к задаче Дирихле (продолжение)

Прошлый раз определили функцию v, сопряженную к гармонической функции u, и функцию $g(x, y)$, непрерывную на L. Теперь сформулируем строгое утверждение.

Теорема 1. *Пусть $u \in C^1(\overline{G})$, тогда*

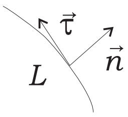
$$\begin{cases} \Delta u = 0, u \in C^1(\overline{G}), \\ \dfrac{\partial u}{\partial n}\Big|_L = f(x, y) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta v = 0, v \in C^1(\overline{G}), \\ v\big|_L = g(x, y), \end{cases}$$

где v — сопряженная к u гармоническая функция, а $g(x, y) = (L) \int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} f\, ds$ (здесь и далее знак (L) перед интегралом означает, что интеграл берется вдоль L).

Доказательство. $v(x, y) = \int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} -\dfrac{\partial u}{\partial y}\, dx + \dfrac{\partial u}{\partial x}\, dy \Rightarrow \dfrac{\partial v}{\partial x} = -\dfrac{\partial u}{\partial y}, \dfrac{\partial v}{\partial y} = \dfrac{\partial u}{\partial x} \Rightarrow \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2} = -\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = 0$, так как $u \in C^2(G) \Rightarrow v$ — гармоническая.

Кроме того, из соотношения между частными производными функций u и v (которые, кстати, означают, что функция v сопряжена к функции u) вытекает, что если $\vec{n}$, $\vec{\tau}$ — правая ортонормированная система векторов, то $\dfrac{\partial v}{\partial \tau} = \dfrac{\partial u}{\partial n}$ в G. Действительно, если $\vec{n} = (\cos\alpha, \sin\alpha)$, то $\vec{\tau} = (-\sin\alpha, \cos\alpha)$, поэтому $\dfrac{\partial v}{\partial \tau} = \dfrac{\partial v}{\partial x}(-\sin\alpha) + \dfrac{\partial v}{\partial y}\cos\alpha = -\dfrac{\partial u}{\partial y}(-\sin\alpha) + \dfrac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha = \dfrac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \dfrac{\partial u}{\partial y}\sin\alpha = \dfrac{\partial u}{\partial n}$.

Если перейти к пределу к точке границы области G (используя непрерывность частных производных функций u, v), то получим



$\dfrac{dv}{ds} = \dfrac{\partial v}{\partial \tau} = \dfrac{\partial u}{\partial n} = f(x,y)$, где s — длина дуги кривой L, отсчитываемая от (x_0, y_0) против часовой стрелки, τ — единичный вектор касательной к кривой L, а $\vec{n}$ — внешняя нормаль к границе G. Следовательно, если $(x,y) \in L$, то $v(x,y) = (L)\displaystyle\int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} \frac{dv}{ds}\,ds = (L)\int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} \frac{\partial v}{\partial \tau}\,ds = (L)\int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} f\,ds = g(x,y)$. Значит, $v \in C^1(\overline{G})$, $\Delta v = 0$ в G и $v\big|_L = g$. □

Постановка третьей краевой задачи

Найти гармоническую в G и непрерывную на $\overline{G}$ функцию u, у которой $\exists \left.\dfrac{\partial u}{\partial n}\right|_\Gamma$ и $\left.\dfrac{\partial u}{\partial n} + a(\vec{x})u\right|_\Gamma = f$, где a и f — заданные функции на Γ.

Упражнение. Доказать единственность третьей краевой задачи в предположениях $u \in C^1(\overline{G})$ и $a(\vec{x}) \geqslant 0$, $a(\vec{x}) \not\equiv 0$, $a(\vec{x})$ — кусочно-непрерывна.

Метод Фурье для эллиптических уравнений

Рассмотрим $\Delta u = 0$, $n = 2$ и $G = \{x^2+y^2 < 1\}$. Метод Фурье применяется только к прямоугольным областям, поэтому решение ищем в полярных координатах.

I. Разделение переменных. Ищем решение в виде $u(x,y) = R(r)\Phi(\varphi)$.

Упражнение. Доказать, что $\Delta u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u}{\partial r} + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}$.

Тогда $\Delta u = R''\Phi + \dfrac{1}{r}R'\Phi + \dfrac{1}{r^2}R\Phi'' = 0$, разделяем переменные

$$-\frac{R'' + \frac{1}{r}R'}{\frac{1}{r^2}R} = \frac{\Phi''}{\Phi}.$$

Левая и правая части зависят каждая от своей переменной, значит они обе постоянны и равны λ. Рассмотрим случаи разных знаков λ.

а) $\lambda = \omega^2 > 0 \Rightarrow \Phi(\varphi) = A\operatorname{ch}\omega\varphi + B\operatorname{sh}\omega\varphi$. Так как функция $u(x,y)$ непрерывна в G и $R(r) \not\equiv 0$, то функция $\Phi(\varphi)$ должна быть 2π-периодической $\Rightarrow A = B = 0$.

б) $\lambda = 0 \Rightarrow \Phi(\varphi) = A + B\varphi$ — 2π-периодическая $\Rightarrow B = 0$, $\Phi_0(\varphi) = \dfrac{1}{2}$, а любое решение $\Phi(\varphi) = A_0\Phi_0(\varphi)$.

в) $\lambda = -\omega^2 < 0 \Rightarrow \Phi(\varphi) = A\cos\omega\varphi + B\sin\omega\varphi$ — 2π-периодическая $\Rightarrow \omega_n = n$, $n \in \mathbb{N} \Rightarrow \Phi_n^{(1)}(\varphi) = \cos n\varphi$, $\Phi_n^{(2)}(\varphi) = \sin n\varphi$, а любое решение $\Phi_n(\varphi) = A_n\cos n\varphi + B_n\sin n\varphi$.

Теперь решаем по $r \Rightarrow R'' + \dfrac{1}{r}R' = \dfrac{n^2}{r^2}R$, ищем решения в виде $R(r) = r^\mu \Rightarrow \mu(\mu-1) + \mu = n^2 \Rightarrow \mu^2 = n^2 \Rightarrow \mu = \pm n \Rightarrow R_n^{(1)}(r) = r^n$, $R_n^{(2)}(r) = r^{-n}$ — ФСР. Но r^{-n} — неограничены в G, а $u(x,y)$ должна быть ограничена при $r \to 0 \Rightarrow$ откидываются. Таким образом, $R_n(r) = r^n$. При $n = 0$ перепишем уравнение в виде $(rR')' = 0 \Rightarrow rR' = -C_2 \Rightarrow R' = -\dfrac{C_2}{r}$ $\Rightarrow R(r) = C_1 + \underbrace{C_2\ln\dfrac{1}{r}}_{\substack{\text{неогр}\\ \text{при}\\ r\to 0}} \Rightarrow R_0(r) = 1$.

Итак, общий вид решений

$$u_n(x,y) = r^n(A_n\cos n\varphi + B_n\sin n\varphi), \quad n \in \mathbb{N},$$
$$u_0(x,y) = \frac{A_0}{2}.$$

II. Метод Фурье. Ищем решение в виде

$$u(x,y) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n(A_n\cos n\varphi + B_n\sin n\varphi), \quad r < 1.$$

При $r = 1$ должно быть $\dfrac{A_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} A_n\cos n\varphi + B_n\sin n\varphi = f(\varphi)$ — заданная функция на $[0, 2\pi]$, 2π-периодическая. Если $f \in C^2[0,2\pi]$ и 2π-периодическая, то A_n, B_n — коэффициенты Фурье функции f — имеют порядок $A_n, B_n = O(\dfrac{1}{n^2}) \Rightarrow$ ряд $\dfrac{A_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} r^n(A_n\cos n\varphi + B_n\sin n\varphi)$ сходится в замкнутом круге $r \leqslant 1$ равномерно $\Rightarrow$

$$u(x,y) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n(A_n\cos n\varphi + B_n\sin n\varphi), \quad r \leqslant 1,$$

непрерывна в $\overline{G} = \{x^2 + y^2 \leqslant 1\}$ и совпадает на окружности $r = 1$ с функцией f. Осталось проверить, что $u(x,y)$ — гармоническая в G.

Заметим, что $u_n(x,y) = r^n(A_n\cos n\varphi + B_n\sin n\varphi) = \mathrm{Re}[(A_n - iB_n)z^n]$, где $z = re^{i\varphi} \Rightarrow u_n$ — гармонические в G, как действительные части аналитических (см. курс комплексного анализа). Чтобы проверить, что $u(x,y) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n(x,y)$ — гармоническая в G, надо обосновать, почему ряд для $u(x,y)$ можно дифференцировать по x и по y два раза.

Заметим, что $\dfrac{\partial}{\partial x} u_n(x,y) = \mathrm{Re}\Big\{\dfrac{\partial}{\partial x}\Big[(A_n - iB_n)z^n\Big]\Big\} = \mathrm{Re}\big[\big((A_n - iB_n)z^n\big)'\big] = \mathrm{Re}[n(A_n - iB_n)z^{n-1}]$ и аналогично $\dfrac{\partial^2 u_n}{\partial x^2} = \mathrm{Re}[n(n-1)(A_n - iB_n)z^{n-2}] \Rightarrow \Big|\dfrac{\partial^2}{\partial x^2} u_n(x,y)\Big| \leqslant n(n-1)r^{n-2} \cdot 2C$, где $|A_n|, |B_n| \leqslant C \Rightarrow$ ряд из $\dfrac{\partial^2}{\partial x^2} u_n(x,y)$ сходится равномерно в каждом замкнутом круге $r \leqslant r_0$, где $r_0 \in [0,1) \Rightarrow$ ряд можно дифференцировать почленно два раза по x. Аналогично по $y \Rightarrow$

$$\Delta u = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\Delta u_n}_{0} = 0$$

в любом замкнутом круге $r \leqslant r_0 < 1$. Так как $r_0 \in [0,1)$ — любое $\Rightarrow$ и во всем круге $r < 1$.

Замечание. Сходимость и гармоничность ряда для $u(x,y)$ справедлива для любой функции f с ограниченными A_n, B_n (в частности, для любой непрерывной 2π-периодической функции $f(\varphi)$). А вот непрерывность в $\overline{G}$ (и совпадение на ∂G с f) мы доказали только для $f \in C^2_{2\pi}(\mathbb{R})$. На самом деле непрерывность в $\overline{G}$ (и совпадение на границе с f) имеет место (в некотором специальном смысле) для любой непрерывной 2π-периодической функции $f(\varphi)$.

Лекция XIII

Интеграл Пуассона

Прошлый раз доказали, что если $f(\varphi) \in C^2_{2\pi}(\mathbb{R})$, то задача Дирихле

$$\begin{cases} \Delta u = 0, r = \sqrt{x^2 + y^2} < 1, \\ u\big|_{r=1} = f(\varphi) \end{cases}$$

имеет решение

$$u(x, y) = u(r, \varphi) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi) r^n, \qquad \text{(XIII.1)}$$

где A_n, B_n — коэффициенты Фурье функции $f(\varphi)$,

$$A_n = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(\theta) \cos n\theta \, d\theta, \quad B_n = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(\theta) \sin n\theta \, d\theta.$$

Преобразуем выражение для u, подставив выражение для A_n, B_n в (XIII.1)

$$u(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(\theta) \, d\theta + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(\theta) [\cos n\theta \cos n\varphi + \sin n\theta \sin n\varphi] \, d\theta \, r^n =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(\theta) \Big[1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos n(\varphi - \theta) \Big] \, d\theta, \quad r < 1.$$

Сумма $1 + 2 \sum\limits_{n=1}^{\infty} r^n \cos n(\varphi - \theta)$ называется ядром Пуассона для единичного круга и обозначается $P_r(\varphi - \theta)$. Найдем явное выражение для

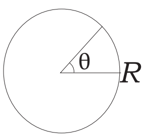
$$
\begin{aligned}
P_r(\theta) = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos n\theta = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (e^{in\theta} + e^{-in\theta}) = \\
= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} r^{|n|} e^{in\theta} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n + \sum_{n=1}^{\infty} \bar{z}^n = \frac{1}{1-z} + \frac{\bar{z}}{1-\bar{z}} = \\
= \frac{1 - \bar{z} + \bar{z} - z\bar{z}}{|1-z|^2} = \frac{1-|z|^2}{|1-z|^2} = \frac{1-r^2}{|1 - r\cos\theta - ir\sin\theta|^2} = \\
= \frac{1-r^2}{(1-r\cos\theta)^2 + r^2\sin^2\theta} = \frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos\theta}.
\end{aligned}
$$

Таким образом,

$$
u(r,\varphi) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos(\varphi-\theta)}\,d\theta.
$$

Заметим, что это выражение имеет смысл для любой непрерывной функции $f(\theta) \in C_{2\pi}(\mathbb{R})$, а не только для $f \in C^2_{2\pi}(\mathbb{R})$. Мы докажем, что интеграл Пуассона дает решение задачи Дирихле в случае произвольной непрерывной граничной функции.

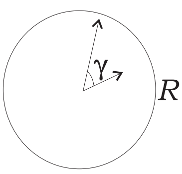
Аналогичную формулу можно написать и для круга радиуса R



$$
u(r,\varphi) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\frac{R^2-r^2}{R^2+r^2-2Rr\cos(\varphi-\theta)}\,d\theta, \quad r < R,
$$

и аналогичная формула существует и для $\mathbb{R}^3$ в шаре

$$
u(r,\theta,\varphi) = \frac{1}{4\pi}\iint\limits_{\substack{-\pi\leqslant\varphi'\leqslant\pi\\ 0\leqslant\theta'\leqslant\pi}} f(\theta',\varphi')\frac{R^2-r^2}{(R^2+r^2-2Rr\cos\gamma)^{3/2}}\sin\theta' d\theta' d\varphi',
$$



где γ — угол между радиус-векторами точек (r,θ,φ) (внутри шара) и (R,θ',φ') (на поверхности шара), заданных в сферических координатах, а $\sin\theta'\,d\theta'\varphi'$ — элемент телесного угла на сфере и $f(\theta',\varphi')$ — заданная непрерывная функция на $[0,\pi]\times[-\pi,\pi]$.

Определение XIII.1. *Интегралом Пуассона в шаре B_R с центром в* *нуле и границей S_R называется интеграл*

$$u(\vec{x}) = \frac{1}{c_n} \underset{S_R}{\int \ldots \int} \frac{R^{n-2}(R^2 - |\vec{x}|^2) f(\xi)\, dS_1(\vec{\xi})}{(R^2 + |\vec{x}|^2 - 2R|\vec{x}| \cos\gamma)^{n/2}},$$

в котором $f(\vec{\xi})$ — заданная непрерывная функция на S_R, γ — угол между $\vec{x}$ и $\vec{\xi}$, $dS_1(\vec{\xi})$ — элемент телесного угла (площадь на S_R, деленная на R^{n-1}) и c_n — площадь единичной сферы в $\mathbb{R}^n$.

Функция

$$P(\vec{x}, \vec{\xi}) = \frac{R^{n-2}(R^2 - |\vec{x}|^2)}{(R^2 + |\vec{x}|^2 - 2R|\vec{x}| \cos\gamma)^{n/2}} = \frac{R^{n-2}(R^2 - |\vec{x}|^2)}{|\vec{x} - \vec{\xi}|^n}$$

называется ядром Пуассона в шаре B_R.

Свойства ядра Пуассона

1) $P(\vec{x}, \vec{\xi}) > \forall\, \vec{x} \in B_R\ \forall\, \vec{\xi} \in S_R$.

2) $P(\vec{x}, \vec{\xi})$ гармонична в B_R для каждого фиксированного $\vec{\xi} \in S_R$. Действительно, представим $|\vec{x}|^2 = |\vec{x} - \vec{\xi}|^2 + 2(\vec{x} - \vec{\xi}, \vec{\xi}) + R^2 \Rightarrow$

$$P(\vec{x}, \vec{\xi}) = \frac{R^2}{|\vec{x} - \vec{\xi}|^{n-2}} - \frac{2R^{n-2}(\vec{x} - \vec{\xi}, \vec{\xi})}{|\vec{x} - \vec{\xi}|^n}.$$

Но $\dfrac{1}{|\vec{x} - \vec{\xi}|^{n-2}}$ — гармоническая (так как $\dfrac{1}{r^{n-2}}$ — гармоническая по задаче, которая была на позапрошлой лекции), а $\dfrac{(\vec{x} - \vec{\xi}, \vec{\xi})}{|\vec{x} - \vec{\xi}|^n} = \dfrac{\partial}{\partial \vec{\xi}} \dfrac{1}{|\vec{x} - \vec{\xi}|^{n-2}}$ с точностью до числового коэффициента $\Rightarrow$ тоже гармоническая, так как производная по параметру гармонической функции тоже функция гармоническая $\Delta_x \dfrac{\partial}{\partial \vec{\xi}} \dfrac{1}{|\vec{x} - \vec{\xi}|^{n-2}} = \dfrac{\partial}{\partial \vec{\xi}} \Delta_x \dfrac{1}{|\vec{x} - \vec{\xi}|^{n-2}} = 0$.

3) $\dfrac{1}{c_n} \underset{S_R}{\int \ldots \int} P(\vec{x}, \vec{\xi})\, dS_1(\vec{\xi}) = 1$, $\vec{x} \in B_R$. Действительно, рассмотрим функцию $u(\vec{x}) = \dfrac{1}{c_n} \underset{S_R}{\int \ldots \int} P(\vec{x}, \vec{\xi})\, dS_1(\vec{\xi})$. $\vec{x} = 0 \Rightarrow u(\vec{0}) = \dfrac{1}{c_n} \underset{S_R}{\int \ldots \int} 1\, dS_1(\vec{\xi}) = 1$. Далее, $u(\vec{x})$ — гармоническая в B_R, так как интеграл можно дифференцировать по x_1, …, x_n под знаком интеграла

и $P(\vec{x},\vec{\xi})$ — гармоническая по x_1, …, x_n (свойство 2). И, наконец, $u(\vec{x})$ зависит только от $r = |\vec{x}|$.

Пусть $|\vec{x}| = r$ и сделаем поворот $\vec{\xi} = U\vec{\eta}$, чтобы точка $\vec{x}$ перешла в точку $(r, 0, \ldots, 0)$. Так как при ортогональных заменах площадь не меняется, то мы получим

$$u(\vec{x}) = frac1c_n \int\limits_{S_R}\!\!\ldots\!\int P(\vec{x}, U\vec{\eta})\, dS_1(\vec{\eta}) =$$

$$= \frac{1}{c_n}\int\limits_{S_R}\!\!\ldots\!\int P(U(r,0,\ldots,0), U\vec{\eta})\, dS_1(\eta).$$

Но $P(U\vec{x}, U\vec{\xi}) = P(\vec{x},\vec{\xi})$ $\forall\, \vec{x} \in B_R$ и $\forall\, \vec{\xi} \in S_R$ (свойство инвариантности ядра Пуассона), так как

$$P(U\vec{x},\vec{\xi}) = \frac{R^{n-2}(R^2 - |U\vec{x}|^2)}{(R^2 + |U\vec{x}|^2 - 2(U\vec{x}, U\vec{\xi}))^{n/2}} = \frac{R^{n-2}(R^2 - |\vec{x}|^2}{(R^2 + |\vec{x}|^2 - 2(\vec{x},\vec{\xi}))^{n/2}}$$

$\Rightarrow u(\vec{x}) = u(r, 0, \ldots, 0)$, что и требовалось доказать.

Следовательно, по задаче $u(\vec{x}) = C_1 + \dfrac{1}{r^{n-2}}$. Так как $u(\vec{x})$ — непрерывна в $B_R \Rightarrow C_2 = 0 \Rightarrow u(\vec{x}) = C_1$. Но $u(0, 0, \ldots, 0) = 1 \Rightarrow C_1 = 1$.

4) $\forall\, \vec{\xi}_0 \in S_R$ и любой окрестности $U_\delta(\vec{\xi}_0)$ существует окрестность $U_{\delta'}(\vec{\xi}_0)$, что $P(\vec{x},\vec{\xi}) \rightrightarrows 0$ при $|\vec{x}| \to R-$, $\vec{x} \in U_{\delta'}(\vec{\xi}_0)$, равномерно по $\vec{\xi} \in S_R \setminus U_\delta(\vec{\xi}_0)$.

Доказательство. Ядро Пуассона преобразуется к виду

$$P(\vec{x},\vec{\xi}) = \frac{R^{n-2}(R^2 - |\vec{x}|^2)}{|\vec{x} - \vec{\xi}|^n}.$$

Пусть $\vec{x} \in U_{\delta'}(\vec{\xi}_0)$, $\vec{\xi} \in S_R \setminus U_\delta(\vec{\xi}_0)$, $\delta' < \delta$. Тогда $|\vec{x} - \vec{\xi}| \geqslant |\vec{\xi} - \vec{\xi}_0| - |\vec{x} - \vec{\xi}_0| \geqslant \delta - \delta' \Rightarrow$

$$P(\vec{x},\vec{\xi}) \leqslant \frac{R^{n-2}}{(\delta - \delta')^n}(R^2 - |\vec{x}|^2).$$

Значит, $P(\vec{x},\vec{\xi}) < \varepsilon$ при $\vec{x} \in U_{\delta'}(\vec{\xi}_0)$, $\xi \in S_R \setminus U_\delta(\vec{\xi}_0)$, если $|\vec{x}|$ достаточно близко к R, что и требовалось доказать.

Теорема 1. *Если $f \in C(S_R)$, то интеграл Пуассона*

$$u(\vec{x}) = \frac{1}{c_n}\int\limits_{S_R}\!\!\ldots\!\int P(\vec{x},\vec{\xi}) f(\vec{\xi})\, dS_1(\vec{\xi})$$

дает решение задачи Дирихле в шаре B_R с граничной функцией $f(\vec{\xi})$.

Доказательство. 1) $u(\vec{x})$ гармонична в B_R, так как интеграл можно дифференцировать по параметрам x_1, ..., x_n два раза и $P(\vec{x},\vec{\xi})$ — гармонична по $\vec{x}$

$$\Delta_x u(\vec{x}) = \frac{1}{c_n}\int\limits_{S_R}\!\!\dots\!\!\int \underbrace{\Delta_x P(\vec{x},\vec{\xi})}_{=0} f(\vec{\xi})\,dS_1(\vec{\xi}) = 0.$$

2) $\forall\,\vec{\xi}_0 \in S_R \lim\limits_{\substack{\vec{x}\to\vec{\xi}_0\\ \vec{x}\in B_R}} u(\vec{x}) = f(\vec{\xi}_0).$

Действительно, так как $f(\vec{\xi})$ непрерывна в $\vec{\xi}_0$, то $\forall\,\varepsilon > 0\ \exists\,\delta > 0 \mid |\vec{\xi}-\vec{\xi}_0| < \delta \Rightarrow |f(\vec{\xi}) - f(\vec{\xi}_0)| < \varepsilon$, $\vec{\xi} \in S_R$. Выберем такую $U_{\delta'}(\vec{\xi}_0)$, чтобы $P(\vec{x},\vec{\xi}) \rightrightarrows 0$ при $|\vec{x}| \to R-$ для $\vec{x} \in U_{\delta'}(\vec{\xi}_0)$, $\vec{x} \in B_R$, $\vec{\xi} \in S_R \setminus U_\delta(\vec{\xi}_0)$. Тогда

$$u(\vec{x}) - f(\vec{\xi}_0) \underset{\substack{\uparrow\\ \text{св-во нормированности}\\ \text{ядра Пуассона}}}{=} \frac{1}{c_n}\int\limits_{S_R}\!\!\dots\!\!\int [f(\vec{\xi}) - f(\vec{\xi}_0)]P(\vec{x},\vec{\xi})\,dS_1(\vec{\xi}) =$$

$$= \frac{1}{c_n}\int\limits_{U_\delta(\vec{\xi}_0\cap S_R}\!\!\dots\!\!\int [f(\vec{\xi})-f(\vec{\xi}_0)]P(\vec{x},\vec{\xi})\,dS_1(\vec{\xi}) + \frac{1}{c_n}\int\limits_{S_R\setminus U_\delta(\vec{\xi}_0)}\!\!\dots\!\!\int [f(\vec{\xi})-f(\vec{\xi}_0)]P(\vec{x},\vec{\xi})\,dS_1(\vec{\xi})$$

$\Rightarrow$

$$|u(\vec{x}) - f(\vec{\xi}_0)| < \varepsilon\frac{1}{c_n}\int\limits_{S_R}\!\!\dots\!\!\int P(\vec{x},\vec{\xi})\,dS_1(\vec{\xi}) + \frac{2C}{c_n}\int\limits_{S_R\setminus U_\delta(\vec{\xi}_0)}\!\!\dots\!\!\int P(\vec{x},\vec{\xi})\,dS_1(\vec{\xi}),$$

где $C = \max\limits_{\vec{\xi}\in S_R}|f(\vec{\xi})|$. Так как при $\vec{x} \to \vec{\xi}_0$ имеем $|\vec{x}| \to |\vec{\xi}_0| = R$, то существует такое $\delta'' > 0$, что при $|\vec{x} - \vec{\xi}_0| < \delta''$ будет выполнено $P(\vec{x},\vec{\xi}) < \varepsilon$ при $\vec{x} \in U_{\delta'}(\vec{\xi}_0)$, $\vec{\xi} \in S_R \setminus U_\delta(\vec{\xi}_0)$. Выбирая $\delta_0 = \min(\delta', \delta'')$, получим, что $|u(\vec{x}) - f(\vec{\xi}_0)| < \varepsilon + 2C\varepsilon = \varepsilon(1 + 2C)$. Отсюда и следует требуемое утверждение.

3) Итак, доопределив $u(\vec{x})$ на S_R значениями $f(\vec{\xi})$, получим функцию, непрерывную на $\overline{B}_R = B_R \cup S_R$, внутри B_R гармоническую и на S_R совпадающую с $f(\vec{\xi})$. Следовательно, $u(\vec{x})$ — решение задачи Дирихле. $\square$

Следствие 1. *Задача Дирихле в шаре корректно поставлена* ($\exists$+!+ *устойчивость по граничной функции).*

Доказательство. Единственность мы доказывали раньше (следствие 1 из лекции Л XI), непрерывная зависимость вытекает из следствия 2 из лекции Л XI, а существование дается теоремой 1. $\square$

Следствие 2. *Равномерный предел на компактах гармонических функций в области G также гармоничен.*

Доказательство. Пусть $\vec{x}^0 \in G$ и u_n — гармонические в G. Выберем шар $\overline{B}_R(\vec{x}^0) \subset G$. По предыдущей теореме и единственности решения задачи Дирихле

$$u_n(\vec{x}) = \frac{1}{c_n} \int \ldots \int\limits_{S_R(\vec{x}^0)} \frac{R^{n-2}(R^2 - |\vec{x} - \vec{x}^0|^2)}{|\vec{x} - \vec{\xi}|^n} u_n(\vec{\xi})\, dS_1(\vec{\xi})$$

(так как $u_n(\vec{x})$ является решением задачи Дирихле по своим значениям на границе шара). Переходя к пределу $u(\vec{x}) = \lim\limits_{n\to\infty} u_n(\vec{x})$ при фиксированном $\vec{x} \in B_R(\vec{x}^0)$, получим

$$u(\vec{x}) = \frac{1}{c_n} \int \ldots \int\limits_{S_R(\vec{x}^0)} \frac{R^{n-2}(R^2 - |\vec{x} - \vec{x}^0|^2)}{|\vec{x} - \vec{\xi}|^n} u(\vec{\xi})\, dS_1(\vec{\xi}). \tag{XIII.2}$$

(в силу равномерной сходимости на $S_R(\vec{x}^0)$ переход к пределу под знаком интеграла правомерен). Опять по предыдущей теореме $u(\vec{x})$ гармонична в $B_R(\vec{x}^0)$ (как интеграл Пуассона непрерывной функции). Следовательно, u гармонична в $\vec{x}^0$, а так как $\vec{x}^0$ — произвольная точка G, то и во всей G. □

Объединяя следствие 2 настоящей лекции со следствием 2 из лекции Л XI, получаем уточнение последнего, которое часто называют первой теоремой Гарнака.

Следствие 3. *Если последовательность (u_n) функций, гармонических в ограниченной области G и непрерывных на замыкании $\overline{G}$, сходится равномерно на границе ∂G, то она сходится равномерно в $\overline{G}$ к некоторой функции, гармонической внутри и непрерывной на замыкании $\overline{G}$.*

Следствие 4 (теорема о среднем значении). *Если $u(\vec{x})$ гармонична в области G и шар $\overline{B}_R(\vec{x}^0) \subset G$, то*

$$u(\vec{x}^0) = \frac{1}{c_n} \int \ldots \int\limits_{S_R(\vec{x}^0)} u(\vec{\xi})\, dS_1(\vec{\xi}) = \frac{1}{c_n} \int \ldots \int\limits_{S_1(\vec{0})} u(\vec{x}^0 + R\vec{\eta})\, dS_1(\vec{\eta}). \tag{XIII.3}$$

Доказательство. Положим в (XIII.2) $\vec{x} = \vec{x}^0$. □

Другими словами, среднее арифметическое значений гармонической функции на поверхности любого шара из области гармоничности равно значению этой функции в центре шара. Именно это свойство и объясняет название «гармоническая».

Следствие 5 (вторая теорема о среднем значении). *В условиях предыдущего следствия*

$$u(\vec{x}^0) = \frac{1}{V(B_R)} \iint\limits_{B_R(\vec{x}^0)} \dots \int u(\vec{x})\, dx_1 \dots dx_n,$$

где $V(B_R)$ обозначает объем шара радиуса R в $\mathbb{R}^n$.

Доказательство. Возьмем в качестве исходной формулу (XIII.3), положим в ней $R = r$, умножим ее на r^{n-1} и проинтегрируем от 0 до R

$$u(\vec{x}^0)\frac{R^n}{n} = \frac{1}{c_n} \int\limits_0^R \int\limits_{S_1(\vec{0})} \dots \int u(\vec{x}^0 + r\vec{\eta})\, \underbrace{r^{n-1}\, dS_1(\vec{\eta}) dr}_{dx_1 \dots dx_n} =$$

$$= \frac{1}{c_n} \iint\limits_{B_R(\vec{x}^0)} \dots \int u(\vec{x})\, dx_1 \dots dx_n,$$

откуда

$$u(\vec{x}^0) = \frac{n}{c_n R^n} \iint\limits_{B_R(\vec{x}^0)} \dots \int u(\vec{x})\, dx_1 \dots dx_n,$$

и если вспомнить, что $V(B_R) = c_n R^n / n$, то все доказано. □

В качестве приложения свойства среднего значения по шару уточним принцип максимума, доказанный на лекции Л XI.

Следствие 6 (усиленный принцип максимума). *Непостоянная гармоническая функция не может внутри области своей гармоничности принимать максимальное или минимальное значение во всей области.*

Доказательство. Предположим, что $M = \sup\limits_G u(\vec{x})$ и M достигается в некоторой точке $\vec{x}^0 \in G$. Рассмотрим множество $E = \{\vec{x} \in G \mid u(\vec{x}) = M\} \neq \emptyset$ (так как $\vec{x}^0 \in E$). Множество E замкнуто относительно области G (то-есть его дополнение относительно G открыто). Покажем, что E — открыто. Действительно, пусть $\vec{y}^0 \in E$, тогда по следствию 5

$$M = u(\vec{y}^0) = \frac{1}{V(B_R)} \iint\limits_{B_R(\vec{y}^0)} \dots \int u(\vec{x})\, dx_1 \dots dx_n$$

и $u(\vec{x}) \leqslant M$ и u непрерывна в $\overline{B}_R(\vec{y}^0)$. Следовательно, $u(\vec{x}) \equiv M$ в $\overline{B}_R(\vec{y}^0)$ и, значит, $\overline{B}_R(\vec{y}^0) \subset E$, откуда $\vec{y}^0$ — внутренняя точка E и E — открыто.

Согласно топологическому определению связности, область G не может быть разбита на два непустых открытых непересекающихся множества, поэтому либо E, либо $G \setminus E$ пусто. Так как E непусто, то $E = G$ и $u(\vec{x}) \equiv M$ в G. $\square$

Наконец, докажем последнее свойство гармонических функций, из которого, в частности, вытекает бесконечная дифференцируемость гармонических функций (хотя изначально в определении предполагалась только непрерывность и существование вторых чистых производных по всем переменным).

Следствие 7. *Любая гармоническая в области G функция $u(\vec{x})$ вещественно аналитична по $x_1, \ldots, x_n$, в каждой точке $\vec{x}^0$, и, в частности, бесконечно дифференцируема в области G.*

Доказательство. Достаточно доказать для шара B_R с центром в нуле и точки $\vec{x}^0 = 0$. Согласно теореме 1, имеем

$$u(\vec{x}) = \frac{1}{c_n} \int \ldots \int\limits_{S_R} \frac{R^{n-2}(R^2 - |\vec{x}|^2)}{|\vec{x} - \vec{\xi}|^n} u(\vec{\xi})\, dS_1(\vec{\xi}).$$

Достаточно разложить в равномерно сходящийся степенной ряд в некоторой окрестности $|\vec{x}| \leqslant d$ точки $\vec{0}$ ядро Пуассона

$$\frac{R^{n-2}(R^2 - |\vec{x}|^2)}{(|\vec{x}|^2 + R^2 - 2(\vec{x}, \vec{\xi}))^{n/2}} = \frac{1 - \dfrac{x_1^2 + \ldots + x_n^2}{R^2}}{\left(1 + \dfrac{(\vec{x}, \vec{x} - 2\vec{\xi})}{R^2}\right)^{n/2}}.$$

Числитель — конечный степенной ряд, поэтому на сходимость влиять не будет. Так как ряд для функции $(1 + t)^{-n/2}$ сходится равномерно и абсолютно при $|t| \leqslant q$ для любого $0 \leqslant q < 1$, то мы должны потребовать, чтобы $|(\vec{x}, \vec{x} - 2\vec{\xi})| < R^2$. Если это условие выполняется, то разложение имеет вид

$$\frac{1}{\left(1 + \dfrac{(\vec{x}, \vec{x} - 2\vec{\xi})}{R^2}\right)^{n/2}} = \sum_{k=0}^{\infty} C_{-n/2}^k \frac{(\vec{x}, \vec{x} - 2\vec{\xi})^k}{R^{2k}}. \tag{XIII.4}$$

Чтобы получить полное разложение по $x_1, \ldots, x_n$, мы должны возвести $(\vec{x}, \vec{x}) - 2(\vec{\xi}, \vec{x})$ в k-ую степень и потом получить общее разложение (не обязательно по возрастающим степеням слагаемых) по $x_1, \ldots, x_n$.

Если $|\vec{x}| \leqslant d$, то $|x_l| \leqslant d$. Мажоранта полученного разложения, полученная взятием модулей всех слагаемых, имеет для каждого слагаемого в (XIII.4) сумму

$$(-1)^k C^k_{-n/2} \frac{\Bigl(|\vec{x}|^2 + 2\sum\limits_{l=1}^{n} |\vec{\xi}_l||\vec{x}_l|\Bigr)^k}{R^{2k}},$$

поэтому если все $|x_l| \leqslant d$ и $|\xi_l| \leqslant R$, то все слагаемое оценивается числом

$$(-1)^k C^k_{-n/2} \Bigl(\frac{nd^2 + 2ndR}{R^2}\Bigr)^k$$

и ряд из этих оценок будет сходиться при $nd^2 + 2ndR < R^2$. Такое d легко подобрать; например, $d = R/(3n)$. Итак, при $d = \dfrac{R}{3n}$ полученное разложение имеет сходящуюся мажоранту, равномерно по $\vec{\xi} \in S_R$, поэтому по признаку Вейерштрасса это ряд, умноженный на непрерывную $u(\vec{\xi})$, будет сходиться равномерно по $\vec{\xi}$ и допускает почленное интегрирование. Полученный ряд по степеням $x_1, \ldots, x_n$ сходится, к тому же абсолютно, при $|x_l| \leqslant d$, а, значит, $u(\vec{x})$ аналитична в нуле. $\square$

Лекция XIV

Параболические уравнения

Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{XIV.1}$$

— похоже на эллиптическое, решения всегда аналитические и задача Коши поставлена корректно (в отличие от эллиптических).

Теорема 1 (принцип максимума). *Пусть $u(t,x)$ — функция, непрерывная в $\overline{\text{Ц}}_T = [0,T] \times [0,l]$ и удовлетворяющая* (XIV.1) *внутри* Ц_T. *Тогда* $\max\limits_{\overline{\text{Ц}}_T} u(t,x) = \max_{\Gamma_T} u(t,x)$, *где* $\Gamma_T = [0,l]_{t=0} \cup [0,T]_{x=0} \cup [0,T]_{x=l}$ *(только часть границы!).*

Доказательство. Пусть $M = \max\limits_{\overline{\text{Ц}}_T} u(t,x) > m = \max\limits_{\Gamma_T} u(t,x)$ и максимум достигается в (t_0,x_0). Рассмотрим функцию $v(t,x) = u(t,x) + \dfrac{M-m}{2l^2}(x-x_0)^2$. Тогда при $(t,x) \in \Gamma_T$ имеем $v(t,x) \leqslant m + \dfrac{M-m}{2l^2} l^2 = m + \dfrac{M-m}{2} = \dfrac{m+M}{2} < M$, а $v(t_0,x_0) = M$. Пусть (t_1,x_1) — точка, где достигается $\max\limits_{\overline{\text{Ц}}_T} v(t,x)$. Тогда (t_1,x_1) лежит либо внутри $\overline{\text{Ц}}_T$ либо на верхней границе. В обоих случаях $\dfrac{\partial v}{\partial t}(t_1,x_1) \geqslant 0$ и $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t_1,x_1) \leqslant 0 \Rightarrow \dfrac{\partial u}{\partial t} - a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \geqslant 0$ в (t_1,x_1). Но $\dfrac{\partial v}{\partial t} - a^2\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \dfrac{\partial u}{\partial t} - a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - a^2 \dfrac{M-m}{2l^2} 2 = -\dfrac{(M-m)a^2}{l^2} < 0$, противоречие. □

Замечание 1. Если (t_1,x_1) лежит на верхней границе, то принцип максимума можно применить сначала к $\overline{\text{Ц}}_{T-\varepsilon}$ для любого $\varepsilon > 0$, а потом $\varepsilon \to 0+$ (тогда $\max\limits_{\overline{\text{Ц}}_{T-\varepsilon}} u(t,x) \to \max\limits_{\overline{\text{Ц}}_T} u(t,x)$ и $\max\limits_{\Gamma_{T-\varepsilon}} u(t,x) \to \max\limits_{\Gamma_T} u(t,x)$ в силу непрерывности $u(t,x)$).

Следствие 1 (принцип минимума). $\min\limits_{\overline{\text{Ц}}_T} u(t,x) = \min\limits_{\Gamma_T} u(t,x)$, *если* $u \in C(\overline{\text{Ц}}_T)$ *и выполняется* (XIV.1).

Доказательство. $\min\limits_{\overline{Ц}_T} u(t,x) = -\max\limits_{\overline{Ц}_T}[-u(t,x)] = -\max\limits_{\Gamma_T}[-u(t,x)] = \min\limits_{\Gamma_T} u(t,x)$. □

Следствие 2 (единственность). *Решение I краевой задачи для уравнения* (XIV.1) *единственно в классе непрерывных в* $\overline{Ц}_T$ *функций.*

Доказательство. Пусть $u_1(t,x)$ и $u_2(t,x)$ — два решения задачи

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u\Big|_{x=0} = u\Big|_{x=l} = 0 \\ u\Big|_{t=0} = \varphi(x). \end{cases}$$

Тогда $u(t,x) = u_1(t,x) - u_2(t,x)$ удовлетворяет уравнению (XIV.1) и $u\Big|_{x=0} = u\Big|_{x=l} = \Big|_{t=0} = 0$, то-есть $u\Big|_{\Gamma_T} = 0$. По принципу максимума $\max\limits_{\overline{Ц}_T} u(t,x) = \max\limits_{\Gamma_T} u(t,x) = 0$ и аналогично $\min\limits_{\overline{Ц}_T} u(t,x) = \min\limits_{\Gamma_T} u(t,x) = 0$ $\Rightarrow u(t,x) \equiv 0$ в $\overline{Ц}_T$. □

Следствие 3 (непрерывная зависимость). *Если* $|u_1 - u_2| < \varepsilon$ *при* $(t,x) \in \Gamma_T$ *и* u_1, u_2 *— решения* (XIV.1)*, непрерывные на* $\overline{Ц}_T$*, то* $|u_1 - u_2| < \varepsilon$ *и в* $\overline{Ц}_T$*.*

Доказательство. Опять $u = u_1 - u_2$ и $\max\limits_{\overline{Ц}_T} u = \max\limits_{\Gamma_t} u < \varepsilon$ и $\min\limits_{\overline{Ц}_T} u = \min\limits_{\Gamma_T} u > -\varepsilon \Rightarrow |u| < \varepsilon \Rightarrow |u_1 - u_2| < \varepsilon$ в $\overline{Ц}_T$. □

Метод Фурье решения уравнения теплопроводности

Рассмотрим I краевую задачу с однородными краевыми условиями

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u\Big|_{x=0} = u\Big|_{x=l} = 0 \\ u\Big|_{t=0} = \varphi(x). \end{cases}$$

и предположим $\varphi \in C^2_l(\mathbb{R})$ и $\varphi(0) = \varphi(l) = 0$.

I. Сначала ищем решения в виде $u(t,x) = T(t)X(x) \Rightarrow$ разделяя переменные, видим $\dfrac{T'(t)}{a^2T(t)} = \dfrac{X''(x)}{X(x)} = \lambda \equiv \text{const} \Rightarrow$ опять существует счетная система собственных функций $X_k(x) = \sin\dfrac{\pi k x}{l}$, $X_k(0) = X_k(l) = 0$, и $\lambda_k = -\left(\frac{\pi a k}{l}\right)^2 \to -\infty$ при $k \to \infty$. Далее, $T_k'(t) = -\left(\frac{\pi k a}{l}\right)^2 T_k(t) \Rightarrow$ $T_k(t) = c_k e^{-\frac{\pi^2 a^2 k^2}{l^2} t}$.

II. Теперь ищем разложение по только что найденным решениям

$$u(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{-\frac{\pi^2 a^2 k^2}{l^2} t} \sin \frac{\pi k x}{l},$$

$u\big|_{t=0} = \sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k \sin \frac{\pi k x}{l} = \varphi(x) \Rightarrow c_k = \frac{2}{l} \int\limits_0^l \varphi(x) \sin \frac{\pi k x}{l}\, dx$ — коэффициенты Фурье $\varphi(x)$ по $\sin \frac{\pi k x}{l}$. Так как $\varphi \in C_l^2(\mathbb{R})$ и $\varphi(0) = \varphi(l) = 0 \Rightarrow$ $c_k = O\left(\frac{1}{k^2}\right) \Rightarrow$ ряд Фурье сходится равномерно и абсолютно при $t \geqslant 0$ и $x \in [0, l] \Rightarrow$

$$u(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{-\frac{\pi^2 a^2 k^2}{l^2} t} \sin \frac{\pi k x}{l} \in C(\overline{\text{Ц}}_T).$$

Внутри $\overline{\text{Ц}}_T$ ряд можно дифференцировать по t и по x два раза и он останется равномерно сходящимся в области $t \geqslant t_0$, где $t_0 > 0 \Rightarrow$ его сумма дифференцируема и удовлетворяет уравнению (XIV.1), так как каждое его слагаемое $u_k(t,x)$ ему удовлетворяет.

Следствие 4. *I краевая задача для уравнения теплопроводности в прямоугольнике $\overline{\text{Ц}}_T$ поставлена корректно в классе дважды дифференцируемых l-периодических начальных данных.*

Замечание 2. Хотя у $u(t,x)$ предполагалось только существование $\frac{\partial u}{\partial t}$ и $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, внутри $\overline{\text{Ц}}_T$ она оказывается ∞-дифферецируемой (и даже аналитической) из-за множителей $e^{-(\frac{\pi k a}{l})^2 t}$.

Замечание 3. Решение не продолжается, вообще говоря, в область $t < 0$ (иначе на $t = 0$ решение было бы по замечанию 2 ∞-дифференцируемо, что противоречит тому, что φ только из $C_l^2(\mathbb{R})$).

Задача Коши для уравнения распространения тепла в бесконечном стержне

Теперь займемся решением уравнения в области $\Pi_T : -\infty < x < +\infty$, $0 < t < T$ (полоса). Здесь, вообще говоря, неединственность.

Теорема 2 (единственности). *Пусть* $u(t,x)$ — ограниченное *и непрерывное при* $0 \leqslant t \leqslant T$, $-\infty < x < +\infty$ *решение* (XIV.1) *в* Π_T. *Тогда если* $u(0,x) = 0 \Rightarrow u(t,x) \equiv 0$ *при* $(t,x) \in \overline{\Pi}_T = [0,T] \times \mathbb{R}$.

Доказательство. Для любого $\varepsilon > 0$ рассмотрим $v(t,x) = u(t,x) - \varepsilon\Big(ta^2 + \dfrac{x^2}{2}\Big)$. Так как u — ограничена, $|u(t,x)| < M$, то существует $x_0(\varepsilon) > 0$, что $v(t, \pm x_0) \leqslant 0$ при всех $0 \leqslant t \leqslant T$ (можно взять, например, $x_0 = \sqrt{M/\varepsilon}$). Кроме того, $v(0,x) \leqslant 0$ при $-x_0 \leqslant x \leqslant x_0$. По принципу максимума $v(t,x) \leqslant 0$ при всех $0 \leqslant t \leqslant T$ и $|x| \leqslant x_0 \Rightarrow u(t,x) \leqslant \varepsilon\Big(a^2 t + \dfrac{x^2}{2}\Big)$ при всех $0 \leqslant t \leqslant T$ и $-x_0 \leqslant x \leqslant x_0$. Так как неравенство выполнено для любого $\varepsilon > 0$ и область при $\varepsilon \downarrow 0+$ расширяется до всей полосы $\overline{\Pi}_T$, то отсюда следует, что $u(t,x) \leqslant 0$ при всех $(t,x) \in \overline{\Pi}_T$. Аналогично показывается, что $u(t,x) \geqslant 0$ в $\overline{\Pi}_T$. $\square$

Следствие 5 (непрерывная зависимость). *Если* $|\varphi(x)| < \delta$, $x \in \mathbb{R}$, *и* $u(t,x)$ — *ограниченное непрерывное в* $\overline{\Pi}_T$ *решение* (XIV.1) *в* Π_T *с начальными данными* $u(0,x) = \varphi(x)$, *то* $|u(t,x)| < \delta$ *при всех* $(t,x) \in \overline{\Pi}_T$.

Доказательство. Доказываем так же, как и !, только вместо $\varepsilon\Big(ta^2 + \dfrac{x^2}{2}\Big)$ нужно взять $\varepsilon\Big(ta^2 + \dfrac{x^2}{2}\Big) + \delta \Rightarrow$ все получится. $\square$

Список литературы

[1] И. Г. Петровский. Лекции об уравнениях с частными производными. М.–Л.: ГИТТЛ, 1950. — 303 стр.

[2] А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин. Элементы ТФФА. М.: Наука, 1976. — 544 стр.

[3] И. И. Привалов. Матем. сб. Т. XXXII, 1926, стр. 464.