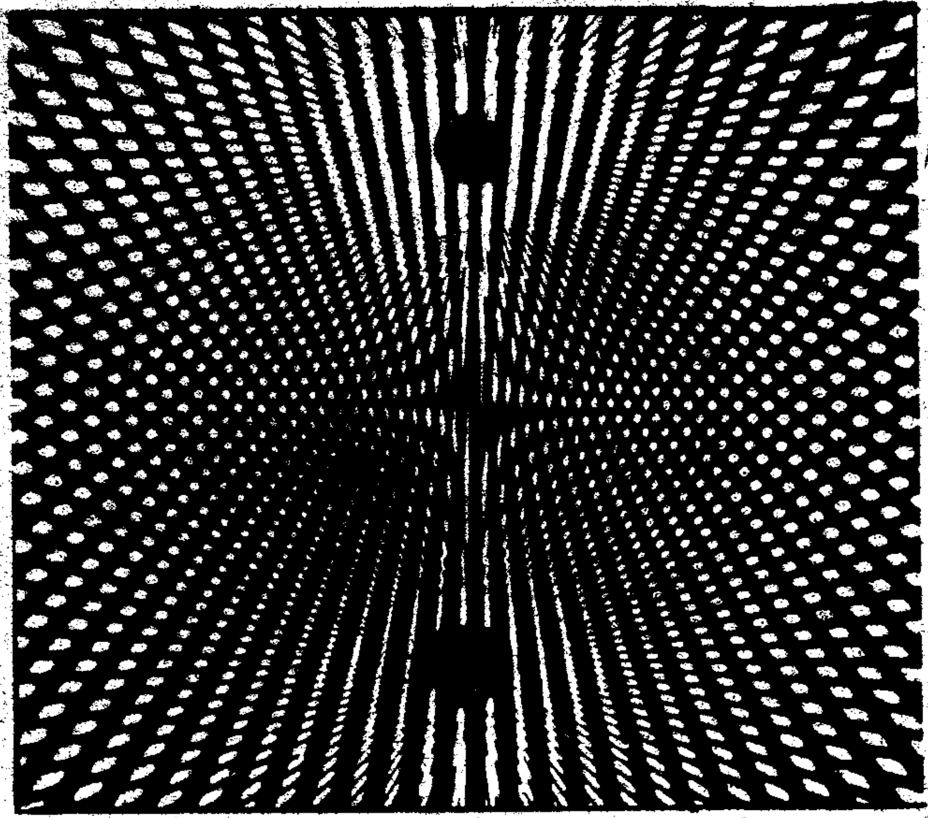
С. Н. Козлов

Издательство Московского университета



ФИЗИКА

КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ

Отсканировано: Кузнецов М.В
Бугайчук О.В.
Техническая поддержка:
Ефимова А.И.

1991

ББК 22.3I
К 59
УДК 53I

Рецензенты: доктор физико-математических наук
профессор Б.А.Струков,
доктор физико-математических наук
профессор В.И.Николаев

Печатается по постановлению
Редакционно-издательского Совета
Московского университета

Козлов С.Н.
К59 Колебания и волны.-М.: Изд-во МГУ, 1991.-152 с.
ISBN 5-2II-01963-6.

С единых позиций рассмотрены механические и электромагнитные колебательные процессы, а также распространение упругих и электромагнитных волн в однородной среде.

Для студентов химического факультета.

077(02) - 9I - заказное ББК 22.3I

ISBN 5-2II-01963-6

ОГЛАВЛЕНИЕ

стр.

ГЛАВА I. КОЛЕБАНИЯ

§ I. Колебания систем с одной степенью свободы. Гармонический осциллятор

Колебательные процессы, т.е. процессы, характеризующиеся определенной повторяемостью во времени, весьма часто встречаются в природе, а также находят широкое применение в технике. Не останавливаясь здесь на примерах колебательных процессов, попытаемся выяснить физическую причину столь широкого их распространения в самых разных системах (от атомов и молекул до гигантских звезд). Для этого вспомним, что фундаментальную роль в природе играют гравитационные и электростатические взаимодействия. Поля сил гравитации и электростатики обладают одним важным общим свойством – они являются потенциальными (могут быть охарактеризованы потенциальной энергией U). В дальнейшем для простоты мы будем полагать, что имеем дело с одномерной системой (т.е. системой с одной степенью свободы), в которой потенциальная энергия – функция только одной координаты x. В качестве примера на рис.I представлены возможные виды зависимостей $U(x)$. В случае (а) потенциальная энергия не зависит от координаты (всюду постоянна), на систему не действует внешняя сила $\left(F_x = -dU/dx = 0\right)$ и, в соответствии с первым законом Ньютона, система движется равномерно и прямолинейно.

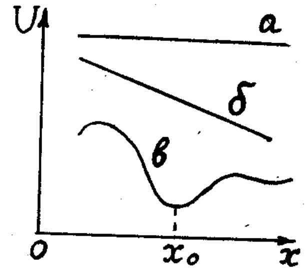


Рис.I

В случае (б) на систему действует постоянная по величине сила $F_x = -dU/dx = const$, направленная по оси x; происходит равноускоренное движение по этой оси. Очевидно, наиболее общая ситуация изображена на рис.I (в) – потенциальная энергия в этом случае зависит от координаты каким-то более сложным образом (конкретный вид этой зависимости не играет существенной роли в наших рассуждениях).

Предположим, что система находится вблизи одного из минимумов потенциальной энергии – в окрестности точки x_0. Считая, что функция $U(x)$ непрерывна и имеет все производные при $x = x_0$, можно разложить ее вблизи этой точки в ряд Тэйлора:

$$U(x)=U(x_0)+[dU/dx(x_0)](x-x_0)+[1/2\cdot d^2U/dx^2(x_0)](x-x_0)^2+\ldots \quad (I.1)$$

Очевидно, при малых отклонениях от точки x_0 основную роль будет играть член с наименьшей степенью $\xi = x - x_0$. Учитывая, что в минимуме $dU/dx = 0$, разложение (I.I) приближенно можно переписать в виде:

$$U(x)\simeq U(x_0)+[1/2\, d^2U/dx^2(x_0)]\cdot\xi^2=U(x_0)+K\xi^2/2. \quad (I.2)$$

В этом случае на систему вблизи точки $x = x_0$ будет действовать сила

$$F_x=-dU/dx=-d^2U/dx^2(x_0)\cdot\xi=-K\xi. \quad (I.3)$$

Легко видеть, что эта сила всегда направлена в сторону, противоположную отклонению системы от точки x_0 ("точки равновесия"), поэтому часто эту силу называют возвращающей. Поскольку величина возвращающей силы пропорциональна отклонению системы от положения равновесия (как для идеальной пружины) эту силу называют квазиупругой.

Второй закон динамики для системы, находящейся вблизи положения равновесия (точки $x = x_0$), запишется с учетом вышесказанного в форме

$$m\ddot{\xi}=-K\xi . \quad (I.4)$$

Общее решение этого дифференциального уравнения может быть записано в виде гармонической функции

$$\xi = A\cdot\cos(\omega_0 t+\varphi_0). \quad (I.5)$$

Здесь A и φ_0 – независимые произвольные постоянные. Подстановкой легко убедиться, что частота собственных гармонических колебаний системы $\omega_0=\sqrt{K/m}$. Величина A называется амплитудой, $\varphi=\omega_0 t+\varphi_0$ – фазой, φ_0 – начальной фазой колебаний. Для определения двух параметров колебательного процесса – амплитуды колебаний и начальной фазы в каждом конкретном случае, нужно знать два начальных условия – начальное отклонение системы от положения равновесия и начальную скорость $v_0=\dot{\xi}(t=0)$.

Таким образом, гармоническим осциллятором является любая система, совершающая колебания по закону (I.5) (и, соответственно, подчиняющаяся дифференциальному уравнению

второго порядка (I.4)). Подчеркнем, что гармонический осциллятор – некая физическая идеализация. Модель гармонического осциллятора может быть использована <u>только</u> в тех случаях, когда правомерно пренебрежение членами высших порядков в разложении I.I (т.е. когда амплитуда колебаний достаточно мала).

В заключение этого параграфа продемонстрируем полную аналогию в описании механических и электрических колебаний.

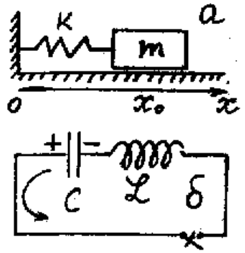


Рис.2

На рис. 2,а показан простейший механический осциллятор – тело массой m на пружине с коэффициентом упругости K. Второй закон Ньютона для рассматриваемой системы выглядит так (без учета сил трения):

$$m\ddot{\xi}=-K\xi. \quad (I.6)$$

Для электрического контура без потерь (см. рис.2,б) сумма напряжений на конденсаторе V_C и индуктивности V_L равна нулю:

$$V_C+V_L=0. \quad (I.7)$$

Учитывая, что $V_C=q/C$, $V_L=L\,dI/dt$, $I=-dq/dt$, имеем:

$$L\ddot{q}+q/C=0, \quad (I.8)$$

где q – заряд конденсатора, C – емкость, L – индуктивность, I – величина тока в контуре.

Легко видеть, что уравнения (I.6) и (I.8) полностью аналогичны и эквивалентны уравнению (I.4). Решения их имеют вид (I.5); необходимо только для электрической системы вместо ξ, m и K использовать q, L и $1/C$, соответственно $(A\to q_0)$.

Энергия механического осциллятора складывается из кинетической энергии тела T и потенциальной энергии деформированной пружины:

$$W=U+T=K\xi^2/2+m\dot{\xi}^2/2=KA^2/2. \quad (I.9)$$

Используя найденную аналогию между параметрами механической и электрической систем, полную энергию, запасенную в электрическом контуре, можно записать в виде

$$W=q^2/2C+LI^2/2=q_0^2/2C. \quad (I.10)$$

Первое слагаемое в соотношении (I.10) представляет собой энергию электрического поля конденсатора, второй член – энергию магнитного поля катушки индуктивности.

$\mathcal{E}_L=-L\dfrac{dI}{dt}$

§ 2. Модель гармонического осциллятора в химии

Несмотря на идеализированный характер модели гармонического осциллятора (отсутствие потерь энергии, малые колебания), использование этой модели в ряде случаев позволяет быстро найти достаточно точные ответы на вопросы, касающиеся некоторых особенностей колебаний атомов и молекул. Приведем наиболее простые примеры задач такого рода.

I. Найдем частоту собственных колебаний двухатомной молекулы (массы атомов m_1 и m_2, коэффициент упругости, характеризующий межатомную связь – K) – см. рис.3. Уравнение динамики для первого атома записывается в виде (ξ_1 и ξ_2 – отклонения атомов от их равновесных положений):

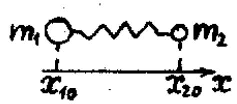


Рис.3

$$m_1\ddot{\xi}_1 = -K(\xi_1-\xi_2). \qquad (I.II)$$

Поскольку центр масс молекулы должен оставаться неподвижным в процессе колебаний, величины ξ_1 и ξ_2 связаны соотношением $m_1\xi_1=-m_2\xi_2$. Заменяя в (I.II) ξ_2 на $-\xi_1 m_1/m_2$, приходим к уравнению одномерного гармонического осциллятора, где роль массы играет величина $\mu = m_1m_2/(m_1+m_2)$, называемая "приведенной массой":

$$\mu\ddot{\xi}_1 = -K\xi_1 . \qquad (I.I2)$$

Отсюда очевидно, что частота собственных колебаний двухатомной молекулы:

$$\omega_0=\sqrt{K/\mu}=\sqrt{K(m_1+m_2)/m_1\cdot m_2} . \qquad (I.I3)$$

Если массу одного из атомов устремить к бесконечности, мы вернемся к модели, изображенной на рис.2,а; причем вместо приведенной массы в (I.I3) останется только масса легкого атома.

2. Оценим различие частот собственных колебаний свободных (не связанных с другими молекулами) "обычных" и "тяжелых" гидроксилов О–Н и О–D. Обозначая m_0, m_H и m_D массы атомов кислорода, водорода и тяжелого водорода и используя соотношение (I.I3), получаем искомое отношение частот:

$$\omega_0^{OH}/\omega_0^{OD}=\sqrt{\mu_{OD}/\mu_{OH}}=\sqrt{m_D(m_0+m_H)/m_H(m_0+m_D)} . \qquad (I.I4)$$

Отсюда следует, что частота собственных колебаний "обычных"

гидроксилов на ~ 37% выше, чем "тяжелых". Это хорошо подтверждается экспериментально, а методика изотопного дейтерообмена широко используется в инфракрасной спектроскопии для идентификации колебательных спектров водород-содержащих фрагментов в исследуемом веществе.

3. Определим, как относятся частоты собственных колебаний свободных и связанных гидроксилов (например, гидроксилов, связанных с поверхностными атомами твердого тела, либо с тяжелыми молекулами). Полагая, что для связанного гидроксила $m_2 \gg m_1$, $m_1=m_H$, получаем:

$$\omega_0^{своб}/\omega_0^{связ}=\sqrt{(m_0+m_H)/m_0}\simeq 1{,}031 . \qquad (I.I5)$$

С помощью современной аппаратуры легко зарегистрировать отличие в частотах собственных колебаний молекул на сотые и тысячные доли процента, так что разница в 3,I%, следующая из (I.I5), представляет собой громадный эффект, который уже давно экспериментально наблюдался.

4. Не составляет большого труда найти отличие частот собственных колебаний свободных молекул типа HF, HCI, HBr, HJ. Предлагаем выполнить соответствующие вычисления самостоятельно и сравнить полученные результаты со справочными данными.

§ 3. Свободные колебания связанных систем

В большинстве практически важных случаев приходится иметь дело с осцилляторами, взаимодействующими между собой. Например, молекулы жидкости, газа или твердого тела подвергаются воздействию со стороны соседних молекул. Электрические цепи тоже, как правило, состоят из двух или нескольких взаимодействующих контуров. Вообще говоря, количество таких связанных осцилляторов в исследуемой системе может быть очень большим. Тем не менее далее мы покажем, что основные особенности колебаний в системе связанных осцилляторов становятся понятными, если рассмотреть задачу о простейшей системе такого рода, состоящей всего лишь из двух взаимодействующих между собой осцилляторов.

В качестве примера рассмотрим простую механическую модель двух гидроксильных групп, взаимодействие между которыми осуществляется через водородную связь. В этой модели, показанной на рис.4, две одинаковых массы m соответствуют массам атомов водорода, пружинки с коэффициентами упругости К моделируют О-Н связи. Будем полагать, что два атома кислорода либо расположены на поверхности твердого тела, либо прочно связаны с большими молекулами. С точки зрения модельных представлений в этом случае концы пружинок можно считать жестко фиксированными. Водородную связь между атомами водорода будем моделировать пружинкой с коэффициентом упругости K_1.

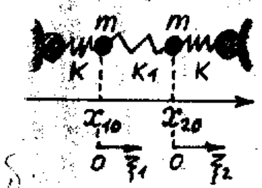


Рис.4

Напомним, что силовые константы связей К и K_I можно найти, если известна зависимость потенциальной энергии взаимодействия между атомами от расстояния между ними - см. соотношение (I.2). Для простоты будем считать, что движение атомов водорода происходит только по оси x; силами трения пренебрежем. Введем величины отклонений атомов от положений равновесия x_{10} и x_{20}: $\xi_1 = x_1 - x_{10}$, $\xi_2 = x_2 - x_{20}$.

Запишем второй закон динамики для первого и второго атомов:

$$m\ddot{\xi}_1 = -K\xi_1 - K_1(\xi_1 - \xi_2), \qquad \text{(I.I6)}$$

$$m\ddot{\xi}_2 = -K\xi_2 + K_1(\xi_1 - \xi_2). \qquad \text{(I.I7)}$$

Легко видеть, что соотношения (I.I6) и (I.I7) не являются уравнениями гармонических колебаний. В каждое из этих уравнений входят две независимые величины - координаты ξ_1 и ξ_2. Отсюда очевидно, что в общем случае движение каждого атома не будет представлять собой простое гармоническое колебание.

Покажем, однако, что заменой переменных можно свести систему уравнений (I.I6) и (I.I7) к двум независимым линейным дифференциальным уравнениям, каждое из которых будет уравнением гармонических колебаний. Для этого сначала сложим, а затем вычтем почленно правые и левые части соотношений (I.I6) и (I.I7). После этих элементарных процедур получим:

$$m\ddot{\xi}_I = -K\xi_I, \qquad \text{(I.I8)}$$

$$m\ddot{\xi}_{II} = -(K + 2K_1)\xi_{II}. \qquad \text{(I.I9)}$$

Здесь в качестве новых независимых переменных использованы величины $\xi_I = \xi_1 + \xi_2$ и $\xi_{II} = \xi_1 - \xi_2$. Введенные нами новые

координаты ξ_I и ξ_{II} называются нормальными. Таким образом, нормальные координаты - такие координаты, введение которых позволяет свести уравнения движения системы связанных тел (каждое такое уравнение зависит от нескольких переменных) к системе линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, каждое из которых содержит только одну переменную величину, называемую нормальной координатой. Ясно, что число нормальных координат равно числу исходных уравнений движения, описывающих систему (т.е. количеству степеней свободы).

Общие решения уравнений (I.I8) и (I.I9) имеют вид, аналогичный (I.5):

$$\xi_I = A_I \cos(\omega_I t + \varphi_I), \qquad \text{(I.20)}$$

$$\xi_{II} = A_{II} \cos(\omega_{II} t + \varphi_{II}). \qquad \text{(I.2I)}$$

Функции (I.20) и (I.2I) описывают так называемые нормальные колебания (нормальные моды) рассматриваемой системы, а частоты:

$$\omega_I = \sqrt{K/m}, \quad \omega_{II} = \sqrt{(K + 2K_1)/m}, \qquad \text{(I.22)}$$

называются частотами нормальных колебаний (нормальных мод). Движение каждого тела связанной системы является результатом наложения нормальных колебаний этой системы. В рассматриваемом случае:

$$\xi_1 = (\xi_I + \xi_{II})/2, \quad \xi_2 = (\xi_I - \xi_{II})/2. \qquad \text{(I.23)}$$

Количество нормальных мод в той или иной системе, как и количество нормальных координат, всегда равно числу степеней свободы (в рассмотренной модели число степеней свободы и, соответственно, нормальных колебаний равно двум). Нумерацию нормальных мод обычно начинают с низкочастотных (по мере возрастания частоты нормального колебания номер моды увеличивается).

Для полного описания движения системы, состоящей из N связанных осцилляторов, необходимо, помимо частот всех N нормальных мод, знать амплитуды и начальные фазы всех нормальных колебаний (всего $2N$ параметров). В рассмотренном выше примере ($N = 2$) необходимо определить четыре параметра, входящих в соотношения (I.20) и (I.2I) - A_I, A_{II}, φ_I и φ_{II}. Это может быть сделано, если заданы четыре начальных условия (обычно это начальные координаты и скорости всех тел). В нашем случае нужно задать координаты и скорости двух "атомов" в начальный момент времени $\xi_1(0), \xi_2(0), \dot\xi_1(0), \dot\xi_2(0)$.

Легко убедиться в том, что если в начальный момент оба атома смещены от положений равновесия в одну и ту же сторону на одинаковую величину ($\xi_1(0) = \xi_2(0)$), то амплитуда второго нормального колебания ξ_{II} окажется равной нулю (т.е. при этом в системе возбуждается только первая, низкочастотная мода колебаний). Поскольку частота первой нормальной моды никак не зависит от коэффициента упругости средней пружинки – K_1 , очевидно, что первая нормальная мода представляет собой синхронное колебание обоих атомов; при этом средняя пружинка остается ненатянутой в любой момент времени – рис.5,а.

Вторая (высокочастотная) нормальная мода в рассматриваемой системе может быть возбуждена, если в начальный момент времени оба атома отклоняются от положений равновесия на одну и ту же величину, но в разные стороны ($\xi_1(0) = -\xi_2(0)$). В этом случае решение системы (I.18) и (I.19) дает $\xi_I = 0$, т.е. низкочастотная мода в этих условиях вообще не возбуждается. В формуле для частоты второго нормального колебания параметр K_1 средней пружины ("водородной связи") присутствует с коэффициентом 2, откуда следует, что эта пружина натягивается в два раза больше, чем крайние. Отсюда ясно, что вторая нормальная мода представляет собой противофазное движение двух атомов – см. рис.5,б.

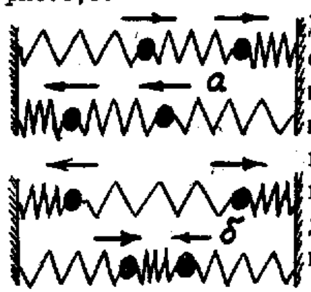


Рис.5. Первая (а) и вторая (б) нормальные моды колебаний

Для того, чтобы в системе сосуществовали оба нормальных колебания, в начальный момент времени необходимо задать несимметричные условия для двух тел (разные начальные отклонения, либо разные начальные скорости). При этом каждое тело будет одновременно принимать участие в гармонических колебаниях с частотами ω_I и ω_{II}. Если связь между двумя осцилляторами достаточно слабая ($K_1 \ll K$), то частоты ω_I и ω_{II} близки, наложение двух колебаний с близкими частотами приведет к известному эффекту – амплитуда колебаний каждого осциллятора будет претерпевать медленные изменения(будут наблюдаться т.н. "биения").

Подчеркнем, что если в какой-то момент времени в системе связанных осцилляторов была возбуждена только одна мода колебаний, то и в дальнейшем только эта нормальная мода будет существовать. Если в системе возбуждены две (или, в общем случае, несколько) нормальных мод, то энергия, "запасенная" каждым нормальным колебанием, сохраняется неизменной. Это отражает важнейшее свойство нормальных мод – их независимость (энергия не может передаваться от одной моды к другой).

Из (I.22) следует, что по мере ослабления силы взаимодействия между двумя осцилляторами частоты нормальных колебаний двух типов постепенно сближаются и в пределе (при $K_1 \to 0$) стремятся к одной и той же частоте собственных колебаний изолированного осциллятора.

В заключение этого параграфа покажем, что совершенно аналогично ведет себя система двух связанных контуров (см. рис.6). Будем предполагать, что два одинаковых электрических контура, состоящих из индуктивностей $\mathcal{L}$ и емкостей C , соединены через емкость C_1 (аналог упругой связи двух механических осцилляторов через пружинку K_1). Потерями энергии, как и ранее, будем пренебрегать. Для определенности зададим знаки зарядов на конденсаторах и направления токов в контурах $\mathcal{J}_1$ и $\mathcal{J}_2$. Совершая обходы по каждому контуру в направлениях, указанных на рис.6 стрелками, получим два уравнения:

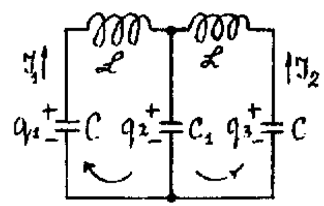


Рис.6

$$q_1/C - \mathcal{L}\, d\mathcal{J}_1/dt - q_2/C = 0, \qquad (I.24)$$

$$q_3/C - \mathcal{L}\, d\mathcal{J}_2/dt - q_2/C = 0. \qquad (I.25)$$

Учтем, что $\mathcal{J}_1 = -\dot q_1$, $\mathcal{J}_2 = -\dot q_3$; $q_1 + q_2 + q_3 = 0$; тогда соотношения (I.24) и (I.25) преобразуются к виду

$$\mathcal{L}\ddot q_1 + q_1/C + (q_1+q_3)/C_1 = 0, \qquad (I.26)$$

$$\mathcal{L}\ddot q_3 + (q_1+q_3)/C_1 + q_3/C = 0. \qquad (I.27)$$

Как и ранее, почленно суммируем и вычитаем эти уравнения, получая в итоге

$$\mathcal{L}\ddot{q}_I + q_I/C = 0, \tag{I.28}$$

$$\mathcal{L}\ddot{q}_{II} + q_{II}\cdot(1/C + 2/C_1) = 0. \tag{I.29}$$

Здесь $q_I = q_1 - q_3$, $q_{II} = q_1 + q_3$ – нормальные координаты. Соответствующие нормальные частоты

$$\omega_I = \sqrt{1/\mathcal{L}C}, \quad \omega_{II} = \sqrt{(1/C + 2/C_1)/\mathcal{L}}. \tag{I.30}$$

полностью эквивалентны соотношениям (I.22).

При возбуждении в рассматриваемой системе первой моды ток через конденсатор C_1 вообще не протекает (токи в обоих контурах в любой момент времени направлены в одну сторону – по часовой стрелке или против нее, поэтому токи J_1 и J_2 через конденсатор C_1 всегда направлены в разные стороны и компенсируются). При возбуждении второй колебательной моды токи в контурах направлены в противоположные стороны, поэтому ток через конденсатор C_1 в любой момент времени равен удвоенному току J_1 или J_2. Таким образом, очевидна полная аналогия колебательных явлений в системах, показанных на рис.4 и рис.6.

§ 4. Затухающие колебания

В реальных колебательных системах всегда происходят потери энергии (в механических системах – из-за трения, в электрических – из-за того, что сопротивление цепи электрическому току отлично от нуля). Учтем это обстоятельство, добавляя в левую часть уравнения (I.4) силу трения, которую будем считать пропорциональной скорости тела $F_{тр} = -\tau\dot{\xi}$ (такая зависимость силы трения от скорости типична для движения тела конечных размеров в вязкой среде). В результате второй закон динамики для осциллятора при наличии вязкого трения запишется так:

$$m\ddot{\xi} = -\tau\dot{\xi} - K\xi. \tag{I.31}$$

Обозначив $2\beta = \tau/m$ и $\omega_0^2 = K/m$, соотношение (I.31) приведем к виду

$$\ddot{\xi} + 2\beta\dot{\xi} + \omega_0^2\xi = 0. \tag{I.32}$$

Совершенно аналогичное уравнение получим для электрического контура с затуханием, добавив в левую часть (I.7) падение напряжения на сопротивлении V_R. Только в этом случае вместо смещения ξ в (I.32) будет заряд на конденсаторе q; коэффициент сопротивления τ нужно заменить на сопротивление цепи электрическому току R; $2\beta = R/\mathcal{L}$, $\omega_0^2 = 1/\mathcal{L}C$.

Поскольку функции $\xi(t)$, $\dot{\xi}(t)$ и $\ddot{\xi}(t)$ должны быть с точностью до постоянных коэффициентов одинаковыми (это очевидно из уравнения (I.32)), решение (I.32) будем искать в виде

$$\xi = A_0 \exp(\alpha t). \tag{I.33}$$

Подставляя (I.33) в (I.32), получаем квадратное уравнение для показателя α:

$$\alpha^2 + 2\beta\alpha + \omega_0^2 = 0. \tag{I.34}$$

Решение этого уравнения:

$$\alpha = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}. \tag{I.35}$$

Рассмотрим сначала случай небольшого затухания ($\beta < \omega_0$). При этом $\alpha = -\beta \pm i\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$ и, имея в виду формулу Эйлера, решение уравнения (I.32) можно записать в форме

$$\xi = A_0 e^{-\beta t}\cos(\omega_e t + \varphi_0), \tag{I.36}$$

где $\omega_e = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$ – будем называть частотой собственных затухающих колебаний; φ_0 – как и ранее, начальной фазой. Коэффициент перед гармонической функцией будем называть амплитудой колебаний $A = A_0 e^{-\beta t}$, которая теперь не сохраняется постоянной, а убывает по экспоненциальному закону – см. рис.7. Параметр β, определяющий темп затухания амплитуды, называется коэффициентом затухания.

Для описания колебаний с небольшим затуханием используют следующие характеристики:

I. Время релаксации амплитуды $\tau_A = 1/\beta$ – за время τ_A амплитуда колебаний уменьшается в "e" раз.

2. Число колебаний, за которое амплитуда уменьшается в "e" раз: $N_e = \tau_A/T = 1/\beta T$. Здесь $T = 2\pi/\omega_e$ – период колебаний.

3. Декремент затухания $\mathcal{D} = A(t)/A(t+T) = e^{\beta T}$.

4. Логарифмический декремент затухания
$\gamma = \ln\mathcal{D} = \beta T = 1/N_e$.

5. Добротность $Q = \pi N_e = \pi/\gamma = \pi/\beta T = \omega_e/2\beta$.

При малом затухании ($\beta \ll \omega_0$) можно использовать приближенное соотношение $Q = \omega_0/2\beta$, которое в случае электрического контура легко преобразуется к виду: $Q = (1/R)\cdot\sqrt{L/C}$.

Далее мы встретимся еще с четырьмя определениями добротности. В частности, этот параметр при малом затухании пропорционален отношению энергии, запасенной осциллятором, к энергии, теряемой за период. Действительно, энергия, запасенная осциллятором, пропорциональна квадрату амплитуды колебаний (для механических колебаний) или квадрату максимального заряда конденсатора (для электрических колебаний) - см. соотношения (I.9) и (I.I0). Следовательно, в любой момент времени

$$W(t) = W_0 e^{-2\beta t} = W_0 e^{-t/\tau_W}, \qquad (I.36)$$

где W_0 - начальный запас энергии осциллятора, $\tau_W = 1/2\beta$ - время релаксации энергии (оно в два раза меньше времени релаксации амплитуды). Учитывая, что потери энергии за период

$$\Delta W_T(t) = W(t) - W(t+T) = W(t)(1-e^{-2\beta T}), \qquad (I.37)$$

получаем

$$W(t)/\Delta W_T(t) = 1/(1-e^{-2\beta T}). \qquad (I.38)$$

В условиях малого затухания $\exp(-2\beta T) \cong 1-2\beta T$ и соотношение (I.38) преобразуется к виду

$$W(t)/\Delta W_T(t) = 1/2\beta T = N_e/2 = 1/2\gamma = Q/2\pi. \qquad (I.39)$$

Отсюда следует еще одно определение добротности (подчеркнем, что оно справедливо только при малом затухании):

$$Q \simeq 2\pi\, W(t)/\Delta W_T(t). \qquad (I.40)$$

Заметим, что, поскольку время релаксации энергии равно $\tau_W = 1/2\beta$, можно дать третье определение добротности:

$$Q = \omega_c/2\beta = \omega_c \tau_W \simeq \omega_0 \tau_W. \qquad (I.40,a)$$

Последнее выражение правомерно в условиях малого затухания.

Обсудим теперь некоторые закономерности поведения осциллятора с большим затуханием ($\beta > \omega_0$). Как следует из (I.35), в этом случае решение дифференциального уравнения (I.32) таково:

$$\xi(t) = e^{-\beta t}\left(A e^{\beta_1 t} + B e^{-\beta_1 t}\right) = A e^{-t/\tau_1} + B e^{-t/\tau_2}. \qquad (I.41)$$

Здесь $\beta_1 = \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}$, $\tau_1 = 1/(\beta - \beta_1)$, $\tau_2 = 1/(\beta + \beta_1)$. Два

параметра - A и B определяются из начальных условий (начальная координата и начальная скорость должны быть заданы). В частности, если в начальный момент времени смещение равно нулю (например, маятник выводится из равновесия толчком), то $\xi(0) = A + B = 0$ и $A = -B$. Соответствующая зависимость смещения от времени показана на рис.8 (а). Если начальное отклонение от положения равновесия не равно нулю, то $A \neq -B$; соответствующая траектория

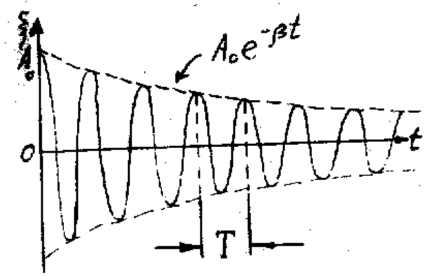


Рис.7

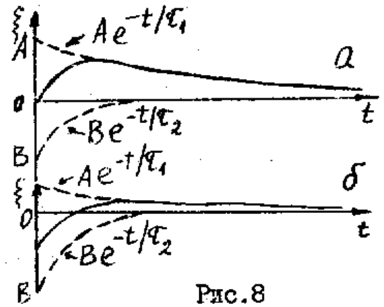


Рис.8

движения тела показана на рис.8 (б). Сравнивая рисунки 7 и 8, легко понять, почему режим с большим затуханием часто называют "апериодическим". Существенно, что время возвращения системы к равновесию определяется в апериодическом режиме экспонентой с наибольшей постоянной времени $\tau_1 = 1/(\beta - \beta_1)$. При очень сильном затухании ($\beta \gg \omega_0$) эта постоянная времени может быть весьма большой ($\beta \simeq \beta_1$, $\tau_1 \to \infty$). Очевидно, режим с большим затуханием нецелесообразно использовать при работе стрелочных приборов, как, впрочем, и режим с малым затуханием - см. рис.7, 8. С этой точки зрения наиболее интересен т.н. "критический режим", когда выполняется условие $\beta = \omega_0$, т.е. $\beta_1 = 0$.

Критический режим работы широко используется в различных приборах, поскольку в этом режиме возвращение к положению равновесия происходит наиболее быстро.

В критическом режиме $\tau_1 = \tau_2$ и решение (I.4I) не может быть общим решением дифференциального уравнения второго порядка, поскольку фактически в (I.4I) останется только один параметр - множитель перед экспонентой. Легко показать, что решением уравнения (I.32) при $\beta = \omega_0$ является функция

$$\xi(t) = e^{-\beta t}(A + Bt). \qquad (I.42)$$

Параметр А в этом случае имеет смысл начального смещения $\xi(0)$, начальная скорость равна $\dot{\xi}(0) = B - \beta A$. Если начальное отклонение от положения равновесия равно нулю ($A = 0$), то параметр B определяет величину начальной скорости. В рассматриваемом случае зависимость смещения тела от времени получается умножением спадающей экспоненты на функцию Bt – см. рис.9. Дифференцируя по времени $\xi(t) = Bt\,e^{-\beta t}$ и приравнивая производную нулю, находим, что максимальное отклонение от положения равновесия достигается в момент времени $t_{max} = 1/\beta$ и в этот момент

$$\xi_{max} = \xi(1/\beta) = B/\beta e. \qquad (1.43)$$

Таким образом, максимальное отклонение от положения равновесия в рассматриваемом случае оказывается пропорциональным начальной скорости $\xi_{max} \sim B = \dot{\xi}(0)$. Это фундаментальное свойство осциллятора в критическом режиме используется в т.н. "баллистических" приборах (баллистических маятниках, баллистических гальванометрах). В этих приборах конструктивными ухищрениями добиваются того, чтобы период колебаний (маятника либо рамки гальванометра) был достаточно большим (существенно превышал время Δt воздействия, которое предполагается исследовать – например, время соударения маятника с каким-либо телом или время протекания импульса тока через рамку гальванометра). Тогда импульс, который получает баллистический маятник за время Δt, можно считать пропорциональным начальной скорости маятника; следовательно, максимальное отклонение маятника от положения равновесия с точностью до градуировочного множителя будет указывать величину сообщенного маятнику импульса (количества движения).

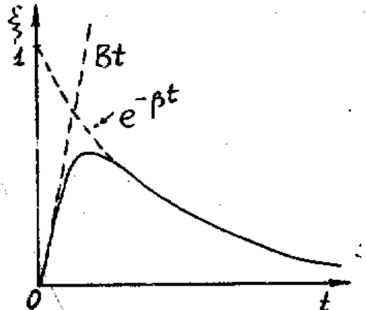


Рис.9

Для баллистического гальванометра начальная скорость рамки также пропорциональна импульсу силы, действовавшей на рамку в течение времени Δt. Так как сила, действующая на рамку, пропорциональна протекающему по рамке току, то $F\Delta t \sim J\Delta t \sim \Delta Q$. В этом случае максимальное отклонение рамки от положения равновесия пропорционально полному заряду ΔQ, протекшему через рамку за время Δt.

В заключение сделаем несколько замечаний о специфике затухающих колебаний в системе связанных осцилляторов. Во-первых, необходимо иметь в виду, что представление о нормальных модах колебаний в случае затухающих колебаний имеет смысл только в условиях малого затухания. Во-вторых, необходимо учитывать, что затухание может быть неодинаковым для разных мод, поскольку, например, пружины в случае механических колебаний или конденсаторы – в случае электрических "работают" для различных нормальных колебаний по-разному. Наконец, очевидно, что небольшое затухание никак не может повлиять на фундаментальные свойства нормальных колебаний – соответствие между числом нормальных мод и количеством степеней свободы и независимость нормальных колебаний.

§5. Вынужденные колебания

Вынужденные колебания – это колебания, которые происходят под действием какой-то внешней периодической силы. Пока мы ограничимся рассмотрением случая, когда "вынуждающая" сила изменяется со временем по гармоническому закону:

$$F(t) = F_0 \cos\omega t. \qquad (1.44)$$

Совершенно ясно, что, как только на систему начнет действовать посторонняя сила, система будет выведена из положения равновесия и, следовательно, в ней неминуемо будут возбуждены собственные колебания с частотой ω_c. Кроме того, система будет вынуждена "подчиняться" внешней силе, действующей в общем случае с иной частотой. Поэтому в начальный период времени колебания системы будут сложными, состоящими из двух гармонических колебаний с разными частотами. Однако в системе с затуханием собственные колебания, как это было выяснено в предыдущем параграфе, затухнут через время порядка $\tau_A = 1/\beta$. После этого осциллятор будет участвовать только в вынужденных колебаниях с частотой вынуждающей силы ω. Этот режим мы будем называть режимом "установившихся" вынужденных колебаний и в дальнейшем только этот режим и будем рассматривать.

Для того, чтобы получить дифференциальное уравнение установившихся вынужденных колебаний, необходимо добавить в правую часть уравнения (I.3I) член, описывающий действие вынуждающей силы (I.44):

$$m\ddot{\xi} = -r\dot{\xi} - K\xi + F_0 \cos\omega t. \qquad (I.45)$$

Это уравнение удобнее привести к виду

$$\ddot{\xi} + 2\beta\dot{\xi} + \omega_0^2\xi = f_0 \cos\omega t, \qquad (I.46)$$

где $f_0 = F_0/m$, $\beta = r/2m$, $\omega_0^2 = K/m$.

Аналогичное уравнение справедливо и для электрического контура, в котором роль вынуждающей силы играет внешняя ЭДС $V = V_0 \cos\omega t$. Учитывая, что сумма напряжений на емкости, индуктивности и сопротивлении равна в рассматриваемом случае внешней ЭДС, получим уравнение (I.46), в котором $f_0 = V_0/\mathcal{L}$, $\beta = R/2\mathcal{L}$, $\omega_0^2 = 1/\mathcal{L}C$, а вместо смещения ξ будет фигурировать заряд на конденсаторе q.

Поскольку установившиеся колебания происходят с частотой вынуждающей силы, решение уравнения (I.46) будем искать в виде

$$\xi = A\cos(\omega t - \alpha). \qquad (I.47)$$

Дифференцируя (I.47), получаем:

$$\dot{\xi} = -A\omega\sin(\omega t - \alpha) = A\omega\cos(\omega t - \alpha + \pi/2); \qquad (I.48)$$

$$\ddot{\xi} = -A\omega^2\cos(\omega t - \alpha) = A\omega^2\cos(\omega t - \alpha + \pi). \qquad (I.49)$$

Для решения (I.46) воспользуемся методом векторных диаграмм - заменим гармонические функции (I.47)-(I.49) векторами, вращающимися против часовой стрелки с угловой скоростью ω. Амплитуда каждого вектора равна коэффициенту перед соответствующим косинусом. Учтем также, что $\dot{\xi}$ и $\ddot{\xi}$ опережают по фазе ξ на $\pi/2$ и π, соответственно - см. (I.47)-(I.49). В итоге получим векторную диаграмму, показанную на рис.I0. Результат сложения трех векторов, соответствующих трем членам в левой части уравнения (I.46), должен быть равным вектору, соответствующему правой части. Амплитуда этого вектора равна f_0, а угол α - сдвиг по фазе между силой и смещением в соотношении (I.47). По теореме Пифагора имеем:

$$A^2[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2] = f_0^2. \qquad (I.50)$$

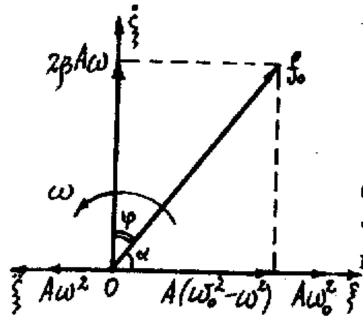


Рис.I0

Отсюда получаем амплитуду колебаний, и из рис.I0 - фазу:

$$A = f_0/\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}, \qquad (I.5I)$$

$$\alpha = \operatorname{arctg}[2\beta\omega/(\omega_0^2 - \omega^2)]. \qquad (I.52)$$

Составляющие амплитуды - т.н. "амплитуда поглощения" A_n и "амплитуда дисперсии" $A_д$ по определению равны:

$$A_n = A\sin\alpha, \quad A_д = A\cos\alpha. \qquad (I.53)$$

Рассмотрим сначала области низких ($\omega \ll \omega_0$) и высоких ($\omega \gg \omega_0$) частот. При $\omega \ll \omega_0$, как легко видеть из соотношений (I.5I)-(I.53):

$$A \simeq f_0/\omega_0^2, \quad A_n \simeq 2\beta f_0\omega/\omega_0^4 \to 0, \quad A_д \simeq A, \quad \alpha \simeq 0. \qquad (I.54)$$

Таким образом, на низких частотах смещение успевает следовать за силой; механический осциллятор ведет себя практически так же, как под действием постоянной силы F_0 - пружина растягивается на величину $A = F_0/m : m/K = F_0/K$. Соответственно, в электрическом контуре амплитуда заряда на конденсаторе на низких частотах $q_0 = CV_0$, т.е. все внешнее напряжение падает целиком на конденсаторе.

На высоких частотах ($\omega \gg \omega_0$) амплитуда $A \simeq f_0/\omega^2$ стремится к нулю при $\omega \to \infty$, а сдвиг фаз между силой и смещением при этом приближается к π ($\operatorname{tg}\alpha = -2\beta/\omega$). Амплитуды поглощения и дисперсии также асимптотически стремятся к нулю ($A_n \simeq 2\beta f_0/\omega^3$, $A_д \simeq -f_0/\omega^2$). В этих условиях осциллятор не успевает следовать за внешней силой, отсюда - малая амплитуда и отставание по фазе на π. ??

Найдем теперь условия, при которых достигается максимальная амплитуда колебаний (т.е. наблюдается резонанс смещения). Дифференцируя подкоренное выражение в (I.5I) и приравнивая производную нулю, получаем частоту, на которой реализуется резонанс смещения:

$$\omega_p = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2} = \sqrt{\omega_c^2 - \beta^2}. \qquad (I.55)$$

Подставляя (I.55) в (I.5I) и (I.52), получаем амплитуду смещения и тангенс сдвига фаз между смещением и силой при резонансе,

$$A^{(p)} = f_0 / 2\beta\omega_c \; ; \qquad (I.56)$$

$$tg\,\alpha_p = \omega_p / \beta \, . \qquad (I.57)$$

В условиях малого затухания ($\beta \ll \omega_0$) справедливы следующие приблизительные выражения:

$$A^{(p)} \simeq f_0 / 2\beta\omega_0 \; ; \qquad (I.56,a)$$

$$tg\,\alpha_p \simeq \omega_c / \beta ; \quad \alpha_p \simeq \pi/2 \, . \qquad (I.57,a)$$

Из соотношений (I.54) и (I.56,а) следует, что отношение амплитуды колебаний при резонансе к амплитуде на низкой частоте равно добротности (четвертое определение добротности):

$$A^{(p)}/A(\omega\to 0) = \omega_c^2/2\beta\omega_c \simeq \omega_c \tau_W \simeq Q \, . \qquad (I.58)$$

Очевидно, что для электрического контура величина добротности равна отношению амплитуды напряжения на конденсаторе при резонансе к амплитуде внешнего напряжения:

$$Q \simeq q_0^{(p)}/C V_0 = V_{C0}^{(p)}/V_0 \, . \qquad (I.59)$$

Из (I.53) видно, что при резонансе амплитуда дисперсии близка к нулю, а амплитуда поглощения приблизительно равна полной амплитуде.

Поскольку для электрических цепей важно знать частоту, при которой достигается максимальная амплитуда тока в цепи (а ток в электрическом контуре - аналог скорости для механического осциллятора), найдем условие резонанса скорости. Учитывая, что амплитуда скорости, в соответствии с (I.48), равна $A_v = A\omega$, получаем из (I.5I):

$$A_v = f_0 / \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 / \omega^2 + 4\beta^2} \, . \qquad (I.60)$$

Отсюда очевидно, что резонанс скорости (или тока в цепи, состоящей из последовательно соединенных индуктивности, емкости и сопротивления) наблюдается при частоте: $\omega_p^v = \omega_0$.

Обсудим теперь вопрос о мощности, затрачиваемой внешним источником на поддержание вынужденных незатухающих колебаний. По определению, мгновенная величина мощности есть произведение действующей силы на скорость тела

$$p(t) = F(t) \cdot \dot{\xi}(t) \, . \qquad (I.6I)$$

Подставляя в (I.6I) соотношения (I.44) и (I.48), имеем:

$$P(t) = F_0 A\omega \cos\omega t \cdot \cos(\omega t - \alpha + \pi/2) = \tfrac{1}{2} F_0 A\omega [\cos(2\omega t - \alpha + \pi/2) + \cos(\alpha - \pi/2)] \, . \qquad (I.62)$$

Из (I.62) следует, что мгновенная мощность, затрачиваемая внешней силой на возбуждение вынужденных колебаний с частотой ω изменяется со временем с удвоенной частотой 2ω. Средняя по времени величина затрачиваемой на возбуждение колебаний мощности

$$\langle P(t) \rangle = \frac{1}{T}\int_0^T P(t)dt = \tfrac{1}{2} F_0 A\omega \cos(\alpha - \pi/2) = \tfrac{1}{2} F_0 A_n \omega \, . \qquad (I.63)$$

Таким образом, величина $\langle p(t) \rangle$ оказывается пропорциональной амплитуде поглощения (отсюда и происхождение этого термина). Для электрической цепи формулу (I.63) легко трансформировать к виду

$$\langle p(t) \rangle = \tfrac{1}{2} V_0 q_0 \omega \cos\varphi = \frac{J_0 V_0}{2} \cos\varphi \, . \qquad (I.64)$$

В выражении (I.64) вместо угла α введен угол $\varphi = \alpha - \pi/2$ (сдвиг фаз между током и напряжением - рис.I0, II). Так как $V_0 \cos\varphi = J_0 R$ (см. рис.II), можно записать (I.64) несколько иначе:

$$\langle p(t) \rangle = J_0^2 R/2 = J_{эф}^2 R \, . \qquad (I.65)$$

Последнее выражение аналогично формуле для мощности, выделяемой на сопротивлении при протекании по нему постоянного тока силой $J_{эф} = J_0/\sqrt{2}$, поэтому эта величина называется "эффективным" (или "действующим") значением переменного гармонического тока. Точно так же вводится величина эффективного (или действующего) значения переменного гармонического напряжения $V_{эф} = V_0/\sqrt{2}$; соотношение (I.64) при этом может быть представлено в такой форме:

$$\langle p(t) \rangle = J_{эф} \cdot V_{эф} \cdot \cos\varphi \, . \qquad (I.66)$$

Множитель $\cos\varphi$ иногда называют "коэффициентом мощности", потому что сдвиг фаз между током и напряжением определяет величину выделяемой в цепи мощности при прочих равных условиях.

В частности, для идеальных (без потерь) емкости и индуктивности выделяющаяся мощность при любых $J_{эф}$ и $V_{эф}$ равна нулю, так как равен нулю коэффициент мощности (сдвиг фаз между током и напряжением $\varphi = \pi/2$ - см. рис.10, 11).

Для цепи, состоящей из последовательно соединенных емкости, индуктивности и сопротивления, вместо рис.10 удобнее изобразить векторную диаграмму, на которой представлены напряжения на конденсаторе $V_{C0} = \mathcal{I}_0/\omega C$, индуктивности $V_{\mathcal{L}0} = \mathcal{I}_0 \omega \mathcal{L}$ и сопротивлении (индексы "0" здесь означают амплитудные значения соответствующих напряжений). Переход от рис. 10 к рис.11 осуществляется заменой механических величин эквивалентными электрическими. Используя рис.11, получаем связь между амплитудой тока в цепи и амплитудой внешнего напряжения*

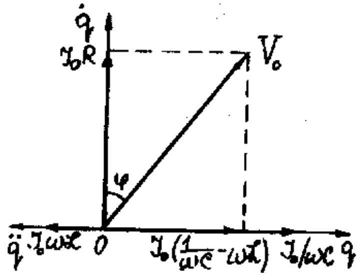


Рис.11

$$V_0 = \mathcal{I}_0\sqrt{(1/\omega C - \omega\mathcal{L})^2 + R^2}\,. \qquad (1.67)$$

Соотношение (1.67) называется законом Ома для переменного тока; величина $Z = \sqrt{(1/\omega C - \omega\mathcal{L})^2 + R^2}$ называется полным сопротивлением цепи; R - омическим; $Z_p = 1/\omega C - \omega\mathcal{L}$ - "реактивным" сопротивлением. Из рис.11 следует, что тангенс угла сдвига фаз между током и напряжением

$$tg\,\varphi = (\omega\mathcal{L} - 1/\omega C)/R\,. \qquad (1.68)$$

Весьма важным с практической точки зрения является вопрос о зависимости от частоты внешней силы величины мощности, затрачиваемой на возбуждение вынужденных колебаний. Для электрических контуров эта зависимость определяет их резонансные свойства. Для осцилляторов типа молекул или их ансамблей зависимость такого типа отражает характер полос поглощения, связанных с возбуждением колебаний того или иного рода под действием, например, инфракрасного излучения (в ИК-спектроскопии) или электромагнитных волн сантиметрового диапазона (ЭПР-спектроскопия), коротких радиоволн (ЯМР-спектроскопия).

Как следует из формулы (1.63), частотная зависимость поглощаемой мощности такова:

---

* Такая же связь между эффективными величинами напряжения и тока в цепи.

$$\langle P(t)\rangle = \frac{1}{2} F_0 A_n \omega \sim \omega^2/[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2]\,. \qquad (1.69)$$

Поскольку $(\omega_0^2 - \omega^2)^2 = (\omega_0 - \omega)^2(\omega_0/\omega + 1)^2\omega^2 \simeq (\omega_0 - \omega)^2 \cdot 4\omega^2$, легко видеть, что характер зависимости средней поглощаемой мощности от частоты может быть приближенно отображен функцией

$$\langle P(t)\rangle \sim R(\omega) = \beta^2/[(\omega_0 - \omega)^2 + \beta^2]\,. \qquad (1.70)$$

В спектроскопии функция (1.70) называется "лоренцевской" функцией формы линии. Она обладает следующими свойствами: $R(\omega) = 1$ при $\omega = \omega_0$; $R(\omega) = 1/2$ при $|\omega_0 - \omega| = \beta$; $R(\omega) = 0{,}1$ при $|\omega_0 - \omega| = 3$. Отсюда очевидно, что "полуширина" $\Delta\omega_p$ кривой, описывающей зависимость величины поглощаемой мощности от частоты

$$\Delta\omega_p = 2\beta = 1/\tau_W\,. \qquad (1.71)$$

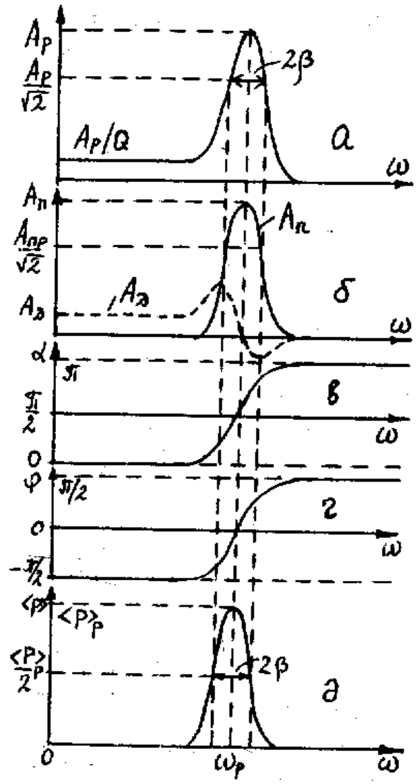


Рис.12

Используя (1.40,а), получаем пятое определение добротности:

$$Q = \omega_0\tau_W \simeq \omega_p\tau_W = \frac{\omega_p}{\Delta\omega_p}\,. \qquad (1.72)$$

Так как при выводе (1.70) были сделаны упрощающие предположения, необходимо указать диапазон частот, в котором формула (1.70) "работает". Нетрудно убедиться, что это диапазон ограничен весьма нежестким условием:

$$|\omega - \omega_0| \le n\beta\,, \text{ где}$$

$$n \ll 2\pi/\gamma = 2\pi N_e = 2Q\,. \qquad (1.73)$$

Для иллюстрации подведем некоторые итоги вышесказанному в графической форме - см.рис.12.

В заключительной части этого раздела остановимся кратко на особенностях вынужденных колебаний в системе свя-

занных осцилляторов. Совершенно ясно, что в системе с N сте-
пенями свободы при повышении частоты внешней силы будут поочe-
редно наблюдаться резонансы для всех N нормальных мод. Соот-
ветствующие резонансные кривые будут тем шире, чем меньше доб-
ротность для данной моды колебаний (эти добротности могут быть
разными!). Таким образом, в системе с N степенями свободы
при повышении частоты внешнего воздействия будут наблюдаться N
резонансных кривых с различными (в общем случае) амплитудами и
разной полушириной $\Delta\omega_p$. На каждой резонансной частоте будут
возбуждаться нормальные колебания только одного типа. С увели-
чением затухания резонансные кривые, соответствующие разным
нормальным модам, начнут перекрываться. В этих условиях теряет
смысл выделение отдельных нормальных мод, как независимых ко-
лебательных движений системы, не обменивающихся энергией; ис-
пользование представлений о нормальных колебаниях становится
некорректным.

Г Л А В А П. В О Л Н Ы

§ I. Классическое дифференциальное волновое уравнение

При увеличении числа связанных осцилляторов в системе, помимо выделения нормальных мод, выяснения спектра их частот не менее важным становится вопрос о скорости передачи колебательного движения из одной части системы в другую - т.е. о скорости распространения волн в системе. Под волнами мы будем понимать возмущения, распространяющиеся в какой-либо среде (далее мы убедимся, что такой средой может быть и вакуум) и несущие энергию.

Рассмотрим одномерную модель системы, состоящей из большого числа связанных осцилляторов - см. рис.I3.

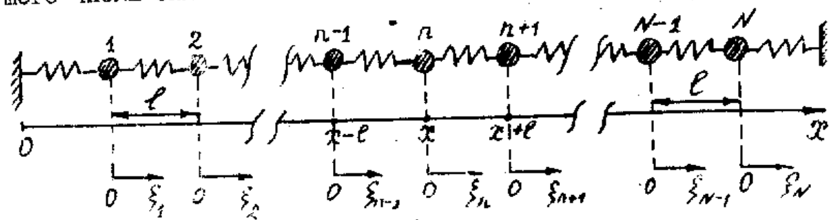


Рис.I3

Можно считать, что показанная на рис.I3 система моделирует одномерный кристалл, либо длинную молекулу полимерного типа. Массы всех N "атомов" будем считать одинаковыми и равными m, связи между ними моделируем пружинками с коэффициентами упругости K. Потерями (трением) в системе пренебрежем. Введем ось x, направленную вдоль цепочки атомов, через $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ обозначим отклонения каждого атома от положения равновесия. Расстояния между равновесными положениями всех соседних атомов будем полагать одинаковыми (ℓ).

Запишем второй закон динамики для n-го атома:

$$m\ddot{\xi}_n = K(\xi_{n+1}-\xi_n) - K(\xi_n - \xi_{n-1}). \qquad (2.I)$$

Поскольку n-й атом имеет координату x, можно заменить величину ξ_n на функцию $\xi(x)$. Далее мы ограничимся рассмотрением только таких колебательных движений в нашем кристалле, при которых соседние атомы движутся почти одинаково (это означает, что мы исключаем из рассмотрения наиболее высокочастотные моды колебаний). При этом на расстоянии ℓ величина смещения атома от положения равновесия изменяется мало; воспользовавшись разложением функций в ряд Тейлора, можно записать приблизительные выражения для смещений атомов с номерами $(n-1)$ и $(n+1)$, ограничиваясь тремя первыми членами разложений по малому параметру :

$$\xi_{n+1} = \xi(x+\ell,t) \simeq \xi(x,t) + \ell\cdot\partial\xi/\partial x + (\ell^2/2)(\partial^2\xi/\partial x^2); \qquad (2.2)$$

$$\xi_{n-1} = \xi(x-\ell,t) \simeq \xi(x,t) - \ell\cdot\partial\xi/\partial x + (\ell^2/2)(\partial^2\xi/\partial x^2). \qquad (2.3)$$

Подставив (2.2)-(2.3) в (2.I), получаем линейное дифференциальное уравнение второго порядка:

$$\partial^2\xi/\partial t^2 = (K\ell^2/m)(\partial^2\xi/\partial x^2). \qquad (2.4)$$

Учитывая, что коэффициент перед $\partial^2\xi/\partial x^2$ имеет размерность скорости, уравнение (2.4) можно записать так:

$$\partial^2\xi/\partial t^2 = v^2\partial^2\xi/\partial x^2. \qquad (2.5)$$

Это уравнение описывает распространение возмущений в нашем одномерном кристалле, оно называется одномерным дифференциальным уравнением волны. Термин "классическое" применяется для того, чтобы подчеркнуть ограниченный диапазон использования это-

Переходя к непрерывной среде,
устремим число осцилляторов к ∞, а ℓ - к нулю,
получим гладкую ф-цию $\xi(x,t)$.
Пусть x - координата n-го осциллятора. Тогда,
разложив ξ в ряд Тейлора и считая, что в ...
... мало ...

го уравнения: I. только в случае малых возмущений (квазиупругая сила); 2. для недиспергирующих сред (объяснение этого термина будет приведено ниже).

В трехмерном случае уравнение (2.5) выглядит так:

$$\partial^2\xi/\partial t^2 = \upsilon^2\Delta\xi. \qquad (2.6)$$

Здесь $\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2$ – оператор Лапласа.

§ 2. Уравнение волны

Уравнением упругой волны называется соотношение, в явной форме описывающее зависимость смещения колеблющихся частиц от координат и времени. В случае электромагнитной волны, как будет показано ниже, вместо смещения в уравнении волны будут фигурировать напряженность электрического и индукция магнитного полей.

Сначала будем предполагать, что для нашего одномерного кристалла (рис.I3) в начале координат ($x = 0$) в начальный момент времени начинается колебательное движение одного атома по гармоническому закону:

$$\xi(0,t) = A\cos\omega t \qquad (2.7)$$

Очевидно, что на соседние атомы будет действовать гармоническая возмущающая сила с частотой ω, и это возмущение будет постепенно распространяться все дальше от "начального" атома. Обозначим через υ скорость распространения этого возмущения. Тогда зависимость от времени смещения атома, расположенного в точке с координатой x, можно, очевидно, представить в виде "запаздывающей" на время $\tau = x/\upsilon$ гармонической функции

$$\xi(x,t) = A\cos[\omega(t-\tau)] = A\cos(\omega t - kx), \qquad (2.8)$$

где $k = \omega/\upsilon = 2\pi/\lambda$ – т.н. "волновое число", λ – длина волны. Подставляя (2.8) в волновое уравнение (2.5), убеждаемся в том, что это действительно решение волнового уравнения, причем введенный ранее из соображений размерности параметр υ дифференциального уравнения (2.5) по физическому смыслу соответствует скорости распространения фазы волны (и называется поэтому "фазовой" скоростью). Существенно, что классическому дифференциальному волновому уравнению (2.5) удовлетворяют гармонические волны (2.8) различных частот ω при том, однако, условии, что

скорости распространения этих волн не зависят от частоты. Среды, в которых скорости распространения волн разных частот одинаковы, называются "недиспергирующими". Поскольку всякая достаточно "плавная" функция может быть разложена на гармонические функции (в ряд Фурье)*, совершенно очевидно, что такая функция $\xi(t - x/\upsilon)$ также будет решением уравнения (2.5). Предлагаем убедиться в этом прямой подстановкой. Этой функции соответствует распространяющаяся по оси x со скоростью υ негармоническая волна.

Введем некоторые определения. Волновой поверхностью мы будем называть геометрическое место точек, колеблющихся в одинаковой фазе. Из определения ясно, что волновых поверхностей может быть бесконечно много. В модели одномерного кристалла (рис. I3) каждая волновая поверхность вырождается в точку. Имеет смысл специально выделить переднюю волновую поверхность, которая называется фронтом волны.

Если фронт волны и волновые поверхности – плоскости, то волна называется плоской. Плоскую волну можно наблюдать в тех точках, когда расстояние до источника волн x много меньше размеров источника $\mathcal{D}$:

$$x \ll \mathcal{D}. \qquad (2.9)$$

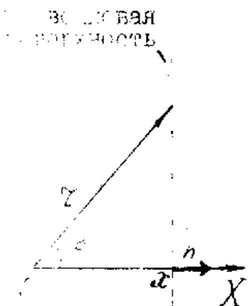


Рис.I4

Уравнение плоской волны, распространяющейся по оси x, аналогично (2.8), поскольку все точки, лежащие на одной и той же волновой поверхности (плоскости, перпендикулярной оси x), колеблются одинаково. Для плоской волны часто используют форму записи уравнения волны в полярной системе координат (см. рис.I4). Введем радиус-вектор, проведенный из начала полярной системы координат в произвольную точку пространства ($\vec{r}$), а также волновой вектор $\vec{k}$,

---

* [illegible] функция $f(x)$ должна удовлетворять условиям Дирихле: а) интервал, на котором функция определена, может быть разбит на конечное число интервалов, в каждом из которых $f(x)$ непрерывна и монотонна, и б) во всякой точке разрыва $f(x)$ существуют $f(x+0)$ и $f(x-0)$.

равный по величине волновому числу и направленный по нормали к волновой поверхности в сторону распространения волны. Тогда $kx = kr\cos\beta = \vec{k}\vec{r}$ (см. рис.14) и уравнение плоской волны записывается в виде

$$\xi(r,t) = A\cos(\omega t - \vec{k}\vec{r}). \qquad (2.10)$$

Если размеры источника много меньше расстояния до него:

$$D \ll x, r; \qquad (2.11)$$

то волновые поверхности имеют сферическую форму, волна в этом случае также называется сферической. Ясно, что по мере удаления волны от источника энергия волны распределяется по все возрастающему количеству частиц среды. Энергия, приходящаяся на одну частицу, обратно пропорциональна площади соответствующей волновой поверхности, т.е. $\sim 1/r^2$ (здесь r – расстояние от волновой поверхности до точечного источника). Поскольку энергия колеблющейся частицы пропорциональна квадрату амплитуды (см. (1.9)), амплитуда колебаний частиц в сферической волне обратно пропорциональна r. В итоге уравнение сферической волны следует записать так:

$$\xi(r,t) = (A_0/r)\cdot\cos(\omega t - kr). \qquad (2.12)$$

Наконец, если часть энергии волны теряется в среде из-за поглощения, то происходит постепенное затухание волны, которое нужно учесть аналогично (1.36) введением дополнительного экспоненциального множителя перед косинусом:

$$A = A_0 e^{-\gamma x} \quad \text{– плоская волна;} \qquad (2.13)$$

$$A = (A_0/r)e^{-\gamma r} \quad \text{– сферическая волна.} \qquad (2.14)$$

Подчеркнем, что соотношения (2.8), (2.10), (2.12)-(2.14) описывают как продольные волны (смещение частиц происходит вдоль направления распространения), так и поперечные волны (частицы колеблются в плоскости, перпендикулярной направлению распространения).

В заключение этого параграфа покажем, что полученное нами выражение для фазовой скорости упругой волны в одномерной цепочке атомов (рис.13) легко обобщается на систему с распределенными параметрами – длинный однородный стержень, изготовленный из материала, плотность которого ρ и модуль Юнга E*.

* Определение модуля Юнга будет дано ниже.

Рассмотрим отрезок стержня длиной ℓ (см. рис.15), масса которого $m = \rho\ell S$, где S – площадь поперечного сечения стержня. Поскольку выбранный нами отрезок в целом покоится, приложенные к нему слева и справа силы F равны (для определенности будем считать эти силы растягивающими). При этом отрезок удлиняется на $\Delta\ell$. В рассматриваемом случае коэффициент упругости – это коэффициент пропорциональности между силой F и удлинением стержня $\Delta\ell$:

Рис.15

$$\kappa = F/\Delta\ell = FS/S\Delta\ell = \sigma S/\Delta\ell. \qquad (2.15)$$

В соотношении (2.15) введена величина механического напряжения $\sigma = F/S$. Подставляя полученные для m и κ выражения в формулу

$$v^2 = \kappa\ell^2/m = \sigma\ell/\rho\Delta\ell \qquad (2.16)$$

и учитывая, что величина $E = \sigma\ell/\Delta\ell$ по определению называется модулем Юнга, имеем окончательно для скорости распространения упругой волны следующее соотношение:

$$v = \sqrt{E/\rho}. \qquad (2.17)$$

При выводе (2.17) мы предполагали, что при распространении волны силы действуют вдоль стержня (по направлению распространения волны); соответственно, частицы стержня также совершают колебательные движения вдоль оси x (т.е. рассматривали продольные волны). В твердом теле возможно также распространение поперечных волн. Нетрудно показать, что в этом случае модуль Юнга в формуле (2.17) нужно заменить на модуль сдвига.

§ 3. Энергия упругой волны

Начнем рассмотрение энергии упругой волны с простой модели продольной волны в одномерном кристалле (рис.13). Вычислим энергию, приходящуюся на один "элемент" нашего кристалла – одну массу m и одну пружину – см. рис.16. Кинетическая энергия элемента локализована на массе, движущейся со скоростью $\partial\xi/\partial t$:

$$T = (m/2)(\partial\xi/\partial t)^2. \qquad (2.18)$$

Потенциальная энергия деформированной пружины определяется квадратом величины растяжения (или сжатия) $(\xi_{n+1} - \xi_n)^2$; учитывая соотношение (2.2), имеем $(\xi_{n+1}-\xi_n)=l\,\partial\xi/\partial x$, откуда

$$U=\kappa l^2(\partial\xi/\partial x)^2/2=m\upsilon^2(\partial\xi/\partial x)^2/2 \qquad (2.19)$$

Итак, для рассматриваемой нами простой модели полная энергия одного элемента одномерного кристалла:

$$W=(m/2)[(\partial\xi/\partial t)^2+\upsilon^2(\partial\xi/\partial x)^2] \qquad (2.20)$$

Эта формула может быть естественным образом обобщена на любые (не обязательно одномерные) среды с распределенными параметрами. Для этого нужно только заменить массу одного элемента на массу, приходящуюся на единицу объема среды (т.е. плотность ρ), при этом получим полную энергию, приходящуюся на единицу объема среды, в которой распространяется упругая волна:

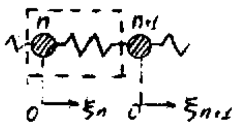


Рис.16

$$W_0=(\rho/2)[(\partial\xi/\partial t)^2+\upsilon^2(\partial\xi/\partial x)^2] \qquad (2.21)$$

Величина W_0 называется плотностью энергии упругой волны. Для плоской волны, распространяющейся по оси (как продольной, так и поперечной): зависимость смещения от координаты и времени определяется уравнением (2.8), откуда:

$$T_0=(\rho/2)(\partial\xi/\partial t)^2=(\rho/2)A^2\omega^2\sin^2(\omega t-kx); \qquad (2.22)$$

$$U_0=(\rho/2)(\upsilon\partial\xi/\partial x)^2=(\rho/2)A^2\omega^2\sin^2(\omega t-kx)=T_0 \qquad (2.23)$$

Из соотношений (2.21)-(2.23) получаем

$$W_0=T_0+U_0=\rho A^2\omega^2\sin^2(\omega t-kx) \qquad (2.24)$$

На рис.17 показаны пространственное распределение $\xi(x)$ и соответствующие функции $T_0(x)$, $U_0(x)$ для бегущей упругой волны. Максимумы потенциальной и кинетической энергии в бегущей волне локализованы в одних и тех же местах (там, где $\xi=0$). Со временем показанная на рис.17 картинка "бежит" по оси x со скоростью υ. В любой фиксированной точке пространства величина плотности энергии со временем пульсирует (период пульсаций в два раза меньше периода волны - см. рис.17). Поэтому целесообразно определить среднее по времени (или в пространстве) значение плотности энергии $\langle W_0\rangle$. Учитывая, что усреднение по времени квадрата синуса дает 1/2, получаем:

$$\langle W_0(t)\rangle=\rho A^2\omega^2/2. \qquad (2.25)$$

Поскольку волна переносит энергию, полезно определить несколько величин, характеризующих этот перенос.

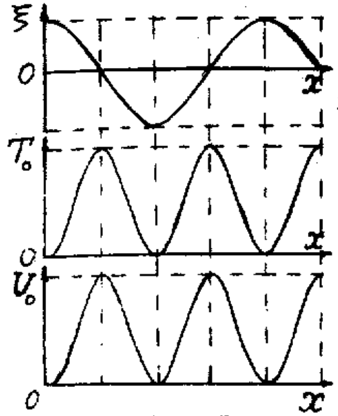


Рис.17

Плотность потока энергии - количество энергии, переносимой волной в единицу времени через единичную площадку, перпендикулярную направлению распространения волны. Численно эта величина равна энергии, заключенной внутри цилиндрической поверхности с единичным основанием и образующей υ :

$$S(t)=W_0(t)\cdot\upsilon. \qquad (2.26)$$

Подчеркнем, что плотность потока энергии является функцией времени, поскольку зависит от времени величина $W_0(t)$ - см. (2.24).

Интенсивностью волны называется среднее по времени значение плотности потока энергии волны:

$$I=\langle S(t)\rangle=\langle W_0(t)\rangle\upsilon=\rho A^2\omega^2\upsilon/2. \qquad (2.27)$$

Русским физиком Н.А.Умовым в 1874 г. была введена векторная характеристика переноса энергии упругой волной:

$$\bar{S}(t)=W_0(t)\bar{\upsilon}. \qquad (2.28)$$

Впоследствии величина $\bar{S}$ получила название вектора Умова. Как следует из (2.28), амплитуда вектора Умова изменяется со временем и в пространстве, поэтому целесообразно определить среднее по времени значение вектора Умова (векторную интенсивность волны):

$$\langle\overline{S(t)}\rangle=\langle W_0(t)\rangle\bar{\upsilon}=\rho A^2\omega^2\bar{\upsilon}/2. \qquad (2.29)$$

Поток энергии упругой волны через любую поверхность S можно определить интегрированием скалярного произведения вектора Умова на векторный элемент площадки $d\bar{S}$ (вектор $d\bar{S}$ направлен по нормали к площадке dS):

$$\Phi=\int_S\bar{S}(t)d\bar{S}=\int_S S_n(t)dS. \qquad (2.30)$$

5 -7336

Здесь S_n – нормальная к площадке dS составляющая вектора $\bar{S}$.

Наконец, среднее по времени значение потока энергии упругой волны через поверхность S:

$$\langle \Phi(t) \rangle = \int_S \langle \bar{S} \rangle d\bar{S} = \int_S \langle S_n \rangle dS. \qquad (2.31)$$

§ 4. Электромагнитные волны в системе связанных контуров и в двухпроводной линии

Рассмотрим процесс передачи колебаний в системе связанных контуров, являющейся аналогом механической модели одномерного кристалла см. рис.18. Выделим в этой системе два произвольных соседних контура, включающих конденсаторы с номерами $n-1$, n и $n+1$. Для определенности обозначим на рисунке знаки зарядов

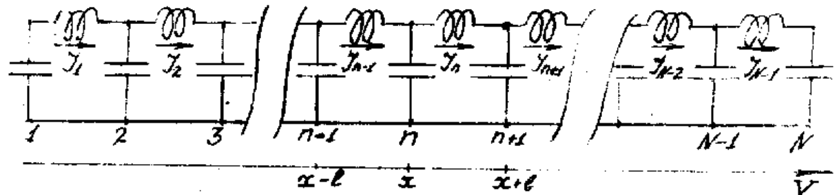


Рис.18

на конденсаторах и направления токов через индуктивности. Осуществляя обход по двум контурам по часовой стрелке, получаем уравнения:

$$q_{n-1}/C - \mathcal{L}\, d\mathcal{I}_{n-1}/dt - q_n/C = 0, \qquad (2.32)$$

$$q_n/C - \mathcal{L}\, d\mathcal{I}_n/dt - q_{n+1}/C = 0. \qquad (2.33)$$

Вычитая из (2.32) соотношение (2.33), имеем:

$$(q_{n+1} + q_{n-1} - 2q_n)/C - \mathcal{L}\, d(\mathcal{I}_{n-1} - \mathcal{I}_n)/dt = 0. \qquad (2.34)$$

Поскольку $\mathcal{I}_{n-1} - \mathcal{I}_n = \dot{q}_n$, второй член уравнения (2.34) может быть записан в форме $\mathcal{L}\ddot{q}_n$. Будем, кроме того, считать по аналогии с одномерным кристаллом, что заряд на конденсаторах является достаточно плавной и непрерывной функцией координаты и воспользуемся, как и ранее, разложением функций в ряды Тейлора:

$$q_n \equiv q(x); \qquad (2.35)$$

$$q_{n+1} \equiv q(x+\ell) = q(x) + \ell\,\partial q/\partial x + (\ell^2/2)\,\partial^2 q/\partial x^2 + \ldots; \qquad (2.36)$$

$$q_{n-1} \equiv q(x-\ell) = q(x) - \ell\,\partial q/\partial x + (\ell^2/2)\,\partial^2 q/\partial x^2 \ldots \qquad (2.37)$$

Ограничиваясь только указанными членами разложений в ряды и подставляя (2.35)-(2.37) в (2.34), получаем дифференциальное волновое уравнение в форме:

$$\partial^2 q/\partial t^2 = (\ell^2/\mathcal{L}C)\,\partial^2 q/\partial x^2. \qquad (2.38)$$

Сравнивая (2.38) с (2.5), находим скорость электромагнитной волны в системе, состоящей из большого количества связанных контуров:

$$v = \ell/\sqrt{\mathcal{L}C}. \qquad (2.39)$$

Аналогично механической системе, уравнение (2.38) можно обобщить на случай системы с распределенными параметрами – двухпроводной линии (см. рис.19). Будем считать, что двухпроводная линия представляет собой расположенные на расстоянии h друг от друга две широкие длинные проводящие полосы, параллельные друг другу. Потерями в линии будем пренебрегать. В такой линии емкость и индуктивность распределены по всей линии, а не сосредоточены на дискретных элементах, как в системе, показанной на рис.18.

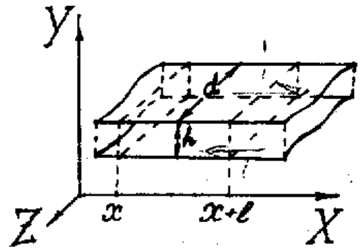


Рис.19

Как и в случае механической системы с распределенными параметрами (рис.16), задача сводится к преобразованию соотношения (2.39), описывающего зависимость скорости волны от параметров системы.

Определим емкость и индуктивность участка двухпроводной линии длиной ℓ.

Электроемкость плоского конденсатора с площадью пластин ℓd и расстоянием h между ними равна

$$C = \varepsilon\varepsilon_0 \ell d/h, \qquad (2.40)$$

где ε – диэлектрическая проницаемость среды между пластинами конденсатора, ε_0 – электрическая постоянная.

Для определения индуктивности участка линии длиной ℓ предположим, что на этом участке по верхней шине протекает ток $\mathcal{I}$, направленный по оси x; соответственно, по нижней шине течет такой же ток, но направленный в противоположную сторону (как в каждом контуре рис.18). Из теоремы о циркуляции следует, что магнитное поле такой "бифилярной" системы будет отличаться от нуля только в пространстве между пластинами. Направление вектора магнитной индукции легко определить по правилу буравчика – вектор $\bar{B}$ направлен по оси Z. Совершая обход по замкнутому контуру, охватывающему только один провод линии, и расположенному в плоскости YZ, имеем по теореме о циркуляции:

$$Bd = \mu\mu_0 J, \quad B = \mu\mu_0 J/d. \tag{2.41}$$

Умножая величину магнитной индукции на ℓh, получаем магнитный поток через участок боковой поверхности линии длиной ℓ:

$$\Phi = B\ell h = \mu\mu_0 \ell h J/d. \tag{2.42}$$

Поскольку по определению $\Phi = \mathcal{L}J$, искомая индуктивность $\mathcal{L}$ участка линии длиной ℓ равна:

$$\mathcal{L} = \mu\mu_0 \ell h/d. \tag{2.43}$$

Наконец, подставляем (2.43) и (2.40) в (2.39), и определяем скорость электромагнитной волны в двухпроводной линии, помещенной в среду с диэлектрической проницаемостью ε и магнитной проницаемостью μ (μ_0 – магнитная постоянная):

$$\upsilon = 1/\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0} = c/n. \tag{2.44}$$

Здесь $c = 1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0} = 3\cdot10^8$ м/с – скорость электромагнитной волны в двухпроводной линии, помещенной в вакуум;
$n = \sqrt{\varepsilon\mu}$ – параметр, зависящий от свойств среды.

Так как величина заряда на верхней и нижней шинах (заряда конденсатора) $q(x)$ пропорциональна напряженности электрического поля $E(x)$, дифференциальное уравнение (2.38) можно записать следующим образом:

$$\partial^2 E/\partial t^2 = \upsilon^2 \partial^2 E/\partial x^2. \tag{2.45}$$

Подчеркнем, что в распространяющейся по оси x электромагнитной волне вектор $\bar{E}$ направлен по оси y, а вектор магнитной индукции $\bar{B}$ – по оси Z, т.е. электромагнитная волна – поперечная.

§ 5. Электромагнитные волны в однородной непроводящей среде

Для вывода уравнения электромагнитной волны в однородной непроводящей среде воспользуемся уравнениями Максвелла в интегральной форме. При выводе дифференциального уравнения волны нам понадобятся только два из них – обобщенные выражения закона электромагнитной индукции и теоремы о циркуляции (с учетом того, что ток проводимости отсутствует):

$$-(\partial/\partial t)\int_S \bar{B}d\bar{S} = \oint_\ell \bar{E}d\bar{\ell}, \tag{2.46}$$

$$\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0(\partial/\partial t)\int_S \bar{E}d\bar{S} = \oint_\ell \bar{B}d\bar{\ell}. \tag{2.47}$$

Правые интегралы в (2.46) и (2.47) берутся по замкнутому контуру ($d\bar{\ell}$ – элемент контура), левые – по площадкам, ограниченным соответствующими контурами. Необходимо помнить, что направление обхода по контуру и направление нормали к площадке строго связаны между собой правилом буравчика.

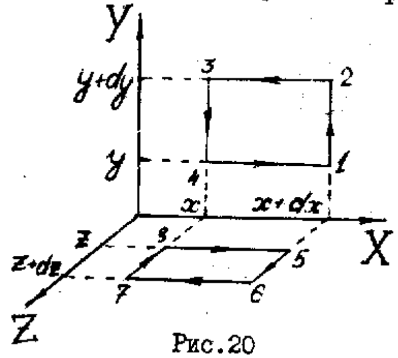


Рис.20

Будем предполагать, что напряженность электрического поля и индукция магнитного поля – функции только координаты x – см. рис.20. Это означает, что рассматриваемая нами электромагнитная волна (если, конечно, мы докажем ее существование) – плоская.

Выберем прямоугольный контур в плоскости XY и будем осуществлять обход по пути 1-2-3-4, предполагая величины dx и dy малыми. Учтем, что на участке 1-2 перемещение происходит по оси Y, поэтому $\int_1^2 \bar{E}d\bar{\ell} = E_y(x+dx)dy$; на участке 3-4 перемещение происходит против оси Y, поэтому $\int_3^4 \bar{E}d\bar{\ell} = -E_y(x)dy$; участки 2-3 и 4-1 абсолютно одинаковы, но проходятся в разные стороны, следовательно $\int_2^3 E_x(x)dx = -\int_4^1 E(x)dx$. В итоге имеем:

$$\oint \bar{E}d\bar{\ell} = [E_y(x+dx) - E_y(x)]dy = (\partial E_y/\partial x)dx\,dy. \tag{2.48}$$

Левая часть соотношения (2.46) легко вычисляется, если иметь в виду, что площадка dS – малая, так что величина $\bar{B}$ в разных местах этой площадки одинакова, а нормаль к этой площадке направлена по оси Z:

$$\int_S \bar{B}d\bar{S} = B_z\,dx\,dy. \tag{2.49}$$

Подставив (2.48) и (2.49) в соотношение (2.46), получаем:

$$\partial E_y/\partial x = -\partial B_z/\partial t. \tag{2.50}$$

Аналогичным образом выберем прямоугольный контур в плоскости XZ и осуществим обход по пути 5-6-7-8. Правая часть уравнения (2.47) вычисляется точно так же, как и правая часть (2.46):

$$\oint \bar{B}d\bar{l} = [B_z(x+dx) - B_z(x)]dz = (\partial B_z/\partial x)\,dx\,dz. \tag{2.51}$$

При вычислении левой части нужно учитывать, что направление нормали к контуру 5-6-7-8 противоположно оси Y:

$$\int_S \bar{E}d\bar{S} = -E_y\,dx\,dz. \tag{2.52}$$

Подстановка (2.51) и (2.52) в (2.47) приводит к уравнению

$$\partial B_z/\partial x = -\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0(\partial E_y/\partial t). \tag{2.53}$$

Дифференцируя (2.50) и (2.53) по координате x и изменяя порядок дифференцирования в правых частях (2.50) и (2.53), получаем

$$\partial^2 E_y/\partial x^2 = -(\partial/\partial t)\cdot(\partial B_z/\partial x), \tag{2.50,a}$$

$$\partial^2 B_z/\partial x^2 = -\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0(\partial/\partial t)\cdot(\partial E_y/\partial x). \tag{2.53,a}$$

Наконец, подставляем в правую часть (2.50,а) формулу (2.53) а в правую часть (2.53,а) - соотношение (2.50); в итоге имеем два дифференциальных уравнения электромагнитной волны:

$$\partial^2 E_y/\partial t^2 = v^2\partial^2 E_y/\partial x^2, \tag{2.54}$$

$$\partial^2 B_z/\partial t^2 = v^2\partial^2 B_z/\partial x^2. \tag{2.55}$$

Естественно, что эти уравнения абсолютно одинаковы - изменения электрического и магнитного полей в электромагнитной волне строго взаимосвязаны. Скорость электромагнитной волны получилась такой же, как и в двухпроводной линии - см. формулу (2.44). Следовательно, двухпроводная линия просто направляет электромагнитную волну в нужную сторону, присутствие линии не является необходимым условием существования волны.

Из уравнений (2.54)-(2.55) следует, что электромагнитная волна, в отличие от упругой, может распространяться в вакууме со скоростью $c = 1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0} = 3\cdot10^8$ м/с. Получив это число из своих уравнений, Максвелл сделал фундаментальный вывод - свет представляет собой электромагнитную волну (к тому времени скорость света была уже измерена экспериментально с достаточно

большой точностью). Для световой волны параметр $n = \sqrt{\varepsilon\mu}$ называется показателем преломления; скорость света в среде с показателем преломления n определяется соотношением $v = c/n$.

Из уравнений (2.54) и (2.55) следует еще один принципиальный вывод - электромагнитная волна всегда является поперечной. Действительно, задавшись только одним ограничением - предполагая, что волна плоская, мы в итоге автоматически получили, что в уравнениях (2.54) и (2.55) присутствуют только компоненты напряженности электрического поля и индукции магнитного поля, направленные по осям Y и Z соответственно.

Поэтому в дальнейшем мы не будем пользоваться индексами "y" и "z" у напряженности электрического поля и индукции магнитного поля.

Более внимательный анализ полученных нами уравнений позволяет достаточно просто найти связь между амплитудами и фазами колебаний векторов $\bar{E}$ и $\bar{B}$. Для этого исследуем случай гармонической волны - предположим, что напряженность электрического поля изменяется по закону:

$$E = E_0\cos(\omega t - kx). \tag{2.56}$$

Предполагая возможность сдвига по фазе между колебаниями векторов $\bar{E}$ и $\bar{B}$, запишем:

$$B = B_0\cos(\omega t - kx + \varphi). \tag{2.57}$$

Далее подставляем (2.56) и (2.57) в уравнения (2.50) и (2.53):

$$kE_0\sin(\omega t - kx) = \omega B_0\sin(\omega t - kx + \varphi), \tag{2.58}$$

$$kB_0\sin(\omega t - kx + \varphi) = \omega E_0\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0\sin(\omega t - kx). \tag{2.59}$$

Совершенно очевидно, что равенства (2.58) и (2.59) могут выполняться, только если равны амплитуды и фазы гармонических функций в левых и правых частях этих равенств. Отсюда получаем, что фазы колебаний векторов $\bar{E}$ и $\bar{B}$ одинаковы ($\varphi = 0$); перемножив перекрестно амплитуды (2.58) и (2.59) и приравняв результаты перемножения, имеем:

$$\varepsilon\varepsilon_0 E_0^2 = B_0^2/\mu\mu_0. \tag{2.60}$$

Поскольку фазы колебаний векторов $\bar{E}$ и $\bar{B}$ совпадают, соотношение (2.60) выполняется для величин напряженности электрического поля и индукции магнитного поля в произвольные моменты времени (не только для амплитудных значений):

$$\varepsilon\varepsilon_0 E^2 = B^2/\mu\mu_0\,, \quad B = E/v. \tag{2.61}$$

На рис.21 показана мгновенная "фотография" плоской электромагнитной волны, распространяющейся по оси x. С течением времени волна движется по оси x со скоростью $v = c/n$.

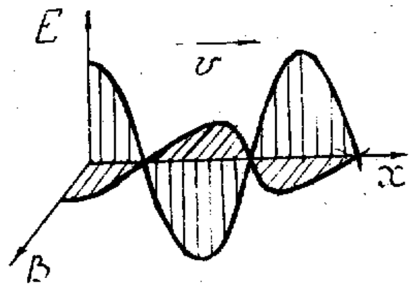


Рис.21

Обратим внимание, что тройка векторов $\bar{E}$, $\bar{B}$ и $\bar{v}$ жестко закреплена; направление скорости волны всегда совпадает с направлением векторного произведения $[\bar{E}\,\bar{B}]$. Максимумы напряженности электрического поля в электромагнитной волне совпадают с максимумами индукции магнитного поля.

§ 6. Энергия электромагнитной волны

Энергия электромагнитной волны складывается из энергии электрического поля и энергии магнитного поля. Ранее были получены выражения для плотности энергии электрического W_{0E} и магнитного W_{0B} полей:

$$W_{0E} = \varepsilon\varepsilon_0 E^2/2, \tag{2.62}$$

$$W_{0B} = B^2/2\mu\mu_0. \tag{2.63}$$

Сравнивая (2.62) и (2.63) с (2.61), приходим к выводу, что в электромагнитной волне энергия распределяется поровну между электрическим и магнитным полем (точно так же, как в упругой волне энергия распределяется поровну между кинетической и потенциальной - см. (2.24)).

Из соотношений (2.62) и (2.63) следует, что плотность энергии (энергия, приходящаяся на единицу объема) в среде, где распространяется электромагнитная волна, равна:

$$W_0 = W_{0E} + W_{0B} = \varepsilon\varepsilon_0 E^2 = B^2/\mu\mu_0 = EB/\mu\mu_0 v. \tag{2.64}$$

Для характеристики переноса энергии электромагнитной волной вводятся плотность потока энергии (S), интенсивность (I), поток энергии через какую-либо площадку (Φ). Определения этих величин такие же, как для упругой волны (см. стр. 33). Аналогом вектора Умова является вектор Пойнтинга* ($\bar{S}$)

$$S(t) = W_0(t)\cdot v = EB/\mu\mu_0, \tag{2.65}$$

$$I = \langle S(t)\rangle = \langle W_0(t)\rangle v = E_0 B_0/2\mu\mu_0, \tag{2.66}$$

$$\bar{S}(t) = W_0(t)\bar{v} = [\bar{E}\,\bar{B}]/\mu\mu_0, \tag{2.67}$$

$$\langle \overline{S(t)}\rangle = \langle W_0(t)\rangle \bar{v} = [\bar{E}_0 \bar{B}_0]/2\mu\mu_0, \tag{2.68}$$

$$\Phi(t) = \int \bar{S}\, d\bar{S} = \int S_n\, dS, \tag{2.69}$$

$$\langle \Phi(t)\rangle = \int_S \langle \overline{S(t)}\rangle\, d\bar{S} = \int_S \langle S_n\rangle\, dS. \tag{2.70}$$

ГЛАВА III. ИНТЕРФЕРЕНЦИЯ ВОЛН

§ 1. Наложение волн

Пусть в данную точку пространства приходят две волны (упругие или электромагнитные). Пока будем рассматривать случай, когда обе волны вызывают в этой точке колебания, направленные по одной оси (смещения частиц в упругих волнах, или колебания векторов $\bar{E}$ и $\bar{B}$ в электромагнитных волнах).

Будем предполагать, что выполняется принцип суперпозиции: (принцип наложения волн), т.е. допустим, что результирующий эффект от наложения двух волн есть просто сумма эффектов, вызываемых каждой волной (иначе говоря, предположим, что отсутствует влияние волн друг на друга). В этом случае, предполагая для простоты, что в рассматриваемую точку приходят две монохроматические гармонические волны с частотами ω_1 и ω_2, результирующие колебания можно найти сложением двух колебаний:

$$\xi = \xi_1 + \xi_2, \tag{3.1}$$

где

$$\xi_1 = A_1\cos(\omega_1 t + \varphi_{01}); \quad \xi_2 = A_2\cos(\omega_2 t + \varphi_{02}). \tag{3.2}$$

Здесь $\varphi_{01}, \varphi_{02}$ - начальные фазы соответствующих колебаний;
A_1, A_2 - амплитуды колебаний.

Сложение колебаний удобно осуществить методом векторных диаграмм (см. стр. 20). Изобразим гармонические колебания (3,2) двумя векторами, вращающимися против часовой стрелки с угловыми скоростями ω_1 и ω_2 - см. рис.22. На рисунке приведена "мгновенная фотография" векторов в произвольный момент времени t.

* Введен английским физиком Дж.Г.Пойнтингом в 1885 г.

Углы φ_1 и φ_2 равны фазам колебаний в этот момент:

$$\varphi_1 = \omega_1 t + \varphi_{01}\ ,\ \varphi_2 = \omega_2 t + \varphi_{02}\ . \qquad (3.3)$$

Обозначая $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$ и используя теорему косинусов, получаем выражение для квадрата амплитуды результирующего колебания:

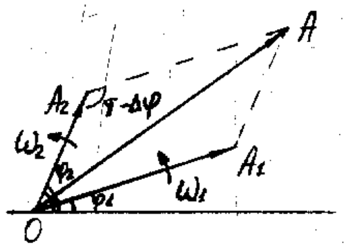


Рис.22

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos\Delta\varphi. \qquad (3.4)$$

Нас в первую очередь интересует интенсивность волны в рассматриваемой точке пространства, которая, как было показано ранее (см. (2.27), (2.66)), пропорциональна средней по времени величине квадрата амплитуды колебаний

$$\langle A^2\rangle = (1/\tau)\int_0^{\tau} A^2 d\tau = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\langle\cos\Delta\varphi\rangle. \qquad (3.5)$$

Из соотношения (3.5) следует, что результирующая интенсивность равна

$$I = I_1 + I_2 + \Delta I, \qquad (3.6)$$

где третье слагаемое, называемое "интерференционным членом"

$$\Delta I = 2\sqrt{I_1 I_2}\ \langle\cos\Delta\varphi\rangle. \qquad (3.7)$$

Если в точке, которую мы рассматриваем, находится какой-либо прибор, регистрирующий колебания (для световых волн - фотопленка, глаз; для звуковых - микрофон, ухо), то необходимо учитывать, что любой аппарат осуществляет измерение интенсивности волны в течение какого-то конечного времени τ . Если за это время разность фаз будет беспорядочно изменяться, то средняя величина интерференционного члена окажется равной нулю, и в результате сложения колебаний от двух источников будет выполняться правило сложения интенсивностей:

$$I = I_1 + I_2\ . \qquad (3.8)$$

Если же за время измерений изменение разности фаз будет меньше π , интенсивность волны в данной точке пространства может оказаться как больше, так и меньше суммы I_1 и I_2 (в зависимости от знака интерференционного члена). При этом, очевидно, происходит перераспределение энергии волн в пространстве

(в некоторых областях будут максимумы интенсивности, в других - минимумы). Накладывающиеся друг на друга волны называются в этом случае когерентными, а термин "наложение" (или "суперпозиция") волн заменяют термином "интерференция" волн. Таким образом, интерференция - это наложение волн, сопровождающееся перераспределением энергии волн в пространстве.

§ 2. Интерференция волн от двух точечных источников

Рассмотрим интерференцию волн в простейшем случае - будем предполагать, что наблюдается наложение гармонических волн от двух точечных источников, испускающих волны, характеризующиеся одинаковыми величинами частоты начальной фазы и амплитуды. Поскольку в этом случае в любой точке пространства разность фаз $\Delta\varphi$ будет сохраняться постоянной, колебания будут когерентными и, следовательно, будет наблюдаться интерференция волн.

Определим вид интерференционной картины в пространстве - см. рис.23. Величина $\Delta\varphi$ в любой точке пространства полностью определяется разностью путей r_2 и r_1 , пройденных волнами от двух источников до данной точки. Поэтому ясно, что, если волны распространяются в однородной среде, то геометрическое место точек в плоскости рис.23, для которых разность фаз $\Delta\varphi = const$ - гипербола. Таким образом, максимумы интенсивности на рис.23 будут располагаться на гиперболах, в фокусах которых находятся источники. Между максимумами будут находиться минимумы интенсивности - также гиперболические кривые (показаны на рисунке пунктирными линиями). Положения максимумов и минимумов интерференционной картины в пространстве легко получить вращением рис.23 относительно оси, проходящей через источники - это семейство гиперболоидов вращения. На плоском экране, показанном на рис.23 справа, будет наблюдаться интерференционная картина, представляющая собой последовательность светлых и темных гипербол - кривых, по которым гиперболоиды вращения пересекаются экраном.

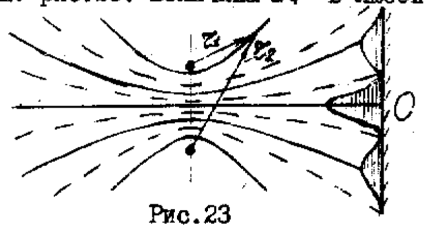


Рис.23

Рассмотрим подробнее структуру интерференционной картины в центре экрана (в плоскости рис.23, вблизи точки 0). Так как расстояния от источников I и 2 до центральной части экрана практически одинаковы, интенсивности волн от этих источников вблизи центра интерференционной картины на экране также будем считать одинаковыми: $A_I = A_2 = A_0$; $I_I = I_2 = I_0$. Тогда соотношение (3.6) упрощается:

$$I = 2I_0 + 2I_0 \cos\Delta\varphi. \qquad (3.9)$$

В максимумах интенсивности интерференционной картины $\Delta\varphi = 2\pi m$, $I = 4I_0$; в минимумах $\Delta\varphi = (2m+1)\pi$, $I = 0$ (m = 0, I, 2, ... – любое целое число).

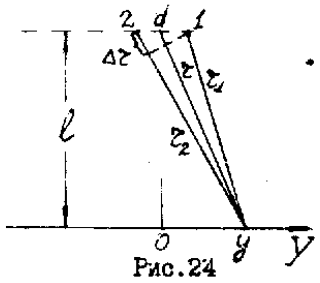


Рис.24

Если оба источника и экран находятся в однородной среде, то разности фаз, кратной 2π соответствует разность хода волн от двух источников

$$\Delta = r_2 - r_1 = \pm m\lambda, \qquad (3.10)$$

где λ – длина волны в данной среде. В тех точках экрана, где выполняется условие (3.10), будут наблюдаться максимумы интерференционной картины. Соответственно, условие минимумов для однородной среды таково:

$$\Delta r = r_2 - r_1 = \pm(m + 1/2)\lambda. \qquad (3.11)$$

Целое число m = 0, I, 2, ... в соотношениях (3.9)-(3.11), равное разности хода двух волн, выраженной в длинах волн, называется порядком интерференции.

В том случае, когда два источника расположены близко друг к другу и, наоборот, далеко от экрана, для центральной области экрана выполняются неравенства $\ell \simeq r \simeq r_1 \simeq r_2 \gg d, y$; $\Delta r \ll d$ (см. рис.24). При этом из подобия двух треугольников имеем $\Delta r / d = y / r \simeq y / \ell$ и, следовательно, максимумы и минимумы интерференционной картины вблизи центра экрана будут расположены по оси y в точках

максимумы: $y_{max} \simeq \pm m\lambda\ell/d$; $\quad$ (m = 0, I, 2, ...) $\quad$ (3.12)

минимумы: $y_{min} \simeq \pm(m+1/2)\lambda\ell/d$. $\quad$ (3.13)

Подчеркнем, что условия (3.10)-(3.11) в однородной среде справедливы всегда, для когерентных волн любого типа (как упругих, так и электромагнитных); условия же (3.12)-(3.13) выполняются только вблизи центра экрана, удаленного от двух источников.

Иногда приходится рассматривать ситуации, в которых волны от двух источников распространяются в разных средах. Если частоты, на которых излучают источники I и 2, остаются одинаковыми, то в разных средах будут отличаться скорости распространения волн и их длины λ, а значит, и волновые числа k.

Полагая, волна от первого источника распространяется в среде I, а от второго – в среде 2 (длины волн λ_1 и λ_2, соответственно) и считая начальные фазы излучения для обоих источников одинаковыми, получим:

$$\Delta\varphi = k_2 r_2 - k_1 r_1 = 2\pi(r_2/\lambda_2 - r_1/\lambda_1). \qquad (3.14)$$

Из (3.14) следует, что при распространении волн в различных средах нужно сравнивать не геометрические пути, пройденные каждой волной от источника до рассматриваемой точки, а расстояния, измеренные в количестве длин волн.

В оптике соотношение (3.14) принято использовать в несколько иной форме, вводя показатели преломления n_2 и n_1:

$$\Delta\varphi = 2\pi(r_2 n_2 - r_1 n_1)/\lambda_0 = 2\pi\Delta/\lambda_0. \qquad (3.15)$$

Величина, заключенная в скобки, называется оптической разностью хода двух лучей (λ_0 – длина волны в вакууме):

$$\Delta = r_2 n_2 - r_1 n_1. \qquad (3.16)$$

Произведение $r_1 n_1$ иногда называют оптическим путем луча I, соответственно, $r_2 n_2$ – оптический путь луча 2. Эти выражения легко обобщаются на случай, когда каждый луч проходит через несколько разных сред:

$$\Delta = \sum_i r_{2i} n_{2i} - \sum_k r_{1k} n_{1k}. \qquad (3.17)$$

Суммирование здесь проводится по всем средам, по которым распространяются лучи I и 2.

Очевидно, что условие максимума интерференционной картины двух световых волн

$$\Delta = \pm m\lambda_0; \qquad m = 0, I, 2, \ldots \quad (3.18)$$

Соответственно, минимумы должны наблюдаться в тех точках пространства, где

$$\Delta = \pm(m+1/2)\lambda_0; \qquad m = 0, I, 2, \ldots \quad (3.19)$$

§ 3. Условия наблюдения интерференции

В предыдущем параграфе, рассматривая интерференцию монохроматических гармонических волн от двух точечных источников, мы преднамеренно идеализировали реальную картину интерференции волн. Действительно, в природе и технике нет источников, испускающих строго гармонические волны одной частоты; также как нет источников волн бесконечно малых размеров.

Поэтому необходимо выяснить, при каких условиях в реальных ситуациях возможно наблюдение интерференции волн.

I. Сначала обсудим, в какой степени осложняет наблюдение интерференции немонохроматичность источников волн. Предположим, что в какой-то точке пространства А в момент времени $t = 0$ две волны с частотами ω_1 и ω_2, накладываясь друг на друга, взаимно усиливаются – см. рис.25,а.

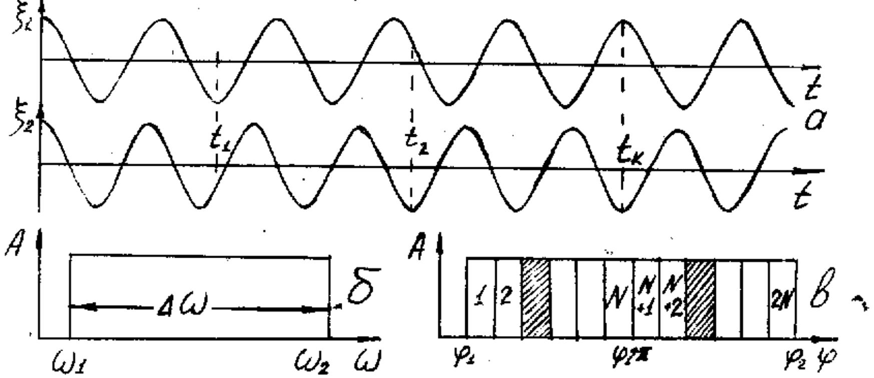


Рис.25

На рисунке две эти волны показаны отдельно, хотя мы будем считать, что они распространяются по одной прямой. Если время измерений равно t_1 или t_2 (см. рис.25,а), то за такое время разность фаз между колебаниями ξ_1 и ξ_2 изменится незначительно, эти колебания можно считать когерентными. Когерентность колебаний ξ_1 и ξ_2 нарушится, когда эти две волны перестанут усиливать друг друга, т.е. когда между ними "набежит" разность фаз π. Время, за которое это произойдет, называется <u>временем когерентности</u> $t_к$. Из вышесказанного следует, что в случае

интерференции двух монохроматических волн $t_к = \pi/(\omega_2 - \omega_1)$.

Обычно приходится иметь дело с источниками, испускающими волны, частоты которых распределены в некотором интервале от ω_1 до $\omega_2 = \omega_1 + \Delta\omega$. Мы будем полагать для простоты, что амплитуды волн всех частот в этом интервале одинаковы – см. рис.25,б. Если в начальный момент времени $t = 0$ фазы всех колебаний совпадают (как это иллюстрируется для двух волн на рис. 25,а), то в этот момент все волны усиливают друг друга. Эффект усиления исчезнет через некоторое время, когда наложение волн будет приводить к их взаимному ослаблению. Покажем, что в рассматриваемом случае это произойдет в момент времени $t = t_к$, когда между "крайними" волнами (с частотами ω_1 и $\omega_2 = \omega_1 + \Delta\omega$) накопится разность фаз, равная 2π. В этот момент фаза "первой" волны равна $\varphi_1 = \omega_1 t_к$, а фаза "последней" $\varphi_2 = \omega_2 t_к = \varphi_1 + 2\pi$. Фазы всех остальных волн будут равномерно распределены в интервале от φ_1 до φ_2 – см. рис.25,в. Разобьем этот интервал на $2N$ одинаковых малых участков. Любым двум участкам с номерами $n \leq N$ (на левой половине рис.25,в) и $n + N$ (на правой половине этого рисунка) соответствуют волны, отличающиеся по фазе на π и, следовательно, эти волны взаимно уничтожатся. Следовательно, в момент времени $t = t_к$ вместо усиления волн будет наблюдаться их полное взаимное подавление.

Итак, для источников, испускающих волны в интервале частот $\Delta\omega$, <u>время когерентности</u> равно

$$t_к = 2\pi/\Delta\omega. \tag{3.20}$$

Количество периодов колебаний, которое произойдет за время когерентности, мы будем называть числом когерентных колебаний:

$$N_к = t_к/T = 2\pi/T\Delta\omega = \omega/\Delta\omega = \lambda/\Delta\lambda. \tag{3.21}$$

Число когерентных колебаний равно максимальному порядку интерференции, который можно наблюдать при данной немонохроматичности источника волн.

<u>Длиной когерентности</u> называется длина цуга волн, на которой сохраняется когерентность:

$$\ell_к = v t_к = \lambda t_к/T = \lambda N_к \simeq \lambda^2/\Delta\lambda. \tag{3.22}$$

Очевидно, что чем более немонохроматическим является источник волн, тем меньше для этого источника длина когерентности, число когерентных колебаний и время когерентности.

С учетом (3.22) соотношение (3.20) может быть записано в несколько иной форме

$$t_к = \ell_к / v \simeq \lambda^2 / v \Delta\lambda. \qquad (3.23)$$

Для солнечного света λ = 400–760 нм, число когерентных колебаний $N_к = \lambda/\Delta\lambda \simeq 1$, длина когерентности порядка длины световой волны. Поэтому ясно, что если в схеме опыта, показанного на рис.24, спектральный состав излучения точечных источников такой же, как Солнца, то будет наблюдаться интерференционная картина, состоящая из центрального (нулевого) максимума и двух ближайших к нему максимумов первого порядка (m = I). При разности хода между лучами I и 2, равной двум или более длинам волн, когерентность между этими лучами будет потеряна (максимальный порядок интерференции – максимально возможное число m в соотношении (3.I8) – равно числу когерентных колебаний $N_к$=I).

Используя светофильтры (т.е. уменьшая $\Delta\lambda$), можно существенно улучшить условия наблюдения интерференции в солнечном свете. Наиболее монохроматическое излучение (помимо лазеров) регистрируется от отдельных возбужденных атомов. Однако и в этом случае испускаемая волна не является строго гармонической, т.к. возбужденный атом излучает в течение интервала времени $t_к \simeq 10^{-8}$ с, за это время испускается "цуг" гармонических волн $\ell = c t_к$. Длина такого цуга волн по существу является длиной когерентности для излучения отдельного атома ($\ell_к \simeq$ 3 м). Начальная фаза следующего цуга никак не связана с фазой предыдущего, поэтому колебания в двух последовательных цугах некогерентны. В лазерах за счет скоррелированного излучения многих атомов активного вещества достигаются длины когерентности, на несколько порядков большие, чем для излучения одного атома.

2. Рассмотрим теперь, как условия наблюдения интерференции зависят от размеров источника. Сначала предположим, что мы имеем точечный и монохроматический источник излучения А. Волновые поверхности для такого источника имеют вид сфер (на рис.26 пунктиром показана одна из них). По определению, любые две точки, расположенные на одной волновой поверхности, должны колебаться в одной и той же фазе. Как нам в этом удостовериться? Поставим непрозрачную преграду $П_I$ на пути волны, оставив в

этой преграде два маленьких отверстия, через которые волны будут проникать в пространство за преградой (расстояние между отверстиями – d). На некотором расстоянии ℓ от преграды поместим экран, на котором будем наблюдать интерференционную картину. Если волны, испускаемые двумя отверстиями, когерентны, то интерференционная картина должна уверенно регистрироваться (по существу результат такого эксперимента мы уже обсудили в предыдущем параграфе).

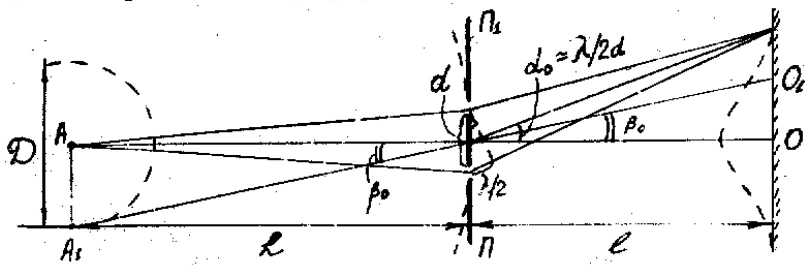


Рис.26

Внесем в нашу задачу осложнение – будем предполагать, что источник продолжает оставаться монохроматическим, но теперь имеет конечные размеры $\mathcal{D}$ (на рис.26 показана "крайняя" точка нашего источника – A_I). Очевидно, что интерференционная картина от точки A_I на экране будет смещена относительно интерференционной картины от точки A на угол $\beta_0 = \mathcal{D}/2\mathcal{L}$, где $\mathcal{L}$ – расстояние от источника до преграды (т.е. до интересующей нас волновой поверхности). Если $\beta_0 \geqslant \alpha_0$, где α_0 – угловое положение первого минимума интерференционной картины от точки А, соответствующего m = 0 в соотношении (3.I3), то полная интерференционная картина от всего протяженного источника окажется настолько "смазанной", что наблюдать перераспределение энергии в пространстве не удастся. А это и означает, что выбранные нами две точки на сферической поверхности (два отверстия в преграде) испускают некогерентные волны.

Итак, интерференцию волн от протяженного источника можно наблюдать только при выполнении неравенства $\beta_0 < \alpha_0$. Учитывая, что согласно (3.I3) $\alpha_0 = y^{(0)}_{min} / \ell = \lambda / 2d$, приходим к такому условию наблюдения интерференции

$$\mathcal{D}/\mathcal{L} < \lambda/d. \qquad (3.24)$$

Это неравенство можно переписать несколько иначе:

$$d < r_к = \varphi_к \cdot \mathcal{L}. \qquad (3.25)$$

В соотношении (3.25) введены т.н. "радиус когерентности" $r_к$ и "угол когерентности" $\varphi_к$:

$$r_к = \lambda/\beta = \lambda\mathcal{L}/\mathcal{D}\ ;\ \varphi_к = r_к/\mathcal{L} = \lambda/\mathcal{D}. \qquad (3.26)$$

Здесь $\beta = 2\beta_0 = \mathcal{D}/\mathcal{L}$ – угловой размер источника волн.

По физическому смыслу радиус когерентности – это размеры области на сферической поверхности, окружающей источник, в пределах которой колебания можно считать когерентными. Размеры этих областей обратно пропорциональны размерам источника – см. рис.27. Угол когерентности – это телесный угол, в который протяженный источник испускает когерентные волны. Чем больше размеры источника, тем этот угол меньше. Из (3.26) очевидно, что источник волн может считаться точечным, если его размеры меньше или, во всяком случае, порядка длины волны.

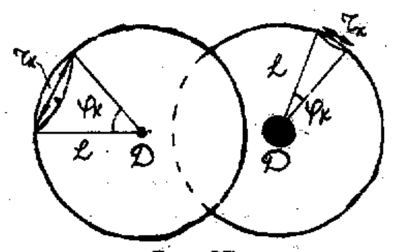


Рис.27

Для солнечного света радиус когерентности легко подсчитать, если учесть, что угловой размер Солнца $\beta \simeq 0{,}01$ рад: $r_к = \lambda/\beta = 5\cdot10^{-3}$ см. Поэтому, чтобы наблюдать интерференционную картину в опыте, показанном на рис.26, расстояние между отверстиями в преграде должно быть меньше $5\cdot10^{-3}$ см, что трудно экспериментально осуществить. Лишь в начале XIX в. Т.Юнгу удалось впервые наблюдать интерференцию солнечного света от двух точечных источников (отверстий в непрозрачном экране). Оказалось, что интерференцию можно наблюдать только, если между экраном с двумя отверстиями и Солнцем поместить еще одну преграду с небольшим отверстием – см. рис.28. Назначение этой дополнительной преграды теперь понятно – с ее помощью удается уменьшить угловые размеры

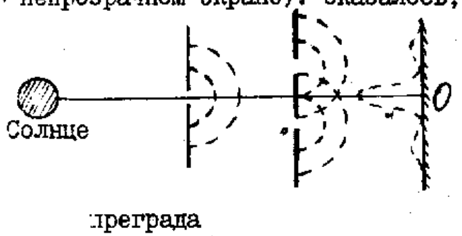


Рис.28

источника (в схеме Юнга источником света служит отверстие в

преграде), а следовательно, увеличить радиус когерентности.

Введем еще одну характеристику, определяющую степень когерентности излучения – объем когерентности

$$V_к = \ell_к \cdot r_к^2 . \qquad (3.27)$$

Объем когерентности определяет объем той области пространства, в которой испускаемые источником волны когерентны.

§ 4. Стоячие волны

Возникновение стоячих волн – простейший случай интерференции. Пусть против оси x распространяется плоская гармоническая волна, частота которой ω , а волновое число k :

$$\xi_1 = A_0 \cos(\omega t + kx). \qquad (3.28)$$

На пути этой волны расположена непоглощающая, идеально отражающая преграда (координата преграды $x = 0$). Уравнение отраженной от преграды плоской волны аналогично (3.28), только знак перед x необходимо изменить – направление распространения отраженной волны противоположное; кроме того, нужно учесть возможное изменение фазы при отражении:

$$\xi_2 = A_0 \cos(\omega t - kx - \varphi_0). \qquad (3.29)$$

Используя принцип суперпозиции, получим, что в результате наложения прямой и отраженной волн возникает т.н. "стоячая волна"

$$\xi = \xi_1 + \xi_2 = A\cos(\omega t - \frac{\varphi_0}{2}) \qquad (3.30)$$

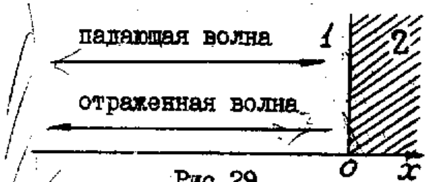


Рис.29

В соотношении (3.30) амплитуда колебаний

$$A = |2A_0 \cos(kx + \varphi_0/2)| \qquad (3.31)$$

оказывается зависящей от координаты x : в тех точках называемых "пучностями", где $\cos(kx + \varphi_0/2) = \pm1$, амплитуда максимальна ($A = 2A_0$); в "узлах" $\cos(kx + \varphi_0/2) = 0$ и амплитуда колебаний равна нулю.

$A = 2A_0$ (пучности), $kx + \varphi_0/2 = m\pi$, $m = 0, 1, 2, \ldots$ (3.32)

$A = 0$ (узлы), $kx + \varphi_0/2 = (m + 1/2)\pi$, $m = 0, 1, 2, \ldots$ (3.33)

На границе раздела двух сред ($x = 0$) число m принимает минимальное значение ($m = 0$), по мере удаления от нее m растет. Найдем изменение фазы волны при отражении, пока не конкретизируя вид волн (упругие, электромагнитные).

а) Пусть на границе раздела наблюдается пучность – см. рис.30,а. Подставляя $x = 0$ и $m = 0$ в (3.32), получим

$$\varphi_0 = 0. \qquad (3.34)$$

В этом случае отражение волн происходит без изменения фазы.

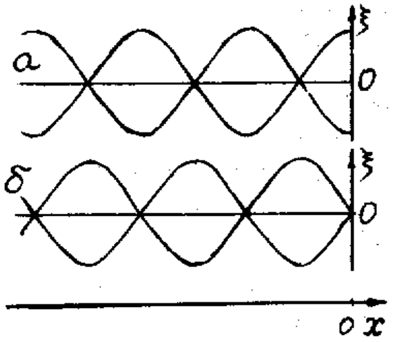


Рис.30

б) Если на границе раздела двух сред реализуется узел, то с учетом $x = 0$ и $m = 0$ из (3.33) имеем:

$$\varphi_0 = \pi . \qquad (3.35)$$

Итак, если на границе образуется узел (рис. 30,б), то при отражении фаза волны изменяется на π (в этом случае принято говорить, что при отражении теряется полволны).

Для упругих волн узел на границе раздела двух сред возникает, если отражение происходит от более плотной среды (пример – веревка, привязанная к стене; при образовании на ней стоячей волны у стены всегда наблюдается узел). В более плотной среде смещения колеблющихся частиц меньше, чем в менее плотной.

Для электромагнитных волн необходимо учесть их специфику – векторы $\bar{E}$, $\bar{B}$ и $\bar{v}$ жестко связаны между собой (векторное произведение $[\bar{E}\cdot\bar{B}]$ всегда направлено по направлению распространения волны). Поэтому при отражении электромагнитной волны только один из векторов ($\bar{E}$ или $\bar{B}$) должен изменить направление – см. рис.3I. Соответственно, если для одной составляющей электромагнитной волны (например, $\bar{E}$) на границе будет узел, то для другой (в данном случае $\bar{B}$) – пучность (см. рис.3I). Если, наоборот, на границе раздела двух сред наблюдается узел $\bar{B}$, то обязательно там же должна быть пучность $\bar{E}$ – рис.32.

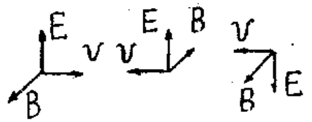


Рис.3I

В дальнейшем нас в основном будет интересовать поведение

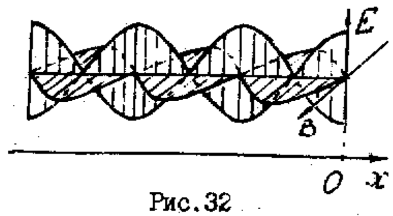


Рис.32

электрического поля в электромагнитной волне, поскольку именно с электрическим полем связано воздействие электромагнитных волн на атомы и молекулы окружающей среды (регистрация электромагнитных волн также базируется на электрополевых эффектах). Параметром среды, определяющим действие на нее электрического поля, является диэлектрическая проницаемость ε . Аналогом более плотной среды для упругих волн следует считать в случае электромагнитных волн среду с большей величиной диэлектрической проницаемости, так как в такой среде напряженность электрического поля меньше (ср. смещения частиц для упругой волны). В применении к световым волнам среду с большими значениями ε и n называют оптически более плотной.

Итак, если электромагнитная волна распространяется в среде I и отражается от среды 2, то на границе раздела происходит потеря I/2 волны в том случае, когда справедливы неравенства:

$$\varepsilon_2 > \varepsilon_1 , \quad v_2 < v_1 , \quad \lambda_2 < \lambda_1 . \qquad (3.36)$$

В этой ситуации на границе раздела двух сред наблюдается узел для электрического поля и пучность – для магнитного – см. рис. 33. Обратим внимание, что в стоячей электромагнитной волне области максимумов энергии электрического и магнитного полей пространственно разнесены (в отличие от бегущей волны).

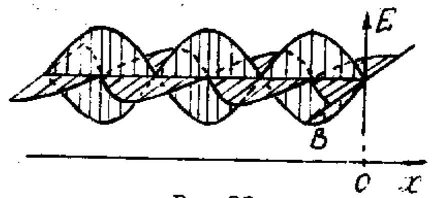


Рис.33

Заметим, что точно такое же соответствие имеется и в случае упругих волн: для бегущей волны максимумы потенциальной и кинетической энергии совпадают; в стоячей упругой волне максимумы кинетической энергии приходятся на пучности, а потенциальной – на узлы.

§ 5. Интерференция волн, отраженных от двух поверхностей

Пусть три различные среды разделены плоскими, параллельными границами раздела – см. рис.34. В первой среде распространяется плоская волна (длина волны λ_1), падающая на границу раздела сред I и 2 под углом α. Отраженная от этой границы волна I также составляет угол α с нормалью к граничной плоскости. Прошедшая во вторую среду волна II (длина волны во второй среде λ_2) частично отразится от нижней границы раздела и снова выйдет в первую среду (луч III). Таким образом, между лучами I и III возникает разность фаз, поскольку эти лучи проходят разные пути. Установим, какова эта разность фаз.

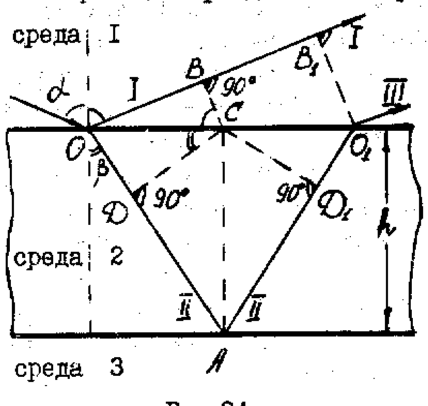


Рис.34

Выполним следующие построения: проведем перпендикуляр АС к обеим границам и из точки С опустим перпендикуляры СВ и СД к лучам I и II, соответственно. Из проведенного построения очевидно, что $\angle$ ОСВ = α (углу падения), $\angle$ ОСД = β (углу преломления). Отсюда следует:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{OB}{OC} : \frac{OД}{OC} = \frac{OB}{OД} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}. \qquad (3.37)$$

Из (3.37) получаем, что, если измерять пути в количестве длин волн, то такие "волновые пути" на отрезках ОВ (для луча I) и ОД (для луча II) оказываются равными. Ясно также, что то же самое можно утверждать относительно "волновых путей" на отрезках BB_I и $O_IД_I$ (т.к. BB_I = OB, $O_IД_I$ = ОД). Таким образом, разность волновых путей лучей I и III обусловлена тем, что луч II–III проходит дополнительное (по сравнению с лучом I) расстояние $ДАД_I$. Величину этого дополнительного пути во второй среде мы обозначим $\Delta\ell$, а толщину слоя 2 – h. Тогда

$$\Delta\ell = 2h\cos\beta. \qquad (3.38)$$

Если величина $\Delta\ell$ меньше длины когерентности $\ell_к$, то при наложении лучей I и III возникнет интерференционная картина. Поскольку лучи I и III параллельны, интерференционная картина в рассматриваемом случае локализована в бесконечности (в частном случае интерференции световых волн, отраженных от поверхностей тонкой пленки, лучи I и III можно собрать линзой в ее фокальной плоскости).

Запишем условия максимумов и минимумов интенсивности интерференционной картины в двух случаях:

I. Отражение на каждой границе происходит от более плотной среды. При отражении луча I теряется $\lambda/2$ и при отражении луча III – тоже. Поэтому дополнительной разности фаз между лучами I и III из-за отражения не возникает.

$$\text{Максимумы:}\quad 2h\cos\beta = m\lambda_2, \qquad (3.39)$$
$$\text{Минимумы:}\quad 2h\cos\beta = (m+1/2)\lambda_2,\ m = 0, 1, \ldots$$

2. Среда 3 идентична среде I, причем более плотной является среда 2. При отражении луча I теряется $\lambda/2$, как и ранее; но при отражении луча II изменения фазы нет (отражение от менее плотной среды). Эту дополнительную разность фаз между лучами I и III необходимо учесть при записи условий максимумов и минимумов:

$$\text{Максимумы:}\quad 2h\cos\beta = (m+1/2)\lambda_2, \qquad (3.40)$$
$$\text{Минимумы:}\quad 2h\cos\beta = m\lambda_2,\ m = 1, 2, \ldots$$

Явления, связанные с интерференцией отраженных от двух поверхностей волн, особенно важны в оптике. Поскольку обычно эти явления наблюдаются в естественном (солнечном) свете, видеть их можно только в тех случаях, когда толщина отражающей пленки (среды 2 на рис.34) порядка длины световой волны. Это объясняется тем, что длина когерентности солнечного света порядка λ, поэтому для больших толщин пленок теряется когерентность между лучами I и III. Естественно, что с повышением монохроматичности источника света условия наблюдения интерференции становятся все более мягкими (увеличивается длина когерентности) и перечисленные ниже эффекты можно регистрировать, используя более толстые пленки.

I. Цвета тонких пленок. При наблюдении тонких пленок в отраженном белом свете они "окрашиваются" в те цвета, для которых удовлетворяется в данных условиях соотношения, описывающие максимумы интерференционной картины - см. (3.39)-(3.40).

2. Полосы равной толщины. Если тонкая пленка неоднородна по толщине и освещается параллельным пучком монохроматического света, то области разной толщины будут иметь различную интенсивность окраски (т.к. для некоторых толщин будут выполняться условия максимумов, а для других - минимумов). При освещении такой пленки белым светом участки пленки, имеющие одинаковые толщины, будут одинаково окрашены. В частности, если пленка представляет собой клин с малым углом (рис.35), то полосы равной толщины будут параллельны ребру клина и расположены на одинаковых расстояниях друг от друга. Легко доказать, что интерференционная картина в этом случае локализована в плоскости, проходящей через ребро клина (в этой плоскости пересекаются все лучи, отраженные от двух поверхностей клина).

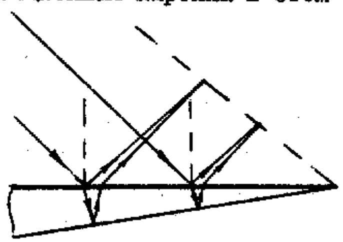


Рис.35

Другой частный случай полос равной толщины - кольца, наблюдаемые при отражении или прохождении света через систему, состоящую из плоской пластины и лежащей на ней линзы большого радиуса ("кольца Ньютона"). Кольца Ньютона представляют собой семейство концентрических темных и светлых окружностей, сгущающихся к периферии интерференционной картины.

3. Полосы равного наклона. Такие полосы наблюдаются, когда на тонкую плоскопараллельную пленку падает конический пучок света. Интерференционная картина в этом случае состоит из системы концентрических темных и светлых колец, поскольку положения максимумов и минимумов целиком определяются углом, под которым лучи света падают на пленку. Для всех лучей с одинаковыми углами падения (независимо от того, в какой плоскости они лежат), условия интерференции абсолютно одинаковы.

Ясно, что при освещении пленки монохроматическим пучком интерференционные кольца одного цвета, но разной интенсивности; если используется конический пучок белого света, то кольца будут разных цветов.

Полученные нами соотношения (3.39) оказываются полезными и при рассмотрении интерференции рентгеновских лучей, отражен-

ных от кристаллической решетки - см. рис.36. В этом случае h - расстояние между кристаллическими плоскостями, угол падения равен углу преломления ("среда" всюду одна и та же), условия отражения двух лучей, как и при выводе соотношений (3.39), одинаковы. Поэтому, переходя к углу скольжения, условие максимума можно записать в виде

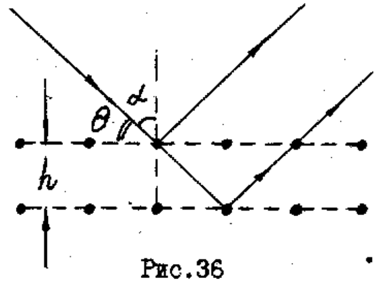


Рис.36

$$2h\sin\theta = \pm m\lambda. \qquad (3.41)$$

Соотношение (3.41) представляет собой основное уравнение рентгеноструктурного анализа - формулу Вульфа-Брэгга. Многочисленные методы рентгеноструктурного анализа базируются на этой формуле и широко используются (в частности, в химии) для анализа структуры твердых тел, в том числе молекулярных кристаллов.

ГЛАВА IУ. ДИФРАКЦИЯ ВОЛН

§ I. Принцип Гюйгенса-Френеля. Метод зон Френеля

Под дифракцией волн обычно понимают явление огибания волнами препятствий. В более широком смысле дифракцией можно назвать любое отклонение при распространении волн от законов геометрической оптики. Основой для понимания дифракционных явлений в дальнейшем будет служить принцип Гюйгенса-Френеля, сформулированный в законченной форме в первой четверти XIX в.

Принцип Гюйгенса-Френеля состоит из двух положений:

I. Любая точка на любой волновой поверхности может рассматриваться как самостоятельный источник сферических волн. Эти волны в дальнейшем мы будем называть "вторичными".

2. Амплитуда (а следовательно, интенсивность) колебаний в любой точке пространства можно рассматривать как результат интерференции вторичных волн.

Проиллюстрируем принцип Гюйгенса-Френеля таким примером. Пусть имеется точечный источник монохроматических волн А. Окружим его замкнутой поверхностью произвольной формы – рис.37.

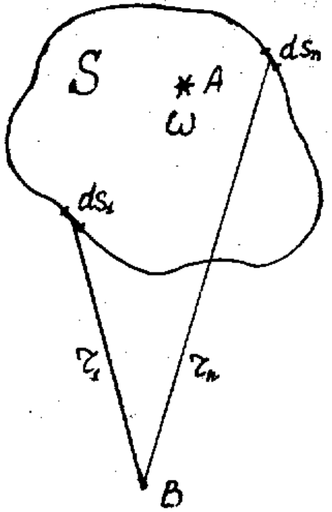


Рис.37

Разобьем эту поверхность на малые элементы dS, каждый из которых будем считать "вторичным" точечным источником (расстояние от каждого вторичного источника r_n должно быть много больше размера элемента dS_n). Согласно принципу Гюйгенса-Френеля для вычисления амплитуды (и, следовательно, интенсивности) колебаний в некоторой произвольной точке В можно вместо волн от источника А рассматривать только вторичные волны от всех элементов dS_n, а результирующее колебание в точке В найти сложением колебаний от вторичных источников (вторичные источники ввиду их малых размеров считаем точечными, распространяющиеся от них волны – сферическими):

$$\xi_B = \sum_{(n)} \xi_n = \sum_{(n)} (A_n / r_n) \cos(\omega t - k r_n - \varphi_n). \quad (4.1)$$

Частота колебаний ω для всех вторичных волн такая же, как частота первичного источника А; $k = 2\pi/\lambda$ – волновое число; начальные фазы φ_n определяются фазой колебаний, дошедших до соответствующего элемента поверхности dS_n из точки А.

Выбор поверхности S в принципе произволен; обычно S выбирают таким образом, чтобы максимально упростить решение поставленной задачи.

Использование принципа Гюйгенса-Френеля позволяет предсказать основные закономерности дифракции волн на преградах простой формы, в частности, круглых отверстиях и дисках.

Начнем рассмотрение с наиболее простого случая – будем считать, что источник А удален от точки наблюдения В на бесконечность, так что распространяющаяся от него волна – плоская, а в некоторой плоскости С′ОС (совпадающей с одной из волновых

поверхностей), помещена непроницаемая для волн преграда с круглым отверстием в центре, радиус которого равен ОС – см. рис.38.

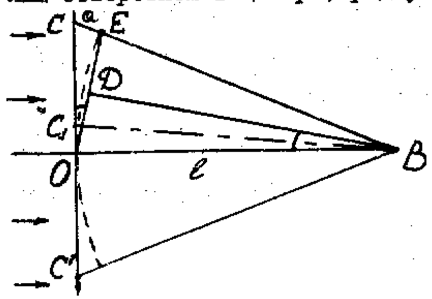


Рис.38

Метод зон Френеля состоит в том, что интересующую нас волновую поверхность (плоскость, показанную на рисунке – СОС′) разбивают на кольцевые участки таким образом, чтобы расстояния от границ этих участков до точки наблюдения В отличались на $\lambda/2$. Первая зона Френеля представляет собой круг, причем расстояние ВС$_I$ больше ВО на $\lambda/2$; остальные зоны – кольца.

Выполним следующие построения: начертим дугу окружности радиусом ОВ с центром в точке В, проведем хорду ОЕ и опустим на нее перпендикуляр BD из точки В. Легко видеть, что $\angle COE = \angle OBD$, т.к. стороны этих углов взаимно перпендикулярны. Учитывая, что рассматриваемые углы малые (ОС $\ll$ ОВ) можно записать:

$$OD : OB = EC : OC. \quad (4.2)$$

Введем обозначения: ОС = r, ОВ = ℓ, ЕС = a; учитывая, что

$(OD \simeq r/2)$ соотношение (4.2) перепишем в виде:

$$r/2\ell \simeq a/r. \quad (4.3)$$

Считая, что точка С лежит на границе m-ой зоны Френеля, а радиус отверстия r – это, соответственно, "внешний" радиус m-ой зоны Френеля; $a = m\lambda/2$, из (4.3) получаем:

$$a = r^2_m/2\ell, \quad r_m = \sqrt{m\lambda\ell}. \quad (4.4)$$

Полученное выражение для радиуса m-ой зоны Френеля легко обобщить на более общий случай. Пусть теперь точка А находится на конечном расстоянии L до плоскости СОС′ – см. рис.39. Соединяя точки А и С, проводим точно такие же построения, как и ранее (строим дугу окружности с центром в точке А, хорду СЕ$_I$ и т.д.). В результате получим (обозначив СЕ$_I$ = b):

$$b = r^2_m/2L \quad (4.5)$$

Полная разность хода между лучами АСВ и АОВ равна сумме a и b. Если, как и ранее, точка С находится на границе m-ой зоны Френеля, то $a + b = m\lambda/2$ и, следовательно, имеем:

$$r_m^2 = \sqrt{m\lambda\ell^*}, \text{ где } \quad 1/\ell^* = 1/\ell + 1/L. \qquad (4.6)$$

Вычисляя площадь m-ой зоны Френеля

$$S_m = \pi r_m^2 - \pi r_{m-1}^2 = \pi\lambda\ell^*, \qquad (4.7)$$

убеждаемся, что в рассматриваемом случае площади всех зон Френеля одинаковы.

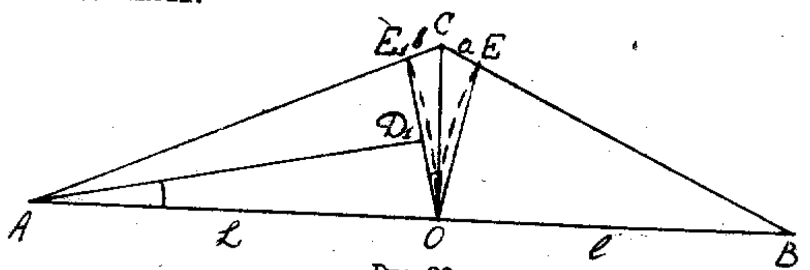


Рис:39

Поместим теперь в плоскости ОС непрозрачную для волн преграду с круглым отверстием, радиус которого точно равен радиусу первой зоны Френеля ($r = r_1$). Построим векторную диаграмму колебаний в точке В. Для этого разобьем первую зону на много кольцевых участков одинаковой площади (так, чтобы волны, приходящие в точку В от одного и того же кольцевого участка, имели одинаковую фазу). Используем метод векторных диаграмм: изобразим колебания в точке В от первого (центрального) участка первой зоны Френеля вектором $E_I^{(1)}$ *, второго участка – $E_2^{(1)}$ и т.д. (см. рис.40). При сложении векторов $E_I^{(1)}$, $E_2^{(1)}$, ... $E_n^{(1)}$ необходимо учитывать, что колебания от каждого следующего участка приходят в точку В с некоторым запаздыванием по фазе, т.к. соответствующие волны проходят до точки В больший путь. Поскольку вся система векторов вращается с частотой ω против часовой стрелки, запаздывание по фазе соответствует поворот вектора по часовой стрелке. Вектор $E_n^{(1)}$ от последнего участка первой зоны отстает по фазе на π от $E_I^{(1)}$, так как, по определению, разность хода между соответствующими лучами равна $\lambda/2$. Суммируя все n векторов от n участков, получаем, что результирующее колебание может быть изображено вектором $E^{(1)}$. Векторами E' и E'' на рис.40 изображены амплитуды колебаний в точке В от первой и второй половинок первой зоны Френеля (граница между этими частями первой зоны – окружность, разделяющая зону на две равные по площади части).

* Для световых волн $E_I^{(1)}$ – напряженность электрического поля волны, приходящей в точку В от центрального участка первой зоны Френеля.

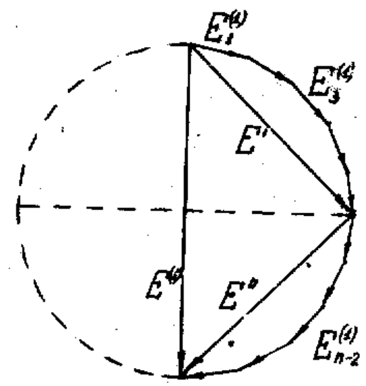


Рис.40.

Совершенно аналогично поступаем, определяя результирующее колебание в точке В от всех последующих зон Френеля: разбиваем каждую зону на n узких кольцевых полосок и суммируем соответствующие вектора; первый вектор каждой последующей зоны "пришиваем" с небольшим сдвигом по фазе к последнему вектору предыдущей зоны. На рис. 4I,а изображена векторная диаграмма для первых двух зон Френеля, на рис.4I,б – трех зон, на рис.4I,в показана векторная диаграмма, получающаяся в результате сложения колебаний от всех зон Френеля, вектор E_0 – амплитуда результирующего колебания в точке В. Заметим, что с увеличением номера зоны размеры векторов $E_I^{(k)}$, $E_2^{(k)}$ ..., $E_n^{(k)}$ постепенно уменьшаются (соответственно, уменьшается, и размер "диагонали" соответствующей полуокружности), т.к. каждая последующая зона находится от точки В несколько дальше, чем предыдущая. Сопоставляя рис.40 и 4I,в, приходим к парадоксальному на первый

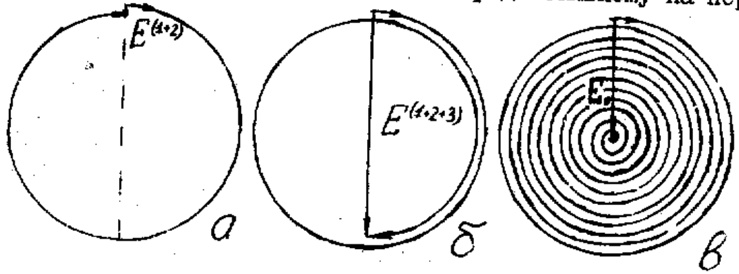


Рис.4I

взгляд выводу – амплитуда колебаний в точке В от одной первой зоны в два раза больше амплитуды колебаний от всех зон, вместе взятых. Таким образом, если закрыть все зоны, кроме первой, то в центре экрана будет наблюдаться светлое пятно, интенсивность которого в 4 раза больше, чем в отсутствии преграды. Отсюда следует, что малое отверстие может выполнять роль линзы со слабым фокусирующим действием, что и использовалось в первых фотокамерах.

При изменении расстояний от источника до преграды a или от преграды до экрана ℓ будет изменяться число открытых зон Френеля и, соответственно, интенсивность интерференционной картины в центре экрана. Пусть, например, в исходном положении расстояния a и ℓ таковы, что круглое отверстие в преграде радиусом r оставляет открытыми 4 зоны Френеля (т.е. $r = r_4$). Из рис.4I, в следует, что при этом в точке В будет наблюдаться темное пятно. Будем приближать экран к отверстию (уменьшать ℓ); как видно из формулы (4.6), радиус m-ой зоны Френеля при этом уменьшается, и отверстие в экране будет "вмещать" все большее число зон. В тот момент, когда радиус отверстия станет равным радиусу пятой зоны Френеля, в центре экрана будет регистрироваться светлое пятно. При дальнейшем перемещении экрана по направлению к преграде интенсивность интерференционной картины в токе В будет пульсировать – она будет максимальной, когда открытыми окажутся нечетное число зон Френеля (5, 7, 9 и т.д.), и минимальной – когда четное (6, 8, I0 и т.д.).

Если экран удалять от преграды, количество видимых из центра экрана зон Френеля будет уменьшаться (см. (4.6)). Интенсивность картины в точке В также будет пульсировать до тех пор, пока не останется открытой только одна зона. В этот момент мы зарегистрируем самый яркий максимум интенсивности в центре экрана и при дальнейшем увеличении ℓ пульсации прекратятся – будет наблюдаться постепенное уменьшение освещенности центральной точки экрана и "расплывание" центрального дифракционного максимума (подробнее об этом несколько позже).

Обсудим характер дифракционной картины на экране не только в центре. Очевидно, что картина симметрична относительно оси АВ. Предположим, что из точки В видна только одна первая

зона Френеля – рис.42,а. Сместимся немного в сторону от центра экрана – в точку B_I. Из этой точки уже видна значительная часть второй зоны Френеля, и только некоторая доля – первой (рис.42,б). Если "видимые" площади первой и второй зон близки, амплитуда результирующих колебаний в точке B_I будет малой. Отсюда следует, что центральное светлое пятно будет окружено темным кольцом – первым минимумом. Сместимся еще дальше от центра экрана – в точку B_2 (рис.42,в). Из этой точки видна уже значительная часть третьей зоны Френеля, колебания от которой совпадают по фазе с колебаниями от первой зоны, поэтому интенсивность колебаний в точке B_2 будет больше, чем в точке B_I – т.е. снова будет наблюдаться светлое кольцо. Итак, очевидно, что дифракционная картина при дифракции волн на круглом отверстии представляет собой систему концентрических колец большей и меньшей интенсивности, в центре картины будет светлое или темное пятно (в зависимости от числа открытых зон Френеля).

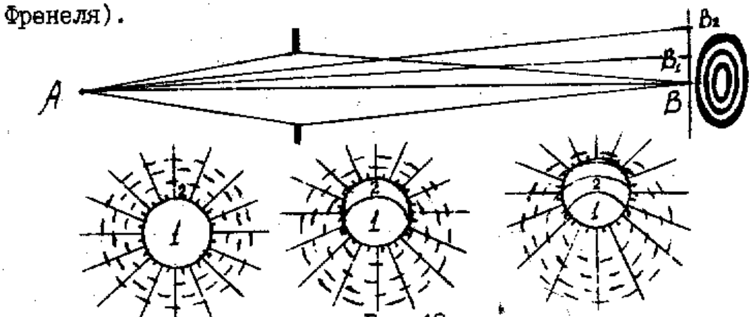


Рис.42

Если в плоскости ОС (см. рис.39) поместить пластинку, на которой "затемнить" кольца, соответствующие всем четным зонам Френеля, и оставить проницаемыми для волн области, соответствующие всем нечетным зонам Френеля, то получится так называемая "амплитудная зонная пластинка". Векторная диаграмма колебаний в точке В для такой пластинки показана на рис.43. Очевидно, что если пластинка пропускает излучение от N нечетных зон, то амплитуда колебаний в центре экрана возрастает приблизительно в N раз, а интенсивность – в N^2 раз (по сравнению с круглым отверстием, открывающим одну зону Френеля).

Дополнительное увеличение амплитуды колебаний в точке В в два раза (а интенсивности – в четыре раза) можно получить, если четные зоны Френеля не закрывать, а ввести на соответствующих местах пластинки дополнительную разность хода $\lambda/2$ (обеспечить сдвиг фаз на π). В этом случае излучение от четных зон будет приходить в точку наблюдения в той же фазе, что и от нечетных. Такая пластинка называется фазовой зонной пластинкой. Амплитудная или фазовая зонная пластинки имитируют действие собирающей линзы с фокусным расстоянием, которое легко получить из соотношения (4.4):

$$F = r_m^2 / m\lambda \qquad (4.8)$$

где r_m – радиусы границ между темными и светлыми кольцами на пластинке. Из соотношения (4.8) следует, что положение фокуса зависит от длины волны, что является серьезным недостатком зонной пластинки как оптического фокусирующего элемента. Отметим, однако, что устройства типа зонных пластинок с успехом используются для фокусирования или направленного излучения радиоволн.

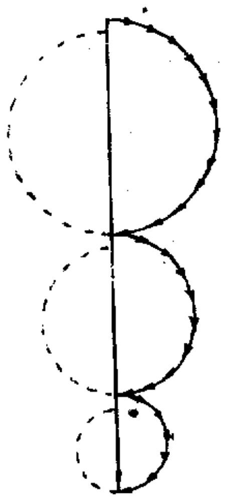


Рис.43

Остановимся вкратце на дифракции волн от небольших круглых препятствий. Воспользуемся для этой цели векторной диаграммой рис.4I,в. Если круглое препятствие закрывает две зоны Френеля, то это означает, что из спирали, изображающей векторную диаграмму для всех зон Френеля, нужно "удалить" две первых полуокружности. Ясно, что результирующая амплитуда колебаний в центре экрана (точке В) изменится при этом мало. Этот вывод останется справедливым при любом небольшом количестве закрытых зон – см. рис.44. Получается довольно неожиданный результат теории Френеля, на который впервые обратил внимание Пуассон, – в центре дифракционной картины от не очень большого круглого препятствия всегда должно наблюдаться светлое пятно (т.н. "пятно Пуассона"). Очевидно, что вблизи края тени от круглого экрана, как и при дифракции на отверстии, должны наблюдаться светлые и темные кольца.

Рис.44

§ 2. Дифракция Френеля от щели

Метод зон Френеля оказывается весьма полезным и при решении задач о дифракции волн на препятствиях типа полуплоскости или щели. В качестве примера рассмотрим дифракцию плоской волны на длинной щели шириной b. Экран, на котором регистрируется дифракционная картина, находится на расстоянии l от щели.

Разобьем плоскость, в которой находится преграда со щелью (эта плоскость перпендикулярна направлению распространения плоской волны), на зоны Френеля. В рассматриваемой задаче в качестве зон Френеля удобно выбрать полоски, параллельные щели. Расстояния от границ зон до точки наблюдения (пока будем наблюдать дифракционную картину в центре экрана – точке В), как и ранее, отличаются на $\lambda/2$. Повторяя выкладки, проведенные на стр.59, получим, что граница зоны с номером m находится на расстоянии h_m от осевой линии OB:

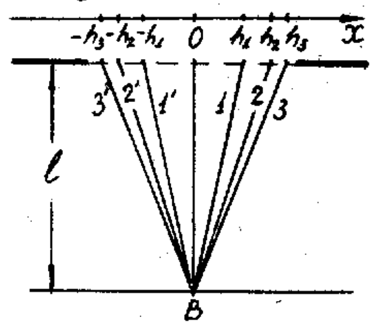


Рис.45

$$h_m = \sqrt{m\lambda l}\,. \qquad (4.9)$$

Площадь m-ой зоны Френеля в данном случае пропорциональна ширине соответствующей полоски, т.е.

$$S_m \sim \sqrt{m} - \sqrt{m-1}\,. \qquad (4.10)$$

Отсюда следует, что в рассматриваемой ситуации площади разных зон Френеля отнюдь не равны:

$$S_1 : S_2 : S_3 : S_4 = 1 : 0{,}41 : 0{,}32 : 0{,}27 \qquad (4.11)$$

Другая особенность этой задачи – наличие двух симметричных семейств зон Френеля – правой (цифры без штрихов на рис.45) и левой (цифры со штрихами).

Сначала отобразим в виде векторной диаграммы результат действия только одной первой (нештрихованной) зоны Френеля.

Для этого мысленно разделим первую зону на много (N) узких полосок, параллельных границам зоны (и щели) и равных по ширине. Действие первой такой полоски (ближайшей к центру) в точке В изобразим в виде маленького вектора $E_I^{(\omega)}$ – см.рис.46. Как и в задаче о дифракции на круглом отверстии, будем добавлять к вектору $E_I^{(\omega)}$ вектора $E_2^{(\omega)}$, $E_3^{(\omega)}$, ..., $E_N^{(\omega)}$, изображающие действие следующих полосок. Длина каждого следующего вектора несколько меньше предыдущего из-за того, что чем больше номер полоски, тем дальше она находится от точки В (этот эффект невелик, такое же уменьшение амплитуды векторов имеет место и при рассмотрении дифракции на круглом отверстии). Более существенно другое – сдвиг фаз между колебаниями от соседних полосок сначала (для полосок, близких к центру) изменяется сравнительно медленно, а затем (при возрастании номера полоски) нарастает все быстрее. Эта особенность рассматриваемой задачи становится понятной, если вспомнить, что ширина зон Френеля быстро уменьшается с ростом номера зоны – см. (4.II). В итоге суммирования всех векторов $E_I^{(\omega)}$, $E_2^{(\omega)}$, ..., $E_N^{(\omega)}$ для первой зоны Френеля мы получим сильно деформированную полуокружность – рис.46.

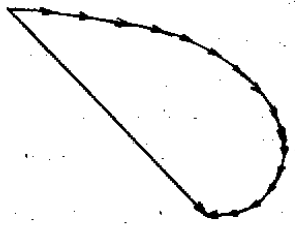


Рис.46

Общим для кривых, показанных на рис.40 и рис.46, является сдвиг фаз между крайними векторами, равный в обоих случаях .

Суммируя аналогичным образом векторы, изображающие действие последующих "правых" (нештрихованных – рис.45) зон, получим кривую, показанную на рис.47. Отметим, что по мере возрастания номера зоны различие в площадях соседних зон становится все меньше (см. (4.II)), поэтому чем больше номер зоны, тем ближе соответствующий отрезок спирали на рис.47 к полуокружности. Точки, обозначающие границы действия первых четырех зон Френеля, отмечены на рис.47 номерами.

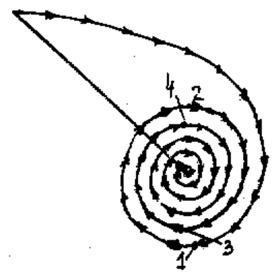


Рис.47

Видно, что действие первой зоны существенно больше действия второй (и последующих), так как площадь первой зоны значительно больше площади любой последующей.

Очевидно, что точно такая же векторная диаграмма может быть построена для совокупности "левых" (штрихованных на рис. 45) зон Френеля. Полную векторную диаграмму для бесконечно широкой щели, получим, "сшивая" две векторные диаграммы, показанные на рис.47. При таком "сшивании" нужно учесть, что два начальных вектора $E_I^{(\omega)}$ и $E_{I'}^{(\omega)}$ (от двух центральных полосок справа и слева от осевой линии ОВ) практически параллельны (фазы колебаний почти одинаковы); по мере удаления от центральной полоски к периферийным соответствующие векторы $E_{2'}^{(\omega)}$, $E_{3'}^{(\omega)}$, ... $E_{N'}^{(\omega)}$, все больше поворачиваются относительно $E_{I'}^{(\omega)}$ по часовой стрелке (отставание по фазе). В результате получим полную фазовую диаграмму колебаний в точке В в виде т.н. "спирали Корню" – см. рис.48.

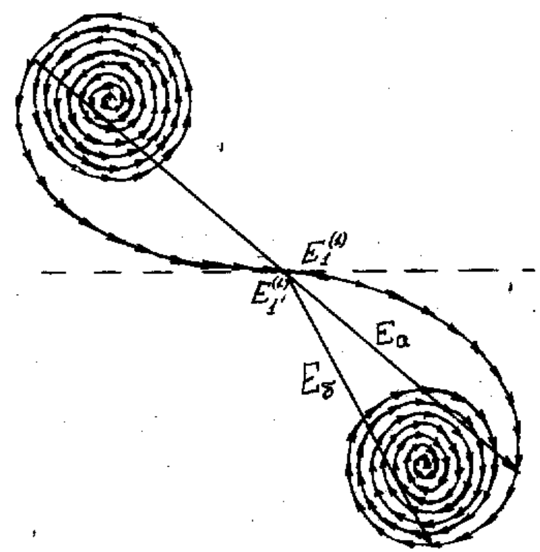


Рис.48

Пользуясь рис. 48, можно провести качественное построение дифракционной картины от щели любой ширины. В качестве примера рассмотрим дифракцию плоской волны на щели, ширина которой

$$b = h_1 = \sqrt{\lambda \ell}.$$

На рис.49 еще раз воспроизведена плоскость COC_1, в которой предполагается разместить преграду со щелью; цифрами обозначены вычисленные по формуле (4.9) границы зон Френеля.

Поместим щель точно в центре выделенной плоскости (положение "а" на рис.49*). Границы щели приходятся на середины первых зон Френеля справа и слева от оси OB. Соответствующий результирующий вектор колебаний в центре экрана показан на рис.48 (вектор E_a).

Для того, чтобы найти амплитуду колебаний в какой-то точке экрана, отстоящей на расстоянии "x" от центра (точки B) сместим на такое же расстояние от осевой линии OB саму щель, а регистрировать колебания будем в точке B (и, соответственно, пользоваться векторной диаграммой рис.48). В частности, точке на экране, отстоящей от осевой линии OB на величину $b/2$ соответствует положение щели, показанное на рис.49 значком "б".

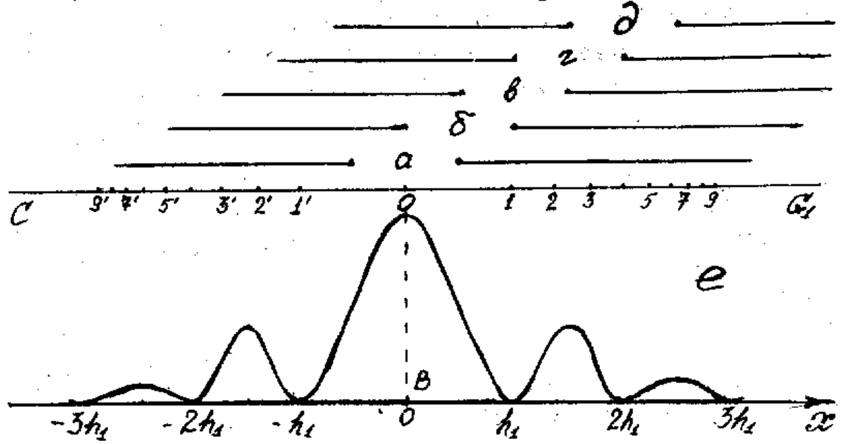


Рис.49

Результирующий вектор колебаний для этой точки экрана ($E_б$) соединяет на векторной диаграмме (рис.48) начало и конец первой незаштрихованной зоны Френеля.

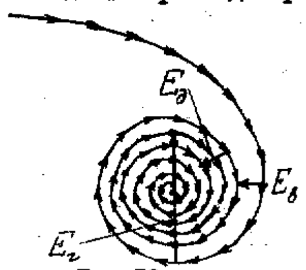


Рис.50

Видно, что координате $x = b/2$ на экране будет соответствовать уменьшение амплитуды колебаний приблизительно в 2 раза (по сравнению с точкой $x = 0$) – см. рис.49,е.

Для определения амплитуды колебаний в точке $x = b$ поме-

---

* Для удобства различные положения щели (а, б, в, г, д) разнесены по вертикали.

стим щель в положение "в". Соответствующий вектор $E_в$ показан на векторной диаграмме рис.50 (для удобства на рис.50 перенесена правая часть рис.48). Видно, что этой точке на экране необходимо поставить в соответствие очень малую амплитуду колебаний.

Действуя аналогичным образом, получаем амплитуду колебаний в точках $x = 3b/2$ и $x = 2b$ (соответствующие положения щели "г" и "д" на рис.49, а амплитуды – $E_г$ и $E_д$ на рис.50).

На рис.49,е показана зависимость амплитуды колебаний от координаты точки экрана по оси x.

Дифракционная картина от щели состоит из системы светлых и темных полос, параллельных щели. Положения минимумов в рассматриваемом нами частном случае, когда $h_1 = b$, соответствуют $x_{min} = mh_1$ (где m = I, 2, 3, ...). Условие наблюдения минимума интенсивности дифракционной картины можно записать несколько иначе, учитывая, что $h_1 = \sqrt{\lambda \ell}$, и используя равенство $\sin\varphi = x/\ell$:

$$x_{min} = m\lambda\ell/\sqrt{\lambda\ell} = m\lambda\ell/b, \quad b\sin\varphi_{min} = m\lambda \qquad (4.12)$$

В следующем параграфе будет доказано, что соотношения (4.I2) справедливы для щели любой ширины.

Очевидно, что при удалении экрана от щели (увеличение ℓ) размеры зон Френеля будут увеличиваться (см. (4.9)) и щель будет "вмещать" все меньше и меньше зон Френеля (а затем все меньшую долю первой зоны Френеля). Качественно то же самое происходит при уменьшении ширины щели и $\ell = const$. На рис.5I описан-

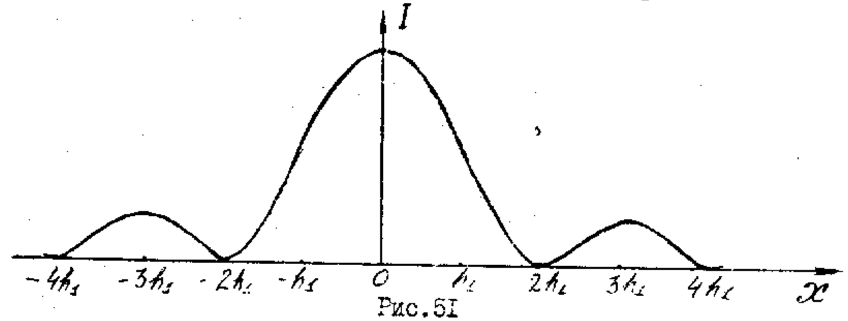


Рис.5I

ным выше методом построена дифракционная картина для более узкой щели ($b = h_1/2$). Видно, что при сужении щели в два раза дифракционная картина во столько же раз растягивается по оси x; амплитуды колебаний, соответствующие максимумам интенсивности, уменьшаются в 2 раза, а интенсивности – в четыре.

Используя развитые представления, легко определить вид интерференционной картины от щели произвольной ширины, а также от полуплоскости.

§ 3. Дифракция Фраунгофера от щели

Термин "дифракция Фраунгофера" принято использовать, когда дифракционная картина наблюдается в параллельных лучах (например, экран находится очень далеко от препятствия, либо экран расположен в фокальной плоскости собирающей линзы).

На рис.52 показана щель шириной b, на которую перпендикулярно к ней падает плоская волна, длина которой λ. Разобьем волновую поверхность, совпадающую с плоскостью щели, на много (n) полосок, параллельных краям щели. В соответствии с принципом Гюйгенса-Френеля, каждая такая полоска может рассматриваться как самостоятельный источник волн (в данном случае вторичные волны не сферические, как для точечного источника, а цилиндрические).

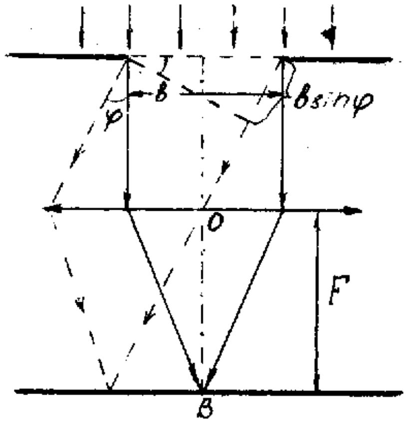


Рис.52

Рассмотрим семейство лучей, выходящих от всех вторичных источников в одном и том же направлении, составляющем угол φ с нормалью к плоскости щели и с падающим на щель пучком света. Поскольку все полоски имеют одинаковую площадь, интенсивность вторичных волн от каждой полоски одинакова. Как видно из рис.52, разность хода между лучами, испускаемыми в данном направлении первой и последней (n-ой) полосками, равна $b\sin\varphi$. В центральную точку экрана B все n лучей придут в одной и той же фазе ($\varphi = 0$). Векторная диаграмма колебаний для этого случая (рис.53) представляет собой последовательность одинаковых векторов, изображающих амплитуды колебаний в точке B от отдельных полосок; фаза всех векторов одинакова; общее количество векторов равно числу полосок. В сумме получается

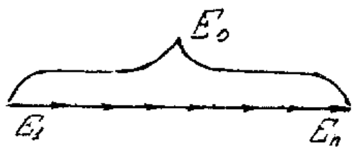


Рис.53

результирующий вектор, длину которого обозначим E_0.

Будем постепенно удаляться от центра дифракционной картины, т.е. рассматривать лучи, идущие под все большими углами φ. Теперь между колебаниями от разных полосок на экране будет разность фаз, отличающаяся от нуля. На рис.54,а показана векторная диаграмма для малого угла φ, когда разность фаз колебаний от первой и последней полосок (угол между первым и последним векторами – E_I и E_n) равна приблизительно $\pi/4$. При выполнении условия $b\sin\varphi = \lambda/2$ разность фаз между колебаниями E_I и E_n достигнет π – рис.54,б. Амплитуда результирующего вектора E_0 при этом связана с E_0 очевидным соотношением $E_0' = 2E_0/\pi = 0{,}64\,E_0$ (интенсивности пропорциональны E^2, поэтому $I_0 = 0{,}4\,I_0$). При дальнейшем увеличении угла будем последовательно получать векторные диаграммы, изображенные на рис.55. Над каждой векторной диаграммой приведена величина разности хода между крайними лучами ($b\sin\varphi$), под каждой диаграммой – длина результирующего вектора и интенсивность колебаний.

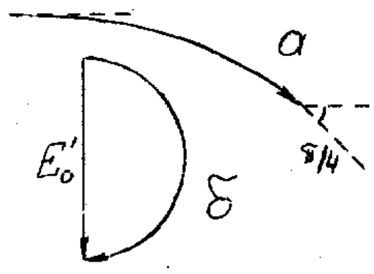


Рис.54

Графическое изображение зависимости интенсивности колебаний от синуса угла дифракции приведено на рис.56.

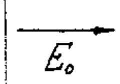
$\sin\varphi$	0	$\lambda/2b$	λ/b	$3\lambda/2b$	$2\lambda/b$	$5\lambda/2b$	$(m+\frac{1}{2})\frac{\lambda}{b}$
классификац	нулевой макс.	плечо нул.м.	первый мин.	первый макс.	второй мин.	второй макс.	m-ый макс.
вектор. диагр.							
Амплит.	E_0	$E_0=\frac{2E_0}{\pi}$	0	$E_I=\frac{2E_0}{3\pi}$	0	$E_2=\frac{2E_0}{5\pi}$	$E=\frac{E_0}{(m+\frac{1}{2})\pi}$
Интенс.	$I_0 \sim E_0^2$	$I_0'=0{,}4I_0$	0	$0{,}045I_0$	0	$0{,}016I_0$	$(m+\frac{1}{2})^{-2}\pi^{-2}$

Рис.55

Запишем условия максимумов и минимумов интерференционной картины от вторичных источников в случае дифракции от одной щели:

максимумы: $b\sin\varphi = 0;\ \pm(m+1/2)$; $m = 1, 2, \ldots$; (4.13)

минимумы: $b\sin\varphi = \pm m\lambda$; $m = 1, 2, \ldots$ (4.14)

Отметим, что центральный максимум в два раза шире, чем все остальные; его амплитуда (по интенсивности) приблизительно в 25 ? 22 раз больше, чем двух соседних. Поэтому почти вся энергия волн, проходящих через щель, сосредоточена в центральном максимуме.

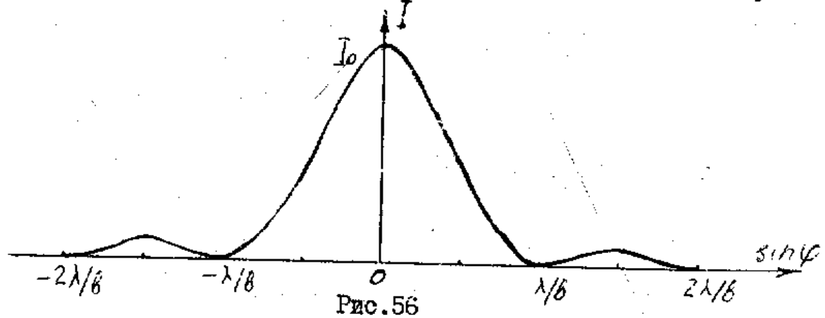


Рис.56

В заключение этого параграфа подчеркнем два обстоятельства: 1) положения минимумов и максимумов (кроме центрального) зависят от длины волны, т.е. щель является простейшим спектральным аппаратом; 2) для наблюдения дифракции Фраунгофера использование линзы совершенно необязательно, необходимо лишь, чтобы экран находился достаточно далеко от щели (строгое количественное определение условий наблюдения дифракции Фраунгофера обсуждается в следующем параграфе).

§ 4. Классификация дифракционных явлений

При рассмотрении дифракции волн на различных препятствиях принято использовать исторически сложившуюся терминологию – называть "дифракцией Френеля" дифракционную картину, которая получается при интерференции непараллельных лучей, и "дифракцией Фраунгофера" – дифракцию в параллельных лучах.

Нестрогость приведенных выше формулировок очевидна; кроме того, совершенно не обсуждался пока вопрос о том, когда дифракционные явления существенны, и в каких условиях можно ограничиться классическими представлениями (в случае световых волн – представлениями геометрической оптики). Для того, чтобы выработать количественные критерии, позволяющие точно разграничить области применимости понятий "дифракция Френеля", "дифракция Фраунгофера", "геометрическая оптика", вернемся к задаче о прохождении плоской волны через длинную щель в бесконечно большой преграде – см. рис.57,а.

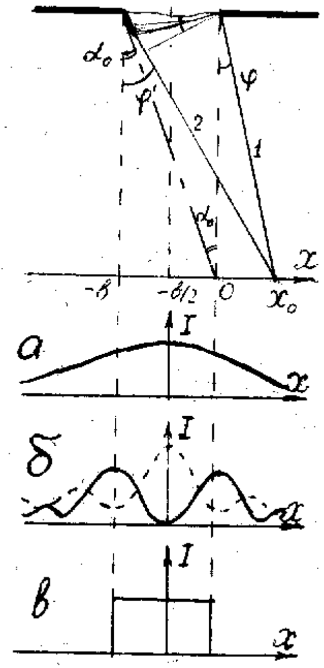


Рис.57

Рассмотрим результат наложения волн от вторичных источников (как и ранее, вторичными источниками волн будем считать узкие полоски, "вырезанные" параллельно краям щели) в некоторой точке экрана, координата которой x_0. Два крайних луча, идущие в эту точку от первого и n-ого вторичного источника, обозначены на рисунке цифрами 1 и 2; углы дифракции для этих лучей – φ и φ'. Сохраняя принятые ранее обозначения, имеем:

$$\mathrm{tg}\,\varphi = x_0/l;\quad \mathrm{tg}\,\varphi' = (x_0+b)/l. \qquad (4.15)$$

Если речь идет о дифракции Фраунгофера, то лучи 1 и 2 должны быть почти параллельными, а это означает, что $\varphi \simeq \varphi'$ и, следовательно,

$$x_0 \gg b \qquad (4.16)$$

Считая, что наблюдаемая на экране дифракционная картина удовлетворяет неравенству (4.16), мы должны полагать, что ближайшая к центру картины особенность – первый минимум – во всяком случае, не подчиняться соотношению (4.16). Поскольку для первого минимума $x_0 = x_{01}$, $b\sin\varphi_1 = \lambda$; $\sin\varphi_1 = \lambda/b \simeq x_{01}/l$, из (4.16) получаем:

$$\lambda l/b^2 \gg 1. \qquad (4.17)$$

Сл. 28)

Выполнение условия (4.17) необходимо и достаточно для реализации дифракции Фраунгофера. Заметим, что из неравенства (4.16) следует: $b \ll x_0$

$$b\,\mathrm{tg}\,\alpha \ll b\sin\varphi_1 = \lambda. \qquad (4.18)$$

Соотношение (4.18) означает, что если смотреть на щель из точек, расположенных вблизи центра экрана, то мы будем "видеть" значительно меньше одной зоны Френеля (разность хода между лучами 1 и 2 гораздо меньше длины волны). Это второй, полукачественный способ определения дифракции Фраунгофера.

Если интерферирующие лучи 1 и 2 непараллельны, то из (4.15) автоматически получаем:

$$x_{01} \sim b \qquad (4.19)$$

Очевидно, что при этом неравенство (4.17) преобразуется в приблизительное равенство

$$\lambda l / b^2 \sim 1, \qquad (4.20)$$

которое и является условием наблюдения дифракции Френеля. Точно так же вместо (4.18) в случае дифракции Френеля нужно записать:

$$b \sin\alpha \sim \lambda. \qquad (4.21)$$

Последнее соотношение означает, что из центра экрана "видно" порядка одной (небольшое количество) зон Френеля.

Наконец, явление дифракции проявляется слабо, когда координата первого дифракционного минимума находится вблизи проекции на экран края щели, т.е. $x_{01} \ll b$,

$$b \sin\alpha \gg \lambda \qquad (4.22)$$

Из неравенства (4.22) получаем условие того, что можно пользоваться простыми представлениями геометрической оптики:

$$\lambda l / b^2 \ll 1. \qquad (4.23)$$

В этом случае из центра экрана видно много зон Френеля.

Качественный вид дифракционных картин для случаев дифракции Фраунгофера, Френеля и малой роли дифракции (геометрическая оптика) показан на рис.57 (а, б, в – соответственно).

Несмотря на то, что в последнем из рассмотренных случаев дифракция относительно несущественна, полностью пренебрегать ею нельзя – именно дифракционные эффекты ограничивают разрешающую способность оптической аппаратуры. Действительно, предположим, что источник волн, который мы хотим зарегистрировать с помощью какого-то оптического прибора (глаза или фотообъектива), находится достаточно далеко от нас (чтобы выполнялось условие (2.11) и источник можно было считать точечным). Если бы законы геометрической оптики выполнялись совершенно точно, то отверстие объектива просто ограничивало бы размеры "пучка" волн; направление световых лучей не изменялось бы. Для иллюстрации на рис.58 показаны крайние лучи этого пучка – I и 2 (из-за того, что расстояние до источника волн много больше размера отверстия объектива, лучи I и 2 почти параллельны). После прохождения отверстия все лучи пучка остаются параллельными, затем собирающей линзой эти лучи фокусируются в одной точке фокальной плоскости В (чувствительный элемент оптической аппаратуры, например, фотопленка, находится в фокальной плоскости линзы; сама же линза может сме-

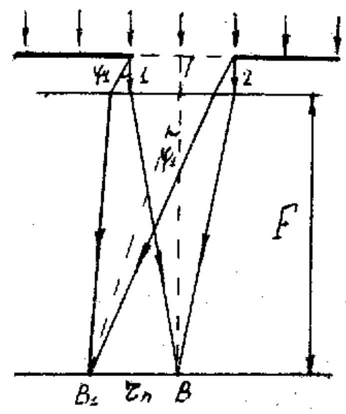


Рис.58

щаться по вертикали как угодно и, в частности, располагаться непосредственно в отверстии). Таким образом, при идеальном выполнении законов геометрической оптики наш объектив отобразил бы точечный источник волн в виде точки на фотопленке.

На самом деле всегда будет присутствовать некоторое "уширение" пучка за отверстием из-за явления дифракции. Угловое отклонение φ_1 крайних лучей пучка определяется положением первого дифракционного минимума. В случае дифракции на ~~щели~~ шириной b угол, под которым наблюдается первый минимум, равен $\sin\varphi_1 = 1{,}2\lambda/d$, где d – диаметр отверстия. В дальнейшем для простоты мы во всех случаях будем полагать, что крайние лучи пучка волн в результате дифракции на отверстии размером b отклоняются на угол φ_1 :

$$\sin\varphi_1 \simeq \lambda / b \qquad (4.24)$$

Как видно из рис.58, лучи, идущие под углом к падающему пучку, сфокусируются на экране в точке B_1 – т.е. дифракция приведет к "расплыванию" изображения источника на экране. В рассматриваемом случае вместо точки на фотопленке будет пятно радиусом $r_n = F\lambda/b$. Чем больше размер отверстия, тем ближе будет полученное изображение к точечному.

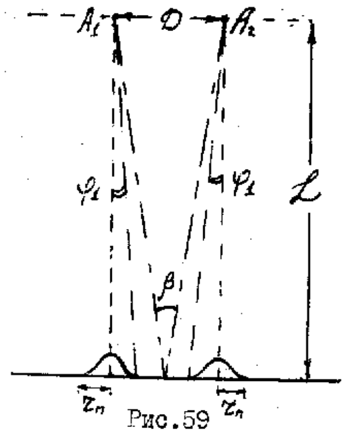


Рис.59

Из сказанного выше очевидно, что дифракция будет ограничивать возможности пространственного разрешения данной оптической аппаратуры: два отдельных точечных источника волн могут быть разрешены только в том случае, когда угловое расстояние между ними β больше, чем угловой размер изображения от одного точечного источника (см. рис.59)

$$\beta = D/L > \lambda/b \qquad (4.25)$$

Заметим, что неравенство (4.25) означает потерю когерентности волн, распространяющихся от двух источников A_1 и A_2 (см.(3.26)):

$$b > \lambda L / D = r_k \qquad (4.26)$$

Если бы выполнялось неравенство, обратное (4.26), излучение от двух наших источников было бы когерентным, а значит, неотличимым от излучения одного точечного источника.

§ 5. Дифракция Фраунгофера от системы щелей

Рассмотрим дифракционную картину от нескольких (N) параллельных щелей шириной b, расположенных на одинаковых расстояниях друг от друга. Такую систему щелей будем называть дифракционной решеткой, расстояние d – периодом решетки (см. рис.60). Пока будем считать, что падающий на решетку пучок света перпендикулярен плоскости решетки.

Поскольку мы рассматриваем дифракцию в параллельных лучах, после решетки поставим собирающую линзу. Все лучи, выходящие из решетки под одинаковым углом φ (угол φ, как и ранее, отсчитываем от направления нормали к решетке), будут сфокусированы линзой в одной и той же точке фокальной плоскости – рис.60. Падающий на дифракционную решетку пучок света будем считать когерентным.

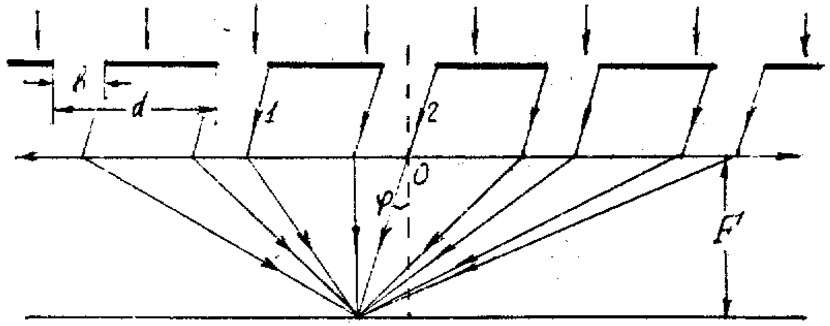


Рис.60

Наша задача – определить положения максимумов и минимумов дифракционной картины, найти амплитуды и угловую протяженность максимумов.

Наиболее просто определить положения главных минимумов дифракционной картины от решетки. Совершенно ясно, что там, где наблюдается минимум (нулевая интенсивность) от одной щели, будет наблюдаться минимум от каждой щели, а следовательно, и от

всей решетки (см. (4.14)):

$$b \sin\varphi = \pm m'\lambda\,; \quad m' = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots \qquad (4.27)$$

Здесь по причинам, которые станут понятными несколько позже, вместо m используется обозначение m'.

Для того, чтобы найти интенсивность колебаний в произвольной точке экрана, необходимо провести сложение колебаний в данной точке, обусловленных каждой щелью.

Очевидно, что главные максимумы дифракционной картины от решетки будут наблюдаться под теми углами, для которых выполняется условие.

$$d \sin\varphi = \pm m\lambda\,; \quad m = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots \qquad (4.28)$$

Число m принято называть порядком главного максимума. При выполнении условия (4.28) колебания, приходящие в соответствующую точку экрана от разных щелей, происходят в одной и той же фазе (разность хода между любыми эквивалентными лучами, идущими от разных щелей, кратна λ – см. лучи 1 и 2 на рис.60). Векторная диаграмма колебаний для этого случая показана на рис.61,а. На этом рисунке E_1, E_2, ... E_N – амплитуды напряженностей электрического поля световых волн, пришедших в рассматриваемую точку экрана от первой, второй, ... N – й щелей. Поскольку щели одинаковы, $E_1 = E_2 = E_3 = \ldots = E_N$; каждая из этих величин для любого значения угла φ получается методом, изложенным в § 3 этого раздела. Из векторной диаграммы (рис.61,а) следует, что амплитуда результирующего вектора

$$E_0 = N E_1 = N E_2 = \ldots = N E_N\,.$$

Следовательно, интенсивность колебаний в тех местах экрана, в которых выполняются условия главных максимумов (4.28), в N^2 раз больше, чем в тех же местах, но от одной щели. Очевидно, что наибольшая интенсивность будет наблюдаться для центрального максимума ($m = 0$), по мере удаления от центра дифракционной картины амплитуды векторов E_1, E_2, ... E_N будут уменьшаться (см. рис.61,б), соответственно, интенсивность "боковых" максимумов будет тем меньше, чем дальше они расположены от центра.

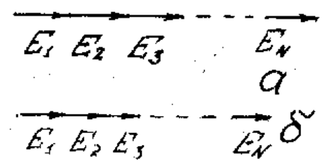


Рис.61

Так как полная энергия волн, пропускаемых решеткой, пропорциональна числу щелей, а интенсивность главных максимумов пропорциональна N^2, сразу ясно, что ширина главных максимумов должна быть пропорциональной $1/N$ (несколько позже это будет строго доказано).

Между любыми соседними главными максимумами регистрируются дополнительные максимумы и минимумы. В качестве примера рассмотрим, как будет изменяться векторная диаграмма колебаний при постепенном увеличении угла φ от центрального ($m = 0$) главного максимума к первому ($m = 1$).

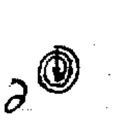
$\sin\varphi$	$\lambda/2dN$	λ/dN	$3\lambda/2dN$	$2\lambda/dN$	$5\lambda/2dN$
векторная диаграмма	 а	 б	 в	 г	 д
классифик.	плечо ЦМ	I-ый мин.	I-ый макс.	2-ой мин.	2-ой макс.

Рис.62

Векторная диаграмма, показанная на рис.62,а, соответствует величине угла φ, для которой разность фаз колебаний от первой и N-ой щелей равна π. При этом амплитуда колебаний уменьшается в $2/\pi$ раз, а интенсивность – в 2,5 раза (см. стр. 71, рис.55). Эта векторная диаграмма относится к плечу центрального ($m = 0$) максимума. При постепенном увеличении угла φ (удалении от нулевого максимума) векторная диаграмма колебаний для соответствующей точки экрана будет последовательно принимать вид, показанный на рис.62(б–д), в зависимости от значений $\sin\varphi$. Необходимо иметь в виду, что каждая "спиралька" составлена из одинаковых векторов, длина которых определяется напряженностью электрического поля световой волны в данной точке экрана от одной щели.

Векторные диаграммы рис.62,б,г соответствуют первому и второму побочным минимумам. Первый побочный минимум ограничивает ширину главного максимума; из рис.62,б следует, что ширина главного максимума пропорциональна $1/N$. Общее соотношение, описывающее положения всех побочных минимумов, можно записать так:

$$d\sin\varphi = \pm m\lambda \pm m_1\lambda/N\,; \quad m_1 = 1, 2, \ldots, N-1. \quad (4.29)$$

Обратим внимание, что максимально возможное число $m_1 = N-1$

(между любыми двумя главными максимумами расположено $N - 1$ дополнительных минимумов). Для иллюстрации на рис.63 продемонстрирована дифракционная картина от решетки, состоящей из пяти одинаковых щелей шириной b, период решетки $d = 2b$. Для этой решетки между главными максимумами находятся четыре дополнительных минимума.

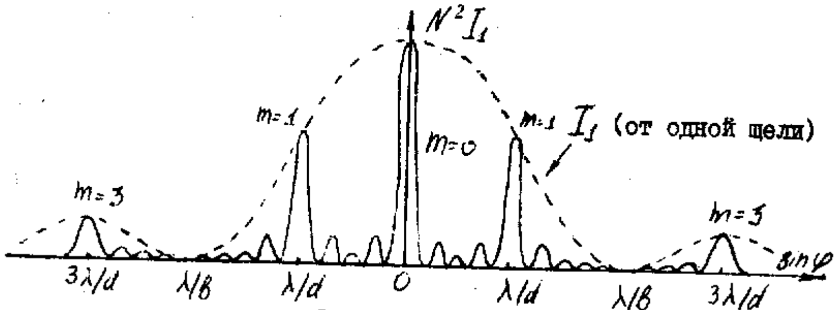


Рис.63

Векторные диаграммы, показанные на рис.62,в,д, соответствуют дополнительным максимумам. Общее условие наблюдения дополнительных максимумов:

$$d\sin\varphi = \pm m\lambda \pm (m_1' + \tfrac{1}{2})\lambda/N\,; \quad m_1' = 1, 2, \ldots, N-2. \quad (4.30)$$

Подчеркнем, что максимальное значение числа m_1' равно $N - 2$ (между соседними главными максимумами имеется $N - 2$ дополнительных максимумов). Для дифракционной решетки, состоящей из пяти щелей, число дополнительных максимумов между двумя главными равно трем – см. рис.63. Из векторных диаграмм, показанных на рис.62,в,д, видно, что амплитуды побочных максимумов быстро уменьшаются по мере удаления от главных максимумов.

Интенсивность любого дополнительного максимума легко найти точно таким же образом, как мы определяли ранее интенсивности максимумов дифракционной картины от одной щели – сравните рис.55 и 62. Для того, чтобы получить амплитуды колебаний и интенсивности дополнительных максимумов, можно воспользоваться соотношениями, приведенными в нижней части рис.55, но вместо E_0 подставить величину $N E_1$, где E_1 – амплитуда колебаний от одной щели при соответствующем значении $\sin\varphi$.

В заключение этого параграфа сделаем несколько замечаний.

1. Практически вся энергия волн, проходящих через решетку, сосредоточена в области центрального максимума от одной щели –

см. рис.63 (т.е. основная часть дифракционной картины ограничена углом $\varphi = \arcsin \lambda/\ell$).

2. С увеличением числа щелей интенсивность главных максимумов растет пропорционально N^2, ширина максимумов уменьшается обратно пропорционально N.

3. Если дифракционная картина рассматривается с помощью линзы, то перемещение дифракционной решетки параллельно экрану не приводит к смещению картины на экране.

4. Положение главных максимумов зависит от длины волны света, поэтому максимумы для разных длин волн будут расположены в разных местах экрана. Следовательно, дифракционная решетка является спектральным аппаратом, с помощью которого можно исследовать спектральный состав падающего на решетку света.

5. Проведенное выше рассмотрение легко может быть обобщено на случай наклонного падения лучей света на решетку. Из рис.64 видно, что в этом случае дифракционная картина будет приблизительно такой же, как при нормальном падении на решетку с периодом $d' = d\cos\theta$, где θ – угол падения лучей света на дифракционную решетку с периодом d. Дифракционные картины от решеток I и II на рис.64 будут практически идентичными при выполнении условия $d \gg \lambda$.

§ 6. Характеристики дифракционной решетки как спектрального аппарата

1. Свободная спектральная область

Если на дифракционную решетку падают электромагнитные волны различных длин, то разным λ будут соответствовать различные положения дифракционных максимумов m-го порядка. Если при этом спектральный состав падающего излучения достаточно широкий, произойдет частичное перекрытие спектров соседних порядков (m-I и m, m и m+I). Свободной спектральной областью спектра m-го порядка называется та область спектра m-го порядка, которая не накладывается на спектры соседних порядков. Оценим протяженность $\Delta\lambda_c$ свободной спектральной области. Для излучения с длиной волны λ положение главного максимума -го порядка определяется условием (4.28). На рис.65

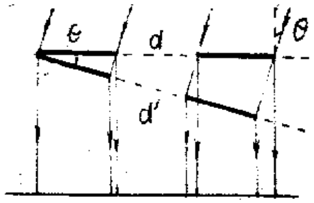


Рис.64

условно показаны спектры соседних порядков на оси $\sin\varphi$. Очевидно, условия отсутствия наложения спектров m-I и m+I порядков на интересующий нас спектр m-го порядка таковы:

$$(m-1)(\lambda+\Delta\lambda) < m\lambda, \text{ т.е. } \Delta\lambda < \lambda/(m-1). \tag{4.31}$$

$$m(\lambda+\Delta\lambda) < (m+1)\lambda, \text{ т.е. } \Delta\lambda < \lambda/m. \tag{4.32}$$

Условие (4.32) является более жестким, чем (4.31); это естественно, так как чем выше порядок спектра, тем больше спектр "растянут" по оси $\sin\varphi$. В итоге получаем из (4.32) протяженность свободной спектральной области для спектра m-го порядка:

$$\Delta\lambda_c = \lambda/m. \tag{4.33}$$

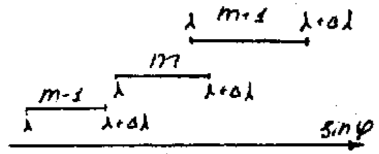


Рис.65

Итак, чем выше порядок спектра, тем уже свободная спектральная область. Для центрального максимума (m = 0) разложение белого света в спектр отсутствует, поэтому из (4.33) формально следует $\Delta\lambda_c = \infty$.

2. Угловая дисперсия характеризует угловое расстояние между двумя спектральными линиями, отличающимися по длине волны на IÅ = I0^{-10} м. По определению она равна

$$D_\varphi = d\varphi/d\lambda \tag{4.34}$$

Продифференцируем условие главного максимума (4.28):

$$d\cos\varphi\, d\varphi = m\,d\lambda. \tag{4.35}$$

Из (4.35) следует, что угловая дисперсия в спектре m-го порядка:

$$D_\varphi = m/d\cos\varphi. \tag{4.36}$$

При небольших углах дифракции $\cos\varphi \simeq$ I и можно использовать упрощенное соотношение:

$$D_\varphi \simeq m/d \tag{4.37}$$

Угловая дисперсия тем больше, чем выше порядок спектра и меньше период дифракционной решетки.

3. Линейная дисперсия характеризует величину линейного расстояния между двумя спектральными линиями, отличающимися по длине волны на IÅ.

Обычно в спектральных приборах выходящие из дифракционной решетки лучи света проходят под малыми углами к оптической оси линзы OO_I (см. рис.66), поэтому расстояние между максимумами

(5.I) Ламбертом было сделано простейшее и вполне естественное допущение о том, что относительное изменение интенсивности волны на участке dx не зависит от интенсивности и пропорционально длине этого участка:

$$dI/I = -\varkappa\, dx\,. \qquad (5.2)$$

Легко убедиться, что (5.I) – следствие соотношения (5.2). Постоянная $\varkappa$ в (5.I), (5.2) называется показателем поглощения, величина $\varkappa$ зависит от длины волны и эта зависимость называется спектром поглощения вещества.

Если свет поглощается атомами или молекулами некоторого "активного" вещества в растворе, причем сам растворитель не поглощает в исследуемой спектральной области, то достаточно часто показатель поглощения в (5.I) оказывается пропорциональным концентрации "активного" вещества $\varkappa = \alpha_0 C$ (здесь C – концентрация, α_0 – коэффициент, не зависящий от концентрации). Последнее утверждение по существу означает, что поглощающая способность молекулы "активного" вещества не зависит от присутствия рядом других молекул и называется законом Бера. Комбинация (5.I) с законом Бера обычно носит название закона Бугера-Ламберта-Бера. Использование этого закона позволяет в ряде случаев оперативно измерять концентрацию исследуемого вещества в растворе путем измерения поглощения в определенной спектральной области.

Если вещество, через которое проходит поперечная волна, анизотропно, то показатель поглощения в соотношении (5.I) зависит от того, как в этой волне ориентированы возмущения (в случае электромагнитной волны – какова "плоскость колебаний", т.е. в какой плоскости колеблется вектор напряженности электрического поля). Вещества, обладающие такой анизотропией, называются поляризующими. В частности, таким свойством обладают природные и синтетические кристаллы турмалина – алюмосиликата, содержащего бор. Однако значительно более широкое применение в оптике в качестве поляризующих сред нашли органические пленки полимеров, длинные молекулы которых ориентированы преимущественно в одном направлении (это достигается специальными технологическими приемами – например, растяжением пленки в процессе ее формирования). Поляризующие пленки (т.н. "поляроиды"), изготовленные на основе поливинилового спирта или поливинилена, при типичной толщине в доли миллиметра пропускают только световые волны, плоскость колебаний

которых перпендикулярна полимерным цепям (эта плоскость называется главной плоскостью поляроида). Идеальным поляроидом принято называть устройство, которое пропускает 100% энергии световых волн, если плоскость колебаний вектора $\bar{E}$ параллельна главной плоскости поляроида, и совсем не пропускает те волны, в которых плоскость колебаний $\bar{E}$ перпендикулярна главной плоскости поляроида. Если на идеальный поляроид падает световая волна с плоскостью колебаний, составляющей угол φ с главной плоскостью поляроида (рис.69), то через поляроид пройдет только та волна, в которой вектор $\bar{E}$ лежит в главной плоскости поляроида P_0P_I. Амплитуда колебаний вектора $\bar{E}$ в этой волне равна $E_p = E_0 \cos\varphi$. Отсюда следует, что интенсивность прошедшего через поляроид света связана с интенсивностью падающего света I_0 простым соотношением, которое носит название закона Малюса:

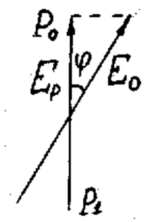


Рис.69

$$I = I_0 \cos^2\varphi. \qquad (5.3)$$

После прохождения идеального поляроида световая волна становится плоско- (или линейно-) поляризованной. Для реальных поляроидов коэффициенты пропускания (отношения интенсивностей прошедшего через поляроид и падающего на него света) волн с $\bar{E} \parallel P_0P_I$ и $\bar{E} \perp P_0P_I$ отличаются от единицы и нуля, соответственно ($\alpha_1 < 1$, $\alpha_2 > 0$), хотя для хорошего поляроида всегда $\alpha_1 \gg \alpha_2$. Световые волны, прошедшие через реальный поляроид, являются частично плоско-поляризованными (имеется преимущественное направление ориентации вектора $\bar{E}$, хотя присутствуют также волны с $\bar{E} \perp P_0P_I$). Такой свет принято количественно характеризовать степенью поляризации P:

$$P = (I_{max} - I_{min})/(I_{max} + I_{min}). \qquad (5.4)$$

В соотношении (5.4) I_{max} и I_{min} – максимальная и минимальная интенсивности света, которые регистрировались бы чувствительным прибором 3 (см. рис.70) при вращении главной плоскости идеального поляризатора ИП, через который пропускается луч I вышедшего из реального поляроида П частично плоскополяризованного света. После идеального поляризатора луч света 2 плоскополяризован, интенсивность луча 2 зависит от ориентации главной плоскости ИП относительно плоскости колебаний луча I.

Если луч I является плоскополяризованным (не частично, а полностью), то для такого луча анализ его по схеме рис.70 дал бы $I_{min} = 0$ и, следовательно, степень поляризации луча $P = 1$ (см. формулу (5.4)).

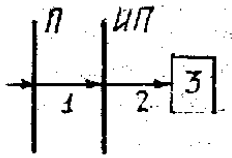


Рис.70

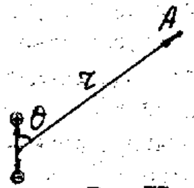


Рис.71

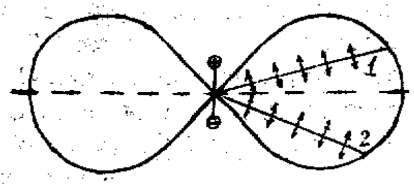


Рис.72.

§ 2. Поляризация света при отражении и рассеянии

Отраженная и рассеянная волны - результат излучения атомов и молекул той среды, от которой происходит отражение или рассеяние. Излучающим элементом возбужденной падающей волной среды является колеблющийся с частотой возбуждающей силы диполь - в первом приближении таким диполем можно считать систему электрон + атомный остов (наиболее подвижен в таком диполе электрон). Поэтому для понимания основных особенностей поляризации волн при их отражении и рассеянии рассмотрим сначала некоторые закономерности излучения диполя.

1. Излучение диполя

Движущийся относительно положительно заряженного атомного остова электрон можно рассматривать как элемент тока. Согласно закону Био-Савара-Лапласа, магнитное поле такого элемента тока i равно:

$$d\bar{B} = (\mu\mu_0/4\pi)\, i\, [d\bar{l}\,\bar{r}]/r^3. \qquad (5.5)$$

Здесь $d\bar{l}$ - длина элемента тока, $\bar{r}$ - радиус-вектор, проведенный от элемента тока до точки, в которой определяется индукция магнитного поля (A) - см. рис.71.

Для нашего качественного анализа существенно, что создаваемое диполем в некоторой точке магнитное поле пропорционально величине тока и синусу угла между $d\bar{l}$ и $\bar{r}$ (θ на рис.71). Обозначая смещение электрона относительно положения равновесия через ξ и учитывая, что ток пропорционален скорости заряда $\dot{\xi}$, имеем:

$$dB \sim \dot{\xi} \sin\theta. \qquad (5.6)$$

Поскольку при колебательном движении скорость электрона за-

висит от времени, индукция магнитного поля в рассматриваемой точке также изменяется со временем. Из закона электромагнитной индукции (см. (2.46)) следует, что изменяющееся магнитное поле вызовет появление электрического поля, причем напряженность этого "индуцированного" поля пропорциональна скорости изменения магнитного поля:

$$E \sim dB/dt \sim \ddot{\xi} \sin\theta. \qquad (5.7)$$

Очевидно, что изменяющееся электрическое поле приведет, в соответствии с соотношением (2.47), к возникновению магнитного поля и т.д. Таким образом, колеблющийся диполь будет источником электромагнитных волн, интенсивность которых в данной точке пространства пропорциональна квадрату напряженности электрического поля (5.7):

$$I \sim E^2 \sim (\ddot{\xi})^2 \sin^2\theta \sim \omega^4 \sin^2\theta. \qquad (5.8)$$

В соотношении (5.8) учтено, что ускорение колеблющегося по гармоническому закону электрона пропорционально квадрату частоты (см. (1.49)).

На рис.72 изображена диаграмма направленности излучения диполя в плоскости рисунка (интенсивность волн, испускаемых в произвольном направлении, пропорциональна $\sin^2\theta$). Трехмерная диаграмма направленности излучения диполя может быть получена вращением рис.72 относительно оси диполя - она имеет вид деформированного тороида. Таким образом, диполь вообще не излучает в направлении своей оси, максимальная интенсивность регистрируется для волн, испускаемых по нормали к оси диполя.

Из приведенных рассуждений следует, что вектор индукции магнитного поля распространяющейся от диполя волны в плоскости рис.71 (в точке A) направлен перпендикулярно чертежу - см. соотношение (5.5). Так как в электромагнитной волне вектор $\bar{E}$ всегда перпендикулярен вектору $\bar{B}$, мы приходим к выводу: излучение диполя является плоскополяризованным, причем плоскость колебаний испускаемых диполем волн совпадает с плоскостью, в которой лежат ось диполя и направление распространения излучаемых им волн. Можно сказать, что в испускаемой диполем электромагнитной волне вектор напряженности электрического поля колеблется в той же плоскости, что и электрические заряды самого диполя (см., например, лучи 1 и 2 на рис.72).

2. Поляризация света при рассеянии

При прохождении световых волн через вещество возбуждаются вынужденные колебания электронов в атомах или молекулах, из которых это вещество состоит. Каждый возбужденный атом (или молекула) становится элементарным излучателем – диполем, испускающим "вторичные" электромагнитные волны в соответствии с диаграммой направленности, показанной на рис.72. Из-за того, что диаграмма направленности каждого элементарного излучателя широкая, направление распространения вторичных волн может сильно отличаться от направления распространения исходной (возбуждающей) волны. Поэтому в результате взаимодействия пучка света со средой может происходить уход части энергии волн в стороны – то есть свет может рассеиваться средой.

Необходимо, однако, иметь в виду, что интенсивность рассеянного света определяется интерференцией волн, испускаемых всеми элементарными излучателями, поэтому явление рассеяния света можно наблюдать не всегда. Как будет показано несколько ниже, рассеяние света происходит только в неоднородных средах.

Прежде всего обсудим состояние поляризации рассеянного света. Предположим, что пучок параллельных лучей естественного света распространяется в рассеивающей среде по оси OX – см. рис.73.

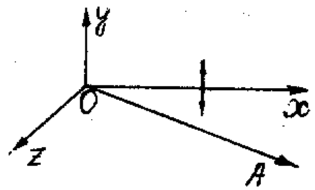


Рис.73.

Будем регистрировать вторичные волны, распространяющиеся перпендикулярно к направлению распространения исходного пучка (например, по оси OZ или OY). Очевидно, вторичные волны, распространяющиеся по этим осям, создаются элементарными излучателями, заряды которых колеблются в плоскости YOZ (из-за поперечности электромагнитных волн). Следовательно, свет, рассеянный под прямым углом к исходному пучку, полностью плоскополяризован (вектор напряженности электрического поля рассеянной волны колеблется в плоскости YOZ). Поскольку пучок естественного света содержит лучи, поляризованные в различных плоскостях, в рассеивающей среде будут возбуждаться вторичные излучатели, ориентированные в плоскости YOZ по разным направлениям. Поэтому интенсивность рассеянного по нормали к исходному пучку света не будет зависеть от ориентации этой нормали в пространстве (будет одинакова для осей OY и OZ).

Если первичный пучок света плоскополяризован, то элементарные излучатели вторичных волн ориентированы строго одинаково (по направлению $\bar{E}$ в исходном пучке) и, следовательно, излучение вторичных волн происходит несимметрично относительно направления OX. Например, если плоскость колебаний исходного пучка – YOX, то по оси OY ни один вторичный элементарный излучатель вообще не испускает электромагнитных волн, тогда как интенсивность излучения по оси OZ максимальна (см. рис.72).

Вторичные волны, распространяющиеся в произвольном направлении (например, по оси OA на рис.73), частично плоскополяризованы, если исходный световой пучок не имеет преимущественной плоскости поляризации, и, конечно, полностью плоскополяризованы, если плоскополяризованными являются падающие на вещество лучи света.

Обсудим теперь зависимость интенсивности рассеянного света от частоты ω (или длины волны λ).

Если среда, в которой распространяется свет, однородна, и расстояние между соседними элементарными излучателями (атомами или молекулами) много меньше длины волны света, то любому элементарному излучателю (например, I на рис.74) будет соответствовать другой такой же излучатель 2, отличающийся от первого только тем, что расположен ближе к наблюдателю на расстояние $\lambda/2$. Вторичные волны, приходящие от этих двух излучателей к наблюдателю, сдвинуты по фазе на π, поэтому взаимно компенсируются (в этом случае говорят о "деструктивной" интерференции). Поэтому в результате интерференции волн от всех вторичных источников (т.е. от большого числа пар элементарных источников) получится рассеянная волна, интенсивность которой близка к нулю.

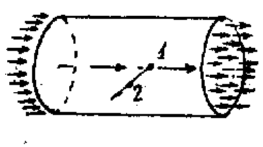


Рис.74

Если же вещество, через которое проходит луч света, неоднородно, различные элементарные рассеиватели не идентичны и в результате интерференции вторичных волн возникает рассеянная волна конечной интенсивности.

В частности, если рассеивающая среда состоит из мелких частиц, размеры которых D много меньше длины световой волны $D \ll 0{,}5$ мкм, а расстояние между частицами $r > \lambda$, то каждая такая частица из-за малого размера излучает вторичные волны почти так же, как элементарный дипольный излучатель. С другой стороны, из-за большого среднего расстояния между частицами деструктивная интерференция вторичных волн отсутствует. В этом случае зависимость интенсивности рассеянного света от частоты ω или длины волны определяется закономерностями излучения вторичных волн элементарного диполя (см. соотношение (5.8)):

$$I_{расс.} \sim \omega^4 \sim \lambda^{-4}. \qquad (5.9)$$

Зависимость (5.9) называется законом Рэлея, а соответствующее рассеяние – рэлеевским. Имеется два характерных типа сред, в которых наблюдается рэлеевское рассеяние. Во-первых, это так называемые мутные среды: дымы (частицы твердого вещества в газе), туманы (мелкие капельки жидкости в газе), суспензии и взвеси (частицы твердого вещества в жидкости), эмульсии (капельки одной жидкости в другой). Во-вторых, неоднородность среды (жидкости или газа) может возникать из-за случайных флуктуаций плотности вещества в результате хаотического теплового движения атомов или молекул. Рассеяние в средах второго типа принято называть молекулярным. Именно молекулярным рассеянием объясняется голубой цвет неба и красный цвет зорь.

П р и м е ч а н и я

1. Соотношение (5.9) очень хорошо описывает закономерности рассеяния, если размер рассеивающих частиц меньше 1/15 длины световой волны. С увеличением размеров частиц зависимость интенсивности рассеянного света от длины волны становится все более слабой. Физическая причина этого понятна – с ростом D все более заметную роль играет деструктивная интерференция, причем прежде всего она начинает проявляться в рассеянии коротких волн. При рассеянии света на больших частицах ($D \sim \lambda$) интенсивность рассеянного света очень слабо зависит от длины волны. Именно поэтому облака имеют белый цвет (на фоне голубого неба, где рассеяние рэлеевское).

Рассеяние света на частицах, размер которых $D \geq \lambda$, теоретически рассмотрено Г.А. Ми, поэтому рассеяние на больших частицах иногда называют рассеянием Ми.

2. В тех случаях, когда рассеяние света играет существенную роль, интенсивность "первичного" пучка света убывает, поскольку энергия волн "уходит" в стороны. Этот эффект отличается от обычного поглощения, и его учитывают введением в соотношение (5.1) дополнительного множителя:

$$I = I_0 \, exp(-\varkappa - \varkappa')x. \qquad (5.10)$$

Постоянная $\varkappa'$, описывающая снижение интенсивности пучка света из-за рассеяния, называется коэффициентом экстинкции (от латинского *extinctio* – гашение).

3. При рассеянии света молекулами, наряду с обычным рассеянием без изменения частоты (такое рассеяние называют упругим) в пучке рассеянного света присутствуют волны, частота которых несколько смещена относительно частоты падающего света ω. Это смещение частоты обусловлено модуляцией амплитуды рассеянной волны за счет колебательного движения атомов в молекуле. Такое рассеяние называется неупругим (комбинационным). Несмотря на весьма небольшую интенсивность неупруго рассеянных волн (десятые и сотые доли процента от интенсивности рассеянных волн с частотой ω), метод комбинационного рассеяния широко применяется в химии для изучения строения молекул и их взаимодействия с окружающей средой. Существенно, что спектры комбинационного рассеяния и поглощения света взаимно дополняют друг друга, поскольку в поглощении и комбинационном рассеянии проявляются различные колебательные движения молекул.

3. <u>Поляризация света при отражении</u>

Пусть параллельный пучок световых волн падает на плоскую границу двух диэлектриков, показатели преломления которых n_1 и n_2 – см. рис.75. Оба диэлектрических материала будем считать однородными, так что рассеяние света в объеме диэлектриков отсутствует. Однако граница раздела двух сред – неоднородность; излучение элементарных диполей второй среды, расположенных вблизи поверхности раздела обусловливает возникновение отраженной волны II. Напомним, что, в соответствии с законами геометрической оптики, отраженный луч II лежит в плоскости падения (т.е. в плоскости, проходящей через падающий луч I и нормаль к границе раздела диэлектриков OA); угол падения α равен углу отражения α'.

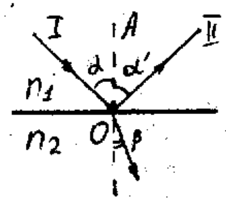


Рис.75

Пусть падающие волны плоскополяризованы: плоскость колебаний вектора $\vec{E}$ лежит в плоскости падения. Такие волны вызывают колебания зарядов в обеих диэлектриках, совпадающие по направлению с $\vec{E}$, поэтому ориентация элементарных дипольных излучателей строго фиксирована – все они также лежат в плоскости падения и перпендикулярны соответствующим лучам – см. рис.76,а. Поскольку отраженная от границы раздела диэлектриков

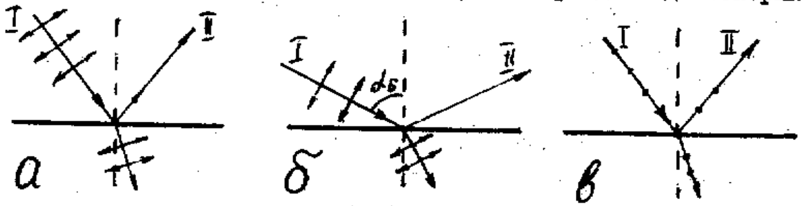


Рис.76

волна II есть результат интерференции волн, испускаемых элементарными излучателями второй среды (вблизи ее поверхности), совершенно ясно, что при изменении угла падения α меняется также угол преломления и, соответственно, ориентация диполей второго диэлектрика относительно направления отраженного луча II.

В частности, при некотором значении угла падения $\alpha = \alpha_Б$ элементарные излучатели второго диэлектрика будут направлены точно вдоль луча II, как видно из рис.76,б, при этом излучение вторичных волн по направлению луча II невозможно (ср. с диаграммой направленности дипольного излучателя – рис.72). Отсюда следует, что световая волна, плоскость колебаний которой совпадает с плоскостью падения и угол падения которой на границу раздела двух диэлектриков равен углу $\alpha = \alpha_Б$, вообще не отражается этой границей (интенсивность отраженного луча равна нулю, имеется только преломленный луч III).

Величину угла $\alpha_Б$ легко найти, используя закон преломления

$$\sin\alpha / \sin\beta = n_2 / n_1 . \qquad (5.11)$$

Учитывая, что $\alpha_Б + \beta_Б = \pi/2$ (см. рис.76,б), имеем $\sin\beta = \sin(\pi/2 - \alpha_Б) = \cos\alpha_Б$ и из (5.11) получаем:

$$tg\,\alpha_Б = n_2 / n_1 . \qquad (5.12)$$

Этот угол принято называть "углом Брюстера".

Если плоскость колебаний падающего луча I перпендикулярна плоскости падения (рис.76,в), то, независимо от величины угла падения α, элементарные излучатели диэлектрика с показателем преломления n_2, перпендикулярны плоскости падения и отраженному лучу II. Следовательно, интенсивность отраженного луча II для таких волн при любых α отлична от нуля.

Если на границу раздела диэлектриков падает луч естественного света, причем угол падения равен углу Брюстера, то в отраженном луче будут присутствовать только волны, плоскость колебаний которых перпендикулярна плоскости падения (т.е. отраженный луч II плоскополяризован). Соответственно, преломленный луч будет частично плоскополяризован (обогащен волнами, плоскость колебаний которых совпадает с плоскостью падения). При произвольной величине угла падения пучка естественного света оба луча – и отраженный, и преломленный – частично плоскополяризованы (в отраженном луче всегда больше волн, плоскость колебаний которых перпендикулярна плоскости падения; в преломленном луче этих волн, соответственно, меньше).

Примечания

1. Окна Брюстера в лазерах. В газовых лазерах активное вещество (аргон, смесь гелия и неона, двуокись углерода – в зависимости от типа лазера) помещается в стеклянную трубку с плоскопараллельными торцевыми окнами. Трубка находится между зеркалами, так что выходящий из лазера луч света многократно (~100 раз) проходит через окна трубки с активным веществом. Если окна трубки сделать перпендикулярными к проходящему пучку света (см. рис.77,а), то при каждом прохождении окна будет теряться на отражение ~ 8% интенсивности падающего луча, а после 100 прохождений исходный пучок ослабится приблизительно в 3000 раз, что совершенно недопустимо для нормального функционирования лазера.

Выход из этой, на первый взгляд, тупиковой ситуации состоит в использовании окон, наклоненных по отношению к пучку проходящего света на угол Брюстера (см. рис.77,б). В результате многократного прохождения через трубку с такими окнами волны, плоскость колебаний которых параллельна поверхностям окон, практически полностью потеряются из-за отражений, тогда как волны, поляризованные в перпендикулярной плоскости, пройдут через оптическую систему сколько угодно раз без потерь на отражение. В итоге интенсивность исходного пучка света уменьшится не в ~3000 раз, а всего в 2 раза, что вполне приемлемо. Именно из-за такого устройства оптической системы луч света, выходящий из газового лазера, полностью плоскополяризован.

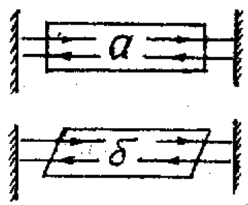


Рис.77

2. Об отражении от поверхности проводника. При отражении света от поверхности проводящего вещества (металла, полупроводника) из-за сильного поглощения в приповерхностном слое этого вещества состояние поляризации отраженного луча изменяется иначе, нежели при отражении от поверхности диэлектрика. В частности, ни при каком значении угла падения естественного света отраженный луч не будет полностью плоскополяризованным (нет угла Брюстера). Если луч падающего на поверхность проводника света плоскополяризован, то отраженный луч в общем случае оказывается поляризованным эллиптически (подробно об эллиптической поляризации света см. ниже – § 4). Характер эллиптической поляризации отраженного пучка чрезвычайно чувствителен к состоянию отражающей поверхности – присутствию на ней тонких диэлектрических пленок или даже отдельных молекул (до десятых и сотых долей монослоя). Поэтому изучение состояния эллиптической поляризации отраженного от поверхности проводников света (т.н. "эллипсометрия") достаточно широко используется для измерения параметров (толщины, показателя преломления) тонких диэлектрических (в частности, окисных) пленок, нанесенных на поверхности металлов или полупроводников и для исследования адсорбционных процессов или химических реакций, происходящих на этих поверхностях.

§ 3. Поляризация света при двойном лучепреломлении

Явление двойного лучепреломления состоит в раздвоении светового луча при прохождении через анизотропное вещество (кристалл, анизотропный полимер и т.п.).

В качестве примера рассмотрим прохождение светового луча через кристалл, расположение атомов в решетке которого показано на рис.78. В этом кристалле среднее расстояние между атомами вдоль одной оси (z на рисунке) больше, чем в перпендикулярных направлениях. Очевидно, что поляризация этого диэлектрического кристалла под действием электрического поля будет происходить по разным направлениям неодинаково. В частности, если смещение электронных оболочек атомов при приложении электрического поля вдоль оси z больше, чем в поперечном направлении, то диэлектрическая

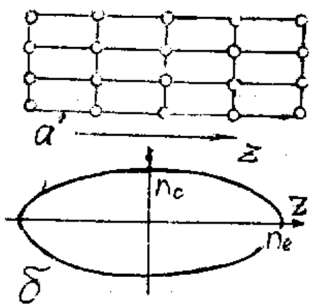


Рис.78

проницаемость ε и показатель преломления по оси z ($n=\sqrt{\varepsilon}$) также максимальны ($n_z \equiv n_e$) – см. рис.78,б. Будем считать, что свойства кристалла в любом перпендикулярном к оси z направлении одинаковы (в этом случае кристалл называется одноосным); соответствующие значения ε_o и n_o минимальны. В произвольных направлениях смещения электронных оболочек атомов есть результат смещения вдоль оси z и перпендикулярно этой оси и, следовательно, показатель преломления принимает некое промежуточное между n_e и n_o значение. Можно показать, что в пространстве зависимость показателя преломления от направления электрического поля изображается эллипсоидом вращения, вытянутым или сплющенным (в зависимости от типа кристалла) вдоль <u>оптической оси</u> z – см. рис.79. Кристаллы, для которых $n_e > n_o$, называются положительными (рис.79,а), $n_e < n_o$ – отрицательными (рис.79,б). Необходимо подчеркнуть, что на рис.78,б и рис.79 представлены зависимости показателя преломления от направления электрического поля (не от направления светового луча!).

Перейдем теперь к рассмотрению особенностей прохождения световых волн через одноосный кристалл (например, положительный). Сначала предположим, что световая волна, распространяющаяся по направлению ОУ, плоскополяризована (плоскость колебаний – ХОУ). Введем определение главной оптической плоскости, как плоскости, в которой лежат две прямые – оптическая ось кристалла и луч света (если, как на рис.80, оптическая ось кристалла OZ, а луч распространяется по оси ОУ, то главная оптическая плоскость – YOZ). Поэтому можно сказать, что плоскость колебаний рассматриваемой волны перпендикулярна главной оптической плоскости. Для такой волны показатель преломления равен n_o, а скорость распространения – v_o. Из рис.80 видно, что величины показателя преломления и скорости распространения будут такими же для любого светового луча, плоскость колебаний которого перпендикулярна главной оптической плоскости кристалла. Такой луч

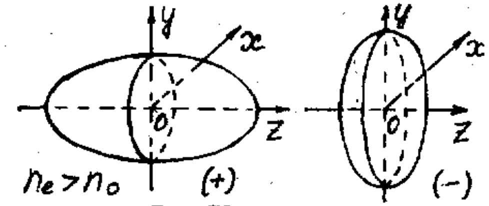


Рис.79

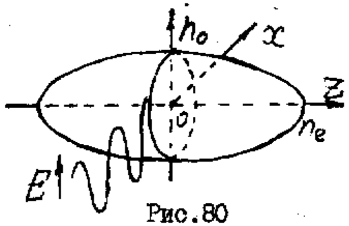


Рис.80

будет распространяться по любому направлению с одной и той же скоростью, равной V_o, и, поскольку это обычное поведение светового луча, к которому мы привыкли, когда имели дело с однородными и изотропными средами, такой луч принято называть **о б ы к н о в е н н ы м**. Таким образом, обыкновенный луч – это световой луч, плоскость колебаний которого перпендикулярна главной оптической плоскости одноосного кристалла.

Н е о б ы к н о в е н н ы м принято называть любой луч света, плоскость колебаний которого параллельна главной оптической плоскости. Почему он так называется, ясно из рис.8I, на котором показано сечение рис.80 плоскостью XOZ. Проходящий через кристалл луч света ОА лежит в плоскости чертежа, как и оптическая ось OZ, поэтому главная оптическая плоскость кристалла в данном случае совпадает с плоскостью чертежа (XOZ). Будем считать, что вектор $\vec{E}$ луча ОА также колеблется в плоскости XOZ.

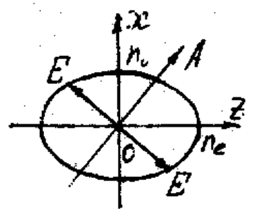


Рис.8I

Изменяя мысленно направление луча ОА, приходим к выводу, что показатель преломления (и, следовательно, скорость распространения) такого луча зависит от направления распространения. В частности, если волна распространяется вдоль оптической оси OZ, показатель преломления минимален и равен n_o, а скорость максимальна – c/n_o; если направление луча – ось OX, то показатель преломления максимален и равен n_e, а скорость распространения минимальна ($V_e = c/n_e$). Для произвольного направления луча ОА величины n и $V = c/n$ принимают промежуточные между n_o, n_e и V_o, V_e значения.

При произвольной взаимной ориентации плоскости колебаний светового луча и главной оптической плоскости в кристалле будут возбуждаться колебания электронных оболочек атомов как в главной оптической плоскости, так и перпендикулярно к ней. Поскольку соответствующие возмущения распространяются с разными скоростями, в кристалле автоматически произойдет разделение луча света на два – обыкновенный и необыкновенный; эти лучи плоскополяризованы во взаимно перпендикулярных плоскостях. То же самое произойдет, если на кристалл направить луч естественного света – совокупность волн, поляризованных в различных плоскостях; каждая такая волна в результате прохождения через кристалл разделится на две: поляризованную в главной оптической плоскости и перпендикулярно ей.

Есть только одно направление, распространяясь по которому, луч света ведет себя точно также, как в однородном и изотропном диэлектрике – вдоль оптической оси. В этом случае невозможно выделить единственную главную оптическую плоскость, нет разделения луча на обыкновенный и необыкновенный (можно сказать, что луч является обыкновенным).

Если представить гипотетически, что в объеме одноосного кристалла находится точечный источник естественного света, то в результате разделения волн на обыкновенные и необыкновенные (распространяющиеся с разной скоростью) картина волновых поверхностей будет более сложной, чем для изотропного вещества. Волновые поверхности для обыкновенных волн будут иметь привычную сферическую форму, тогда как волновые поверхности необыкновенных волн – эллипсоиды вращения, ось которых совпадает с оптической осью кристалла. Общий вид волновых поверхностей обыкновенных и необыкновенных волн показан на рис.82 (а – положительный кристалл, б – отрицательный кристалл). Можно утверждать также, что на рис.82 показаны зависимости скорости распространения обыкновенного и необыкновенного лучей от направления распространения волн.

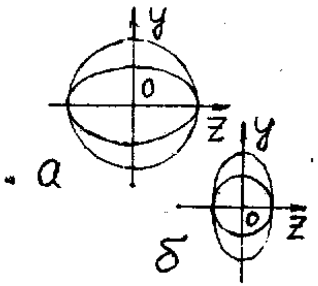


Рис.82

Зная вид этих зависимостей, легко с помощью построения Гюйгенса найти ход обыкновенного и необыкновенного лучей в кристалле. В качестве примера определим направления распространения лучей в положительном кристалле, на поверхность которого по нормали к ней падает параллельный пучок естественного света – см. рис.83. Будем предполагать, что оптическая ось кристалла наклонена по отношению к нормали на некоторый угол β. Преломленные волны есть результат сложения волн от элементарных излучателей, расположенных на поверхности кристалла. Поскольку все эти излучатели начинают возбуждаться падающей волной в один и тот же момент времени (фронт падающей волны совпадает с поверхностью кристалла), волновые поверхности для элементарных излучателей – абсолютно идентичные сферы (обыкновенные волны) или эллипсоиды вращения (необыкновенные волны).

Результирующие волновые поверхности для обыкновенного и необыкновенного лучей получаем, проводя касательные к волновым поверхностям элементарных излучателей – это плоскости, параллельные поверхности кристалла. Необходимо, однако, иметь в виду, что направление луча – это направление распространения энергии; найти его можно, соединяя элементарный излучатель (например, 0 на рис.83)

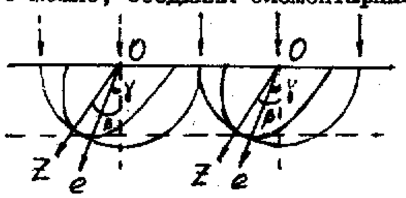


Рис.83

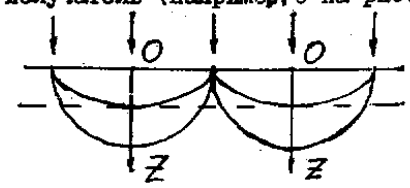


Рис.84

с точкой касания волновой поверхности этого излучателя. Для обыкновенного луча получаем тривиальный результат – этот луч, в полном соответствии с обычным законом преломления, распространяется по нормали к поверхности кристалла. Необыкновенный же луч, вопреки классическому закону преломления, отклоняется от нормали на угол γ. Таким образом, обыкновенный и необыкновенный лучи в рассматриваемом случае разделяются пространственно – из кристалла выйдут два луча, поляризованные во взаимно перпендикулярных плоскостях.

Построением легко показать, что при произвольной величине угла падения на двоякопреломляющий кристалл необыкновенный луч в общем случае не лежит в плоскости падения, что также не согласуется с обычным законом преломления.

§ 4. Эллиптическая и круговая (циркулярная) поляризация света

Пусть луч плоскополяризованного света падает по нормали на плоскопараллельную пластинку толщиной h, вырезанную из одноосного положительного кристалла так, что его оптическая ось параллельна поверхностям пластинки. Из построения Гюйгенса следует, что в этом случае обыкновенный и необыкновенный лучи распространяются в пластинке по одному и тому же направлению – по нормали к ней (см. рис.84), но с разными скоростями. Из-за того, что скорости обыкновенного и необыкновенного лучей отличаются (V_o и V_e), в результате прохождения пластинки между этими лучами возникнет оптическая разность хода $\Delta = h\,(n_e - n_o)$. Соответственно, после прохождения пластинки между колебаниями векторов E обыкновенного и необыкновенного лучей "набежит" разность фаз

$$\Delta\varphi = 2\pi\Delta/\lambda_o . \qquad (5.13)$$

На рис.85,а показана схема опыта (луч распространяется по оси x, оптическая ось кристалла – ось z); на рис.85,б тот же опыт иллюстрируется трехмерным изображением, на котором видна также плоскость колебаний вектора напряженности электрического

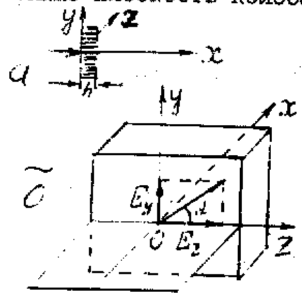


Рис.85

поля в падающем луче (амплитуда напряженности – E_0). Как следует из рисунка, падающий на пластинку луч света будет возбуждать в ней обыкновенную волну (в которой вектор $\bar{E}$ колеблется вдоль оси y) и необыкновенную (вектор $\bar{E}$ колеблется по оси z). На передней поверхности кристаллической пластинки ($x = 0$)

$$E_y(0) = E_{y0}\cos\omega t ;$$

$$E_z(0) = E_{z0}\cos\omega t . \qquad (5.14)$$

На задней грани пластинки, учитывая (5.13), можно записать:

$$E_y(h) = E_{y0}\cos\omega t', \text{ где } t' = t - h/V_o . \qquad (5.15,а)$$

$$E_z(h) = E_{z0}\cos(\omega t' - \Delta\varphi) . \qquad (5.15,б)$$

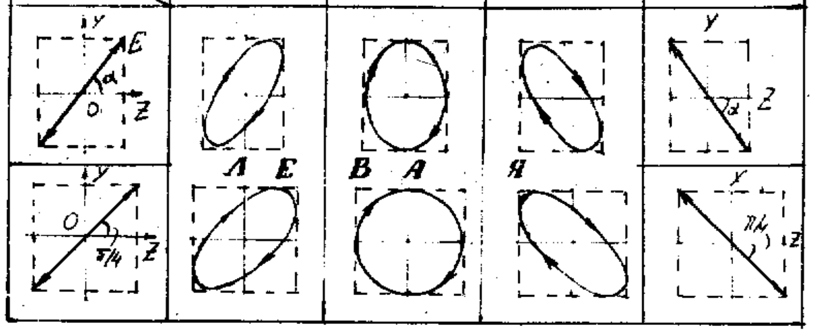
Уравнения (5.15,а) и (5.15,б) описывают колебания вектора напряженности электрического поля в обыкновенном и необыкновенном лучах, соответственно. Поскольку для положительного кристалла скорость обыкновенного луча больше, чем необыкновенного ($V_o > V_e$, $\lambda_o > \lambda_e$), необыкновенный луч проходит больший оптический путь и отстает по фазе от обыкновенного.

После прохождения пластинки результирующая волна получится сложением двух колебаний, происходящих по взаимно перпендикулярным осям (У и Z). Поскольку уравнения (5.15,а) и (5.15,б) – не что иное, как параметрическое описание эллипса, из пластинки выйдет эллиптически поляризованная волна, в которой конец вектора $\bar{E}$ описывает в плоскости УОZ эллипс. В предельных случаях эллипс "вырождается" в прямую (плоскополяризованный свет) или окружность (круговая, или циркулярная поляризация). Очевидно, в частности, что плоскополяризованный свет на выходе пластинки получится, если разность фаз (5.13) составляет целое число π ; циркулярно-поляризованный свет может получиться только при условии $E_{y0} = E_{z0}$, а также, если разность фаз (5.13) составляет нечетное число $\pi/2$.

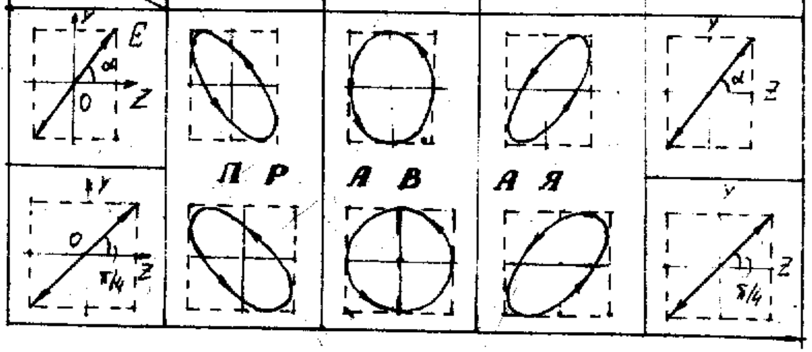
ТАБЛИЦА I

Поляризация света после прохождения двоякопреломляющей пластинки, вырезанной параллельно оптической оси (ось z). Луч света распространяется по оси x (за чертеж). Оптическая разность хода между обыкновенным и необыкновенным лучами на выходе из пластинки $-\Delta$, соответствующая разность фаз $-\Delta\varphi$; λ_0 - длина световой волны в вакууме.

Δ	0	$\lambda_0/8$	$\lambda_0/4$	$3\lambda_0/8$	$\lambda_0/2$
$\Delta\varphi$	0	$\pi/4$	$\pi/2$	$3\pi/4$	π



Δ	0	$5\lambda_0/8$	$3\lambda_0/4$	$7\lambda_0/8$	λ_0
$\Delta\varphi$	0	$5\pi/4$	$3\pi/2$	$7\pi/4$	2π



В таблице I показан характер поляризации света после прохождения кристаллической пластинки в зависимости от величины оптической разности хода (5.13), а также угла между плоскостью колебаний падающего луча и главной оптической плоскостью (α). Соответствующие различным величинам Δ фигуры легко получить, задавая в соотношениях (5.15,а) и (5.15,б) несколько последовательных значений $\omega t'$ (например, 0, $\pi/2$, π , $3\pi/2$, 2π). При этом окажется, что, в зависимости от оптической разности хода между обыкновенным и необыкновенным лучом Δ , направление обхода по эллипсу может быть разным. Исторически сложилась такая терминология: эллиптическая поляризация называется левой, если направление распространения луча света и направление вращения вектора $\vec{E}$ связаны правилом правого буравчика (рис.86,а), в противном случае поляризация называется правой (рис.86,б). На рисунках, показанных в табл.I, луч света распространяется за чертеж; поэтому величинам $\Delta = \lambda_0/8$, $\lambda_0/4$ и $3\lambda_0/8$ будет соответствовать состояние левой эллиптической (или круговой) поляризации выходящего из кристаллической пластинки света; величины $\Delta = 5\lambda_0/8$, $3\lambda_0/4$, $7\lambda_0/8$ - состояние правой поляризации.

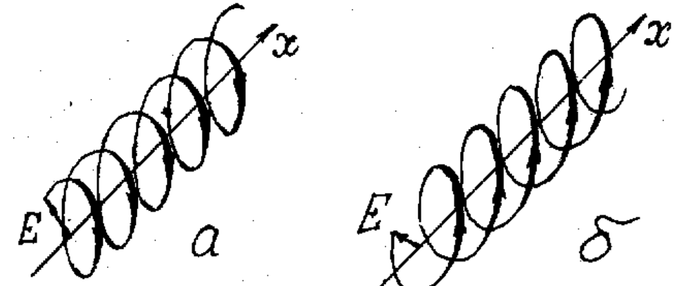


Рис.86

Кристаллические пластинки, создающие оптическую разность хода между обыкновенным и необыкновенным лучом $\Delta = (m + 1/2)$, называются пластинками в полволны (здесь $m = 0, 1, 2, \ldots$). Такие пластинки поворачивают плоскость поляризации луча света на угол 2α (симметрично относительно главной оптической плоскости). Если плоскость поляризации падающего луча составляет угол $\alpha = \pi/4$ с главной оптической плоскостью, пластинка в $\lambda_0/2$ осуществляет поворот плоскости поляризации на $\pi/2$ (плоскость поляризации выходящего из пластинки луча света перпендикулярна плоскости поляризации падающего луча).

$\Delta = \left(\frac{m}{2} + \frac{1}{4}\right)\lambda_0$

Кристаллические пластинки, толщина которых соответствует оптической разности хода между обыкновенным и необыкновенным лучом $\Delta = (m + 1/4)\lambda_0$ (где $m = 0, 1, 2, \ldots$), называются пластинками в четверть волны. Такие пластинки преобразуют плоскополяризованный свет в эллиптически поляризованный, причем ориентация эллипса заранее известна – одна из его осей направлена вдоль оптической оси пластинки, а другая – перпендикулярна ей (см. табл.I). Это свойство четвертьволновых пластинок используется для того, чтобы отличить эллиптически поляризованный свет от частично плоскополяризованного (смеси естественного и плоскополяризованного).

Если использовать для анализа состояния поляризации луча света только поляроид П и регистрирующее устройство Р (в простейшем случае – экран) – см. рис.87,а, то различить эллиптически поляризованный и частично плоскополяризованный свет невозможно. В обоих случаях при вращении главной плоскости поляроида регистрирующее устройство зафиксирует плавное изменение интенсивности света от некоторого максимального до минимального (отличного от нуля) значения. Если, однако, перед поляроидом П расположить четвертьволновую пластинку (K), ориентировав ее оптическую ось вдоль главного направления поляроида, соответствующего максимуму (или минимуму) интенсивности света в предыдущем опыте, то если на пластинку падает эллиптически поляризованный свет, после прохождения пластинки $\lambda_0/4$ он преобразуется в плоскополяризованный. При вращении главной плоскости поляроида П регистрирующий прибор будет отмечать минимальную интенсивность света, равную нулю. Этого никогда не произойдет, если падающий на пластинку K и поляроид луч света частично плоскополяризован.

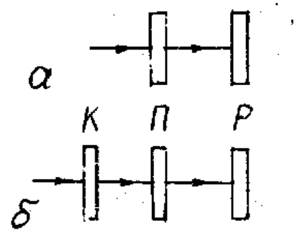


Рис.87

Аналогичным образом можно отличить с помощью четвертьволновой пластинки свет, поляризованный по кругу, и естественный свет. В этом случае в эксперименте, показанном на рис.87,б, оптическую ось кристаллической пластинки можно ориентировать произвольно – при любом положении оси циркулярно поляризованный свет будет преобразован пластинкой $\lambda_0/4$ в плоскополяризованный. Изменяя ориентацию главной плоскости поляроида, будем регистрировать прибором Р изменение интенсивности света от максимального значения до нуля. При пропускании через пластинку

$\lambda_0/4$ естественного света луч не станет плоскополяризованным, поэтому регистрирующий прибор ни при каком положении главной плоскости поляроида П не зарегистрирует нулевую интенсивность.

Обсудим теперь, можно ли для получения эллиптически (или циркулярно) поляризованного света использовать немонохроматический пучок света. Пусть в падающем на кристаллическую пластинку луче присутствуют волны разных частот в диапазоне от ω до $\omega + \Delta\omega$ (соответствующие длины волн в вакууме – от λ_0 до $\lambda_0 + \Delta\lambda_0$). Для формирования на выходе из пластинки эллиптически поляризованного света необходимо, чтобы колебания напряженности электрического поля по осям Y и Z (см. рис.85) были скоррелированными по фазе (т.е. когерентными). Очевидно, что когерентность обыкновенного и необыкновенного лучей сохранится при выполнении условия:

$$\Delta/\lambda_0 < N_K, \quad \Delta < \ell_K = N_K \lambda_0, \qquad (5.16)$$

где $\Delta = h(n_e - n_o)$ – оптическая разность хода обыкновенного и необыкновенного лучей; $N_K = \omega/\Delta\omega = \lambda_0/\Delta\lambda_0$ – число когерентных колебаний (см. стр.40); ℓ_K – длина когерентности. Из соотношения (5.16) следует, что толщина кристаллической пластинки, вырезанной параллельно оптической оси, должна удовлетворять неравенству:

$$h < \ell_K/(n_e - n_o). \qquad (5.16,а)$$

Необходимо подчеркнуть, что условие формирования эллиптически поляризованного света (5.16,а) значительно мягче, чем условие сохранения когерентности лучей, отраженных от двух поверхностей той же кристаллической пластинки ($2hn < \ell_K$), поскольку обычно $|n_e - n_o| \ll n$. Рассмотрим в качестве примера прохождение красного света ($\lambda_0 = 0{,}687$ мкм; $\Delta\lambda_0 \simeq 0{,}069$ мкм) через кварцевую пластинку ($n_o = 1{,}54$; $n_e = 1{,}55$) толщиной h. Учитывая, что в данном случае $N_K = \lambda_0/\Delta\lambda_0 \simeq 10$, можно сделать вывод, что интерференцию волн, отраженных от двух поверхностей кварцевой пластинки, можно наблюдать, если толщина пластинки не более 2,2 мкм; в то же время эллиптически поляризованные световые волны можно получать с помощью кварцевой пластины толщиной $h \lesssim 690$ мкм $\simeq 0{,}69$ мм.

В заключение этого параграфа обсудим характер поляризации луча естественного света после прохождения через кристаллическую пластинку. Так как естественный свет – это совокупность плоскополяризованных в различных плоскостях волн, каждая такая волна при выполнении условия (5.16,а) превратится в эллиптически-поляризованную, но форма и ориентация эллипсов для разных волн, составляющих луч естественного света, будет разной (см. рис.88). В итоге после кристаллической пластинки мы будем иметь также естественный свет, но иной "внутренней" структуры (вместо совокупности плоскополяризованных волн - набор эллиптически поляризованных волн).

Рис.88

§ 5. Интерференция поляризованного света

Как было показано выше, эллиптически поляризованные световые волны возникают в результате наложения когерентных волн, поляризованных во взаимно перпендикулярных плоскостях. Однако, несмотря на то, что в этом случае происходит наложение когерентных колебаний, никакой интерференции волн нет. Для доказательства этого сравним интенсивности световых волн, падающих на кристаллическую пластинку, и выходящих из нее. На входе пластинки $I_0 \sim \langle E^2 \rangle = \langle E_y^2 \rangle + \langle E_z^2 \rangle = E_{0y}^2 \langle \cos^2 \omega t \rangle + E_{0z}^2 \langle \cos^2 \omega t \rangle = E_{0y}^2/2 + E_{0z}^2/2$, а на выходе $I_1 \sim E_{0y}^2 \langle \cos^2 \omega t' \rangle + E_{0z}^2 \langle \cos^2 \omega t' \rangle = E_{0y}^2/2 + E_{0z}^2/2 = I_0$. Получаем, что интенсивность световой волны до прохождения пластинки точно равна интенсивности после пластинки, независимо от взаимной ориентации плоскости поляризации падающего на пластинку света и оптической оси кристаллической пластинки. Поскольку нет основного признака интерференции - перераспределения энергии волн в пространстве - утверждение об отсутствии интерференции ортогональных колебаний доказано.

Для того, чтобы интерференция выходящих из кристалла обыкновенного и необыкновенного лучей стала возможной, несколько усложним эксперимент - см. рис.89. После кристаллической пластинки поместим еще один поляроид $П_2$, который позволит нам выделить из обоих лучей составляющие с одинаковой плоскостью колебаний; а такие волны уже могут интерферировать. Необходимо иметь в виду, что интерференционные эффекты могут наблюдаться только в тех случаях, когда в луче света, прошедшем показанную на рис.89 систему, присутствуют компонен-

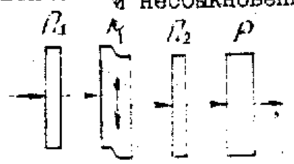


Рис.89

ты от обыкновенных и необыкновенных волн*. В частности, интерференционные эффекты будут отсутствовать, если главные плоскости поляроидов $П_I$ или $П_2$ либо совпадают с главной оптической плоскостью кристалла, либо перпендикулярны ей (после поляроида $П_2$ луч света будет состоять только из необыкновенных либо только обыкновенных волн). При всех других взаимных ориентациях главных плоскостей поляроидов $П_I$, $П_2$ и главной оптической плоскости кристалла, в луче света, падающем на регистрирующее устройство P, будет происходить усиление или ослабление колебаний светового вектора в плоскости $П_2$ - т.е. будет регистрироваться интерференция поляризованных волн. Наиболее типичны два эффекта такого рода.

I. Окрашивание кристаллических пластинок.

Пусть на прозрачную двоякопреломляющую пластинку, вырезанную параллельно оптической оси Z, падает по нормали параллельный пучок белого света (см. рис.89). Для того, чтобы интерференция поляризованных лучей была выражена наиболее отчетливо, целесообразно установить поляроид $П_I$ таким образом, чтобы амплитуды обыкновенного и необыкновенного лучей в кристалле были бы одинаковыми (угол между главной плоскостью поляроида $П_I$ и главной оптической плоскостью кристалла должен быть равным $\pi/4$). После выхода из пластинки пучок света будет состоять из эллиптически поляризованных лучей, причем для разных длин волн λ_0 разности фаз между обыкновенными и необыкновенными волнами $\Delta\varphi = 2\pi\Delta/\lambda_0$ будут отличаться (см. табл.I). Следовательно, ориентация и форма эллипсов, соответствующих волнам разных длин, будут различаться также (для иллюстрации на рис.90 показаны два таких эллипса, соответствующих волнам $\lambda_0^{(1)}$ и $\lambda_0^{(2)}$; луч света распространяется в перпендикулярном к чертежу направлении). Очевидно, что после прохождения поляроида $П_2$, главная плоскость которого также показана на рис.90, относительное содержание волн с длиной $\lambda_0^{(1)}$ в пучке света будет больше, чем волн с длиной $\lambda_0^{(2)}$ (по сравнению с падающим на кристаллическую пластинку световым пучком). Это означает, что в результате интерферен-

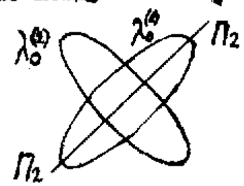


Рис.90

* Строго говоря, термин "обыкновенный" и "необыкновенный" применимы , только когда луч распространяется в кристалле.

ции поляризованных лучей произошло усиление волн с длиной $\lambda_0^{(1)}$ и ослабление – $\lambda_0^{(2)}$. Если толщина кристаллической пластинки всюду одинакова, то при наблюдении через поляроид $П_2$ пластинка будет казаться окрашенной в цвет, соответствующий $\lambda_0^{(1)}$. При повороте главной плоскости поляроида $П_2$ на $\pi/2$ вместо усиления волн с длиной $\lambda_0^{(1)}$ произойдет их ослабление и кристаллическая пластинка окрасится в дополнительный цвет (например, из синей превратится в оранжевую).

Если пластина неоднородна по толщине, то все области одинаковых толщин окрасятся одинаково, и по распределению цветных полос или пятен по площади пластины можно судить о степени и характере толщинной неоднородности этой пластины. Например, если двоякопреломляющая кристаллическая пластинка имеет форму клина, то в опыте, показанном на рис.89, она окажется испещренной параллельными между собой и ребру клина цветными полосами. Чередующиеся полосы одинаковой окраски соответствуют изменению оптической разности хода между обыкновенным и необыкновенным лучами на целое число длин волн (т.е. изменению разности фаз колебаний в этих лучах на $2\pi m$, где m = I, 2, 3, ...).

2. Полосы равного наклона.

Пусть на кристаллическую пластинку, вырезанную перпендикулярно оптической оси, падает сходящийся пучок белого света (см. рис.9I). В этом случае оптическая разность хода между обыкновенными и необыкновенными волнами зависит только от угла падения соответствующего луча на пластинку(α). Условия интерференции волн, падающих на пластинку под одинаковыми углами α, идентичны. Для какого-то определенного значения α наиболее выгодные условия интерференции будут реализовываться для световых волн, соответствующих вполне определенному цвету. Поэтому в опыте, показанном на рис. 9I, однородная по толщине кристаллическая пластина будет казаться покрытой концентрическими окружностями разных цветов. В центре цветной картины будет светлое или темное пятно (центральный световой луч распространяется вдоль оптической оси, поэтому необыкновенные волны в нем отсутствуют); интенсивность пятна в центре зависит от взаимного расположения главных плоскостей поляроидов $П_I$ и $П_2$.

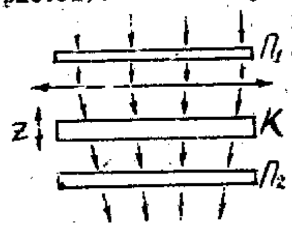


Рис.9I

Так как лучи, лежащие в главной плоскости поляроида $П_I$ (или в перпендикулярной к ней плоскости), будут возбуждать в кристалле только необыкновенные (или только обыкновенные) волны, вся цветная интерференционная картина будет пересечена бесцветным крестом, интенсивность которого такая же, как центрального пятна, находящегося в центре креста. Обычно наиболее яркая интерференционная картина получается при скрещенных поляроидах $П_I$ и $П_2$; в этом случае крест и центральное пятно – темные.

Если в качестве источника света использовать лазер, то интерференционная картина, естественно, получается одноцветной, но зато очень четкой; небольшое отклонение оптической оси кристалла от нормали к поверхности пластинки сразу проявляется в искажении центральной симметрии интерференционной картины. Поэтому поляризационно-оптический метод наблюдения кристаллов в сходящемся лазерном пучке света (т.н. "метод лазерной коноскопии") широко используется для точного определения ориентации оптической оси кристаллов. Кроме того, метод позволяет легко отличать одноосные двоякопреломляющие кристаллы от двуосных.

§ 6. Искусственная оптическая анизотропия

Все физические воздействия, способные ориентировать структурные элементы первоначально изотропного вещества, могут вызывать возникновение искусственной оптической анизотропии. Остановимся кратко на основных способах формирования искусственной оптической анизотропии.

I. Пьезооптический эффект ("фотоупругость").

Пьезооптический эффект состоит в появлении оптической анизотропии при приложении к первоначально изотропному твердому телу (в частности, полимеру) механического напряжения. Физический механизм этого эффекта ясен из рис.78,а – при растяжении или сжатии твердого тела вдоль какой-либо оси происходит увеличение или уменьшение расстояния между атомами вдоль этой оси со всеми вытекающими отсюда последствиями. Очевидно, знак $n_e - n_o$ зависит от характера воздействия (растяжение или сжатие); эффект является линейным по напряжению:

$$n_e - n_o = K_1 \sigma . \qquad (5.17)$$

Здесь $\sigma = F/S$ – механическое напряжение, K_1 – упругооптическая постоянная (иногда ее называют постоянной Брюстера). Типичные величины упругооптической постоянной для стекол лежат в пределах $K_1 = 10^{-11}-10^{-12}$ м^2/Н.

Линейная зависимость между σ и ($n_e - n_o$) выполняется только при не очень больших механических напряжениях.

Метод фотоупругости используется для изучения распределения механических напряжений в сложных деталях, для которых расчетные методы неэффективны. Для этого изготавливается модель детали из прозрачного вещества и подвергается требуемым воздействиям; в некоторых случаях удобнее нанести на поверхность детали полимерное покрытие, которое затем под нагрузкой исследуется в отраженном поляризованном свете.

2. Электрооптические эффекты

Электрооптический эффект – это появление оптической анизотропии первоначально изотропного вещества при помещении его в электрическое поле. Наблюдаются электрооптические эффекты двух типов: линейный и квадратичный.

а. Эффект Поккельса – линейный электрооптический эффект, который удается наблюдать только в пьезоэлектрических кристаллах. Пьезоэлектриками называются вещества, сжатие или растяжение которых по определенным направлениям сопровождается появлением электрической поляризации (т.н. "прямой пьезоэффект") и наоборот, приложение электрического поля вызывает растяжение или сжатие кристалла по направлению поля ("обратный пьезоэффект"). Поскольку связь между деформацией и напряженностью электрического поля для пьезоэлектриков линейна, по аналогии с упругооптическим эффектом имеем:

$$n_e - n_o = K_2 E, \qquad (5.18)$$

где Е – напряженность электрического поля, K_2 – постоянная Поккельса. Для типичного пьезоэлектрика – ниобата лития $LiNbO_3$ – величина постоянной Поккельса $K_2 = 3{,}7\cdot 10^{-10}$ м/В.

Кроме того, для изготовления "оптических затворов" на основе эффекта Поккельса используют такие пьезоэлектрики, как дигидрофосфат калия (КДР) – KH_2PO_4 и дигидрофосфат аммония (АДР) – $NH_4H_2PO_4$.

Для того, чтобы пластинка ниобата лития толщиной порядка миллиметра выполняла роль полуволновой пластинки, необходимо приложить к ней электрическое поле $E \simeq 5\cdot 10^5$ В/м.

б. Эффект Керра – квадратичный электрооптический эффект. Эффект Керра наблюдается в жидкостях, стеклах, а также кристаллических веществах (не в пьезоэлектриках!). В результате приложения к этим веществам электрического поля появляется оптическая анизотропия (оптическая ось направлена вдоль поля), причем различие между показателями преломления обыкновенного и необыкновенного лучей квадратично зависит от величины поля

$$n_e - n_o = K_3 E^2. \qquad (5.19)$$

Величина постоянной Керра для нитробензола, например, равна $K_3 = 10^{-18}$ м^2/В^2. В электрическом поле $E = 10^6$ В/м разность фаз между обыкновенным и необыкновенным лучами достигнет π ("пластинка" $\lambda/2$), если толщина слоя нитробензола h = 20 см.

Физическая причина эффекта Керра состоит в ориентации структурных элементов вещества (например, молекул нитробензола) в электрическом поле, либо в искажении электронных оболочек молекул или атомов в электрическом поле. В первом случае эффект Керра называется ориентационным, он может наблюдаться только в веществах, состоящих из дипольных молекул; эффект Керра второго типа ("поляризационный") характерен для веществ, молекулы или атомы которых первоначально не обладают дипольными моментами, но достаточно сильно поляризуются в электрическом поле.

Благодаря квадратичности эффекта Керра переменное электрическое поле достаточно мощного лазерного излучения будет вызывать в этом веществе появление оптической анизотропии, что легко обнаружить, пропуская луч света через облучаемое лазером вещество. Такой эффект Керра называют "оптическим". Оптический эффект Керра – типичный пример нарушения принципа суперпозиции; в этом случае волна лазерного излучения изменяет свойства среды и таким образом влияет на распространение в этой среде другой световой волны.

На базе эффектов Поккельса и Керра создают быстродействующие оптические затворы, которые находят широкое применение в науке и технике. Принцип устройства такого затвора иллюстрируется рис.92. Между поляроидами $П_1$ и $П_2$, главные плоскости которых взаимно перпендикулярны, помещается ячейка Поккельса или Керра. Направление электрического поля в ячейке составляет угол $\pi/4$ с главными плоскостями $П_1$ и $П_2$ (рис.92,б). Величина напряженности электрического поля подбирается такой, чтобы на длине ячейки набиралась оптическая разность хода между обыкновенным и необыкновенным лучами, равная $\lambda/2$. Тогда при подаче электрического поля на ячейку плоскость колебаний падающего на нее луча света повернется на $\pi/2$ и вышедший из ячейки луч пройдет через поляроид $П_2$. В отсутствии электрического поля затвор "закрыт" - свет через него не проходит. Очевидно, что затворы на базе эффекта Поккельса можно использовать для модуляции светового потока - т.е. для передачи информации оптическим способом (ячейки Керра для этого менее пригодны из-за нелинейной связи между $n_e - n_o$ и напряженностью поля, что является причиной искажения сигнала). Максимальная частота модуляции сигнала с помощью ячейки Поккельса порядка 10^{13} Гц, что позволяет реализовать огромную плотность передачи информации. Быстродействие затворов Керра, основанных на поляризационном эффекте, такого же порядка, для ориентационного эффекта Керра "время срабатывания" на 4-5 порядков больше (ориентация молекул - достаточно инерционный процесс).

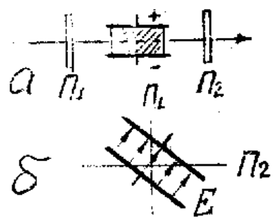


Рис.92

3. Магнитооптический эффект (эффект Коттона-Мутона)

Эффект Коттона-Мутона - это "магнитный аналог" эффекта Керра. Объяснение этого эффекта аналогично изложенному выше объяснению эффекта Керра; величина возникающей в магнитном поле оптической анизотропии вещества квадратично зависит от индукции магнитного поля:

$$n_e - n_o = K_4 B^2 . \qquad (5.20)$$

Постоянная Коттона-Мутона обычно очень мала (для жидкостей $K_4 = 10^{-9}-10^{-10}$ Тл$^{-2}$); наибольшие величины $K_4 = 10^{-6}-10^{-7}$ Тл$^{-2}$ зарегистрированы для некоторых коллоидных растворов и жидких кристаллов, однако, даже для этих веществ в достаточно сильных магнитных полях ~ 1 Тл на пути $h = 1$ см достигается разность фаз между обыкновенными и необыкновенными волнами всего в несколько градусов. Поэтому практических применений эффект Коттона-Мутона пока не нашел; тем не менее, его можно использовать в чисто научных целях для изучения магнитных свойств и структуры молекул, а также их комплексов.

В заключение отметим, что все постоянные K_1-K_4 в соотношениях (5.17)-(5.20) могут быть, в зависимости от типа вещества, как положительными, так и отрицательными. Кроме того, для явления искусственной анизотропии характерна дисперсия - т.е. зависимость величин постоянных $K_1 + K_4$ от длины волны света.

§ 7. Оптическая активность

При прохождении плоскополяризованного света через некоторые вещества (называемые оптически-активными) происходит постепенный поворот плоскости колебаний световой волны. Это явление получило название оптической активности.

Ряд веществ проявляют оптическую активность в любом агрегатном состоянии - твердом, жидком и газообразном. Обнаружено, что эти вещества состоят из молекул, не имеющих ни центра, ни плоскости симметрии. Особенно это характерно для органических молекул, содержащих атом углерода, связанный с четырьмя разными заместителями. Типичным представителем этого класса веществ является молочная кислота, молекула которой $C_3H_6O_3$ не имеет ни одного элемента симметрии. Для молекул такого типа характерно существование двух форм ("изомеров"), пространственно несовместимых друг с другом любыми мыслимыми поворотами и перемещениями. Отличаются они друг от друга, как правая и левая рука, или как предмет неправильной формы от своего изображения в зеркале. Такие изомеры называются "зеркальными" или, что более принято, "оптическими", поскольку соответствующие вещества вращают плоскость поляризации света в разные стороны. Два оптических изомера молекулы молочной кислоты показаны на рис.93,а. В химии их принято изображать при помощи проекционных формул Фишера (см. рис.93,б), в которых верхний и нижний заместители (COOH, CH_3) следует представлять себе расположенными за плоскостью чертежа, боковые же заместители (H, OH) - перед плоскостью рисунка. Считается, что в центре проекционной формулы находится атом углерода, который лежит в плоскости чертежа.

Правовращающие оптические изомеры принято называть положительными (они обозначаются знаком "плюс" перед формулой), левовращающие - отрицательными (перед химической формулой в этом случае ставится знак "минус"). Смесь оптических изомеров в равных количествах (т.н. "рацемат") не проявляет оптической актив-

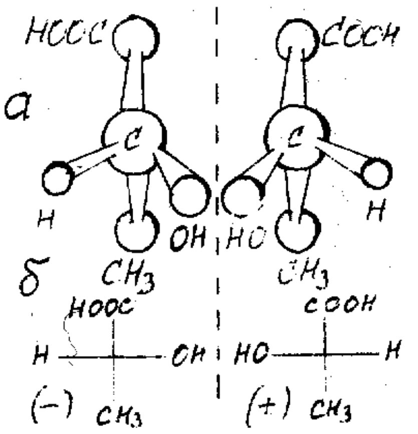


Рис.93

ности. Выделить оптические изомеры из рацемата можно химическим путем - в реакции с каким-либо оптически-активным реагентом; либо биохимическим способом - используя то обстоятельство, что микроорганизмы (например, бактерии) перерабатывают только один изомер, оставляя другой абсолютно нетронутым.

Поскольку оптическая активность изомеров определяется структурой молекулы, растворы оптически-активных веществ этого типа в оптически-неактивных растворителях также проявляют оптическую активность; причем угол поворота плоскости поляризации света в растворе оказывается пропорциональным концентрации раствора C и длине пути, пройденного лучом света в растворе ℓ :

$$\alpha = [\alpha]\,\ell\, C. \tag{5.21}$$

Соотношение (5.21) называется законом Био; величина $[\alpha]$ - удельной оптической активностью. Обычно в справочниках величина $[\alpha]$ дается в градусах, если ℓ измеряется в дециметрах, а концентрация - в граммах оптически-активного вещества на объем раствора в см^3. Например, для молочной кислоты величина $[\alpha]$ = = 3,82^o (положительна для правовращающей и отрицательна для левовращающей формы). Для тростникового сахара (сахарозы $C_{12}H_{22}O_{11}$) $[\alpha]$ = +66,4^o; для виноградного сахара (глюкозы $C_6H_{12}O_6$) $[\alpha]$ = +52,6^o; для фруктового сахара (фруктозы $C_6H_{12}O_6$) $[\alpha]$ = -91,9^o (левовращающий).

Удельная оптическая активность (иногда для краткости называемая удельным вращением) зависит от длины волны света. Обычно величина удельного вращения определяется для желтой линии натрия, тогда она обозначается $[\alpha]^D$ (выше приведены именно значения $[\alpha]^D$).

Методы исследования оптически-активных веществ, основанные на изучении вращения плоскости поляризации (т.н. "поляриметрия") широко используются для точного определения концент-

рации этих веществ в растворах (см. соотношение (5.21)). Измерение "вращательной дисперсии" (зависимости угла вращения плоскости поляризации света от длины волны) позволяет изучать строение веществ. Наконец, оптическая активность крайне чувствительна к небольшим вариациям в строении молекул и к межмолекулярным взаимодействиям, поэтому ее исследование может предоставлять ценную информацию о природе заместителей в молекулах как органических, так и комплексных неорганических соединений. Для того, чтобы проиллюстрировать огромные возможности поляриметрии в стереохимии, на рис.94 приведены структурные формулы двух форм глюкозы - α -глюкозы и β -глюкозы. Обе эти формы правовращающие, отличие между ними состоит лишь в изменении пространственной ориентации двух связей, обозначенных на рис.94 цифрами 1 и 2. Несмотря на столь незначительную, на первый взгляд, разницу, удельная оптическая активность двух форм глюкозы отличается в шесть раз. Приведенная выше величина $[\alpha]^D$ = 52,5^o для глюкозы на самом деле получается в результате суммирования эффектов от двух

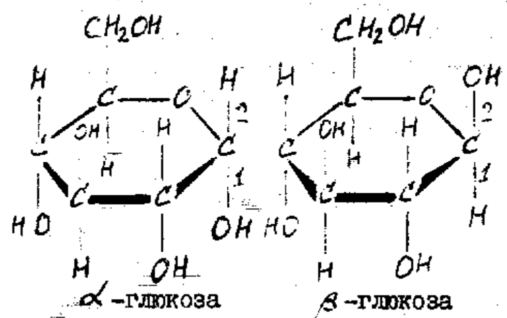


Рис.94

сосуществующих в равновесии форм - α -глюкозы с удельным вращением $[\alpha]^D$ = 112^o и β - глюкозы с удельной оптической активностью $[\alpha]^D$ = 18,7^o.

Помимо веществ, оптически-активных "на молекулярном уровне", имеется достаточно обширный класс веществ, проявляющих оптическую активность только в кристаллической форме. Например, стеклообразный кварц обычно оптически неактивен, тогда как кристаллический характеризуется значительной оптической активностью. Оптическая активность таких веществ - свойство кристалла как целого. Общее свойство оптически-активных кристаллов - отсутствие зеркальной симметрии. В случае кварца, например, структурные элементы кристаллической решетки - тетраэдры SiO_4, соединяясь между собой вершинами (атомами кислорода), образуют спиральные цепи. Подобно оптическим изомерам, существуют правои левовращающие кристаллы, которые отличаются друг от друга как предмет и его зеркальное отображение. Такие кристаллы, абсолютно идентичные по физическим свойствам, отличающиеся только направлением вращения плоскости поляризации света, принято называть оптическими антиподами. Обычно максимальная оптическая активность в кристаллах наблюдается при распространении света вдоль оптической оси.

Для кристаллических оптически-активных веществ закон Био (5.21) принимает форму:

$$\alpha = [\alpha]\,\ell . \qquad (5.22)$$

Удельное вращение для кристаллов обычно существенно больше, чем для жидких оптически-активных веществ. Например, для кварца удельное вращение изменяется в спектральном диапазоне λ = 0,76 мкм – 0,4 мкм от 12,7 град/мм до 51 град/мм (обращаем внимание, что для кристаллов удельное вращение принято рассчитывать на 1 мм пути луча, а не на 10 см, как для жидкостей). Удельная оптическая активность как кристаллов, так и жидкостей, зависит от таких внешних факторов, как температура, давление, состав растворителя.

Физический механизм явления оптической активности был предложен Френелем в 20-х годах ХУШ века. Основная идея Френеля состоит в том, что в оптически-активных веществах циркулярно-поляризованный в разных направлениях (т.е. левый и правый) свет распространяется с разными скоростями. Если учесть определенную "спиральность" кристаллов и молекул оптически-активных веществ, такое различие скоростей распространения лево- и правополяризованного света кажется вполне естественным, поскольку условия поляризации вещества зависят от того, совпадает ли направление вращения вектора E световой волны с направлением "спиральности" этого вещества.

Далее, Френель предложил рассматривать плоскополяризованную световую волну частоты ω, падающую на поверхность оптически-активного вещества, как результат наложения двух циркулярно-поляризованных в разных направлениях волн одной и той же частоты и с одинаковыми амплитудами (амплитуда каждой поляризованной по кругу волны равна половине амплитуды исходной, плоскополяризованной, волны) – см. рис.95,а. Поскольку показатели преломления правополяризованной (n_+) и левополяризованной (n_-)

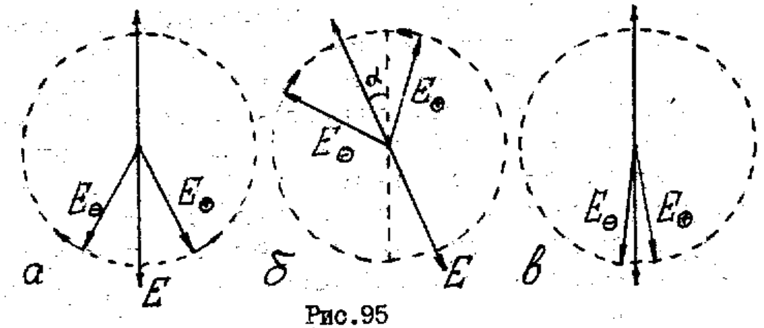


Рис.95

волн отличаются по величине, между правополяризованной и левополяризованной волнами после прохождения слоя оптически-активного вещества толщиной ℓ наберется оптическая разность хода $\Delta = \ell\,(n_+ - n_-)$. Если, например, $n_+ > n_-$, то скорость распространения левого циркулярно-поляризованного света (v_-) больше, чем правого (v_+); лево-поляризованный свет пройдет слой ℓ за меньшее время, чем правый; соответственно, вектор $E_\ominus$ за это время повернется на меньший угол – см. рис.95,б. Из рисунка видно, что в итоге плоскость колебаний выходящего из оптически-активного вещества света повернется на угол α против часовой стрелки (луч света распространяется от нас за чертеж). Такое направление вращения плоскости поляризации световых волн соответствует правовращающему (положительному) оптически-активному веществу. Для левовращающего (отрицательного) вещества $n_+ < n_-$, $v_+ > v_-$.

Если оптическая разность хода право- и лево-поляризованных волн Δ равна длине волны света в вакууме, то, как это видно из рис.95,в, плоскость поляризации световой волны после прохождения слоя вещества толщиной ℓ поворачивается на угол π (не 2π!). Следовательно, угол поворота плоскости колебаний светового вектора при произвольном значении величины Δ может быть определен по формуле:

$$\alpha = \pi\Delta/\lambda\,, \quad \Delta = \ell\,(n_+ - n_-). \qquad (5.23)$$

Положительные значения угла α соответствуют правовращающему (положительному) оптически-активному веществу.

Как и оптическую анизотропию, оптическую активность первоначально неактивного вещества можно вызвать искусственно. Для этого нужно это вещество поместить в достаточно сильное магнитное поле, а луч света направить по направлению вдоль магнитного поля (не путать с эффектом Коттона-Мутона – там световой луч должен составлять угол $\pi/2$ с магнитным полем). Возникновение искусственной оптической активности в магнитном поле называют эффектом Фарадея, поскольку именно Фарадей в середине XVIII века впервые наблюдал этот эффект. Как и в случае естественной оптической активности, угол поворота плоскости колебаний световой волны определяется длиной пройденного в магнитном поле пути ℓ и разницей показателей преломления n_+ и n_- – см. соотношение (5.23).

Как правило, если величина магнитной индукции не слишком велика, разность показателей преломления право- и левополяризованного света линейно зависит от индукции магнитного поля:

$$n_+ - n_- = k_s \ell B. \tag{5.24}$$

Постоянная k_s называется удельным магнитным вращением, или постоянной Верде по имени ученого, наиболее полно исследовавшего закономерности магнитного вращения. Знак постоянной Верде для большинства веществ положителен (правовращающие в магнитном поле вещества), лишь некоторые вещества в магнитном поле являются левовращающими ($k_s < 0$). Величина постоянной Верде зависит от длины волны света и температуры.

Магнитное вращение, по-видимому, в той или иной степени проявляют все вещества, хотя обычно оно весьма мало. Даже для тех веществ, в которых оно считается большим (например, некоторых сортов стекол) удельное вращение не превышает 10-15°, если ℓ измерять в см, а индукцию магнитного поля – в Тл. Большая величина угла магнитного вращения α регистрируется также в тонких (ℓ = 0,1 мкм) полупрозрачных для световых волн пленках ферромагнетиков (железа, кобальта, никеля). Угол поворота плоскости колебаний света в таких пленках может достигать нескольких градусов и более при помещении пленки во "внешнее" магнитное поле порядка Тл. Необходимо, однако, иметь в виду, что "внутреннее" магнитное поле в ферромагнитных материалах превышает "внешнее" в 10^3-10^5 раз (магнитная проницаемость ферромагнетиков достигает $\mu = 10^4$-10^5).

Подчеркнем, что знак угла поворота плоскости поляризации света зависит только от направления магнитного поля и не зависит от направления распространения луча света. Поэтому при

многократном отражении светового луча от зеркал и прохождении между полюсами магнита (рис.96) угол поворота плоскости колебаний увеличивается пропорционально числу прохождений. В случае естественного вращения плоскости колебаний световых волн в оптически активном веществе при обратном прохождении луча, отраженного от зеркала, плоскость колебаний возвращается в исходное положение.

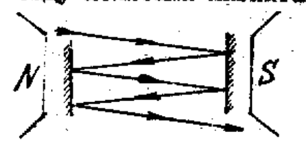


Рис.96

Иногда для анализа структуры вещества вводят величину молекулярного вращения $\Omega = k_s/\rho$, где ρ – плотность вещества в моль/м^3 (или моль/см^3). Оказывается, что при изменениях плотности и даже агрегатного состояния вещества сохраняется практически неизменной молекулярная постоянная магнитного вращения $M = 9n\Omega/(n^2 + 2)$, где n – показатель преломления вещества.

Магнитное вращение плоскости поляризации света обусловлено возникновением индуцированного кругового движения электронов в магнитном поле. В результате условия распространения волн, поляризованных по кругу, становятся зависящими от направления вращения вектора напряженности электрического поля. Поскольку направление кругового движения электронов определяется только направлением магнитного поля, знак угла вращения плоскости поляризации света не зависит от того, в какую сторону распространяется световой луч – по магнитному полю или против него.

ГЛАВА VI. ВОЛНОВЫЕ ПАКЕТЫ И ИМПУЛЬСЫ

§ I. Модулированные волны

Поскольку в гармонической волне каждый последующий период колебаний в точности повторяет предыдущий, с помощью таких волн нельзя осуществлять передачу информации. Для того, чтобы использовать волны для этой цели, нужно в процессе испускания волн изменять один из параметров, характеризующих волну – амплитуду, частоту или начальную фазу. Соответственно, существует три вида модуляции волн – амплитудная, частотная и фазовая.

При амплитудной модуляции исходная гармоническая волна (рис.97,а), называемая иногда "несущей", видоизменяется с помощью модулирующего сигнала (рис.97,б) таким образом, что амп-

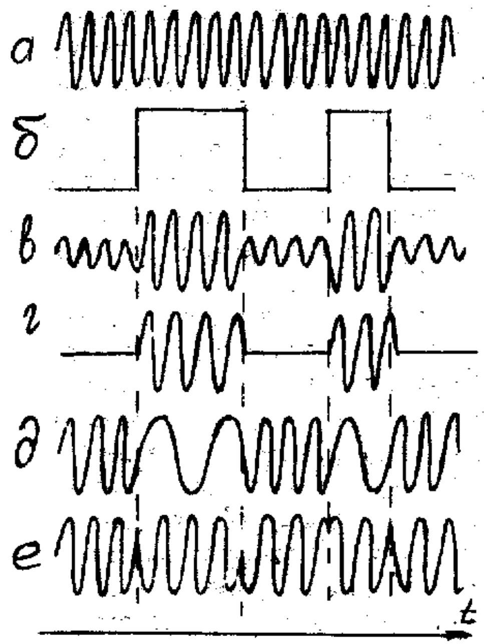


Рис.97

литуда результирующей волны повторяет модулирующий сигнал – рис.97,в. Частный случай амплитудной модуляции – испускание достаточно коротких импульсов волн несущей частоты – т.н. "радиоимпульсов" – см. рис.97,г.

В случае частотной модуляции (рис.97,д) в момент подачи модулирующего сигнала изменяется частота несущей, амплитуда волны остается неизменной.

Наконец, при фазовой модуляции в определенные моменты времени, задаваемые модулирующим сигналом, "сбивается" начальная фаза колебаний – см. рис.97,е (амплитуда и частота при этом не меняются).

Подчеркнем, что при всех способах модуляции испускаются ограниченные во времени и в пространстве "цуги" гармонических колебаний, которые не являются монохроматическими волнами (монохроматическая волна – бесконечная синусоида). Поэтому очевидно, что любой способ передачи информации с помощью волн требует использования набора монохроматических волн разных частот. В том случае, когда используется суперпозиция плоских монохроматических волн с близкими значениями частот ω и волновых векторов $\bar{k}$, принято называть такое волновое образование "волновым пакетом" или "пакетом волн".

§ 2. Характеристики волнового пакета

Рассмотрим прямоугольный волновой пакет – дискретный набор плоских монохроматических волн одинаковых амплитуд, частоты которых равномерно распределены в интервале $\omega_1 + \Delta\omega$; соответствующий диапазон волновых чисел – $k_1 + \Delta k$ (волне с частотой ω_1

соответствует волновое число k_1). Будем полагать, что всего имеется N волн, так что разница частот и волновых чисел "соседних" волн $\delta\omega = \Delta\omega/(N - 1)$ и $\delta k = \Delta k/(N - 1)$ соответственно – см. рис.98. Волна с номером n описывается соотношением:

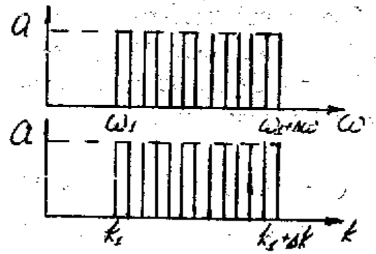


Рис.98

$$\xi_n = a\cos(\omega_n t - k_n x). \quad (6.1)$$

Здесь a – амплитуда волны (в прямоугольном пакете одна и та же для всех волн), $\omega_n = \omega_1 + (n-1)\delta\omega$; $k_n = k_1 + (n-1)\delta k$.

Наша задача – выяснить, что получится в результате суперпозиции всех волн пакета:

$$\xi = a\sum_{n=1}^{N} \cos\varphi_n, \quad \varphi_n = \omega_n t - k_n x. \quad (6.2)$$

Воспользуемся для этого методом векторных диаграмм. Пусть в некоторый момент времени вектор, изображающий амплитуду колебаний в первой волне для какой-то точки пространства, расположен горизонтально (см. вектор АВ на рис.99). В последующие моменты вектор АВ будет вращаться в плоскости рисунка против часовой стрелки с угловой скоростью ω_1. Вектор, изображающий колебания в той же точке, возбуждаемые второй волной ($\omega_2 = \omega_1 + \delta\omega$, $k_2 = k_1 + \delta k$), нужно повернуть относительно первого на величину сдвига фаз между ξ_1 и ξ_2 – $\delta\varphi = \delta\omega t - \delta k x$. Направление этого сдвига (опережение или отставание по фазе) зависит от величин $\delta\omega t$ и $\delta k x$; для определенности мы будем считать, что $\delta\varphi > 0$ (колебания ξ_2 опережают по фазе колебания ξ_1), соответственно, вектор ВС повернут относительно АВ против часовой стрелки на угол $\delta\varphi$. Суммируя аналогичным образом колебания от всех N волн, получим равносторонний многоугольник (число сторон равно N, стороны равны благодаря тому, что равны амплитуды колебаний разных частот). Опуская перпендикуляры из середин отрезков АВ, ВС, ... находим центр О окружности, в которую вписан многоугольник. Радиус этой окружности, как легко видеть из рис. 99, равен

$$R = (a/2)/\sin(\delta\varphi/2). \quad (6.3)$$

(здесь угол $\delta\varphi$ между радиусами ОА и ОВ точно равен углу между

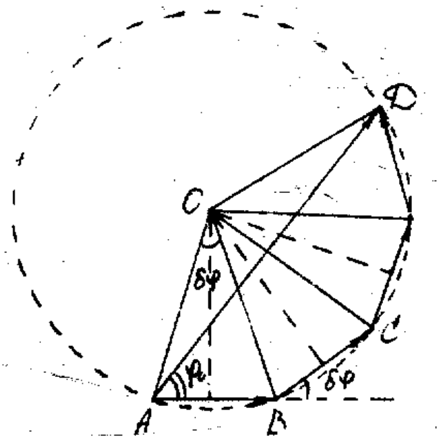


Рис.99

векторами АВ и ВС, т.к. треугольник ВОС может быть получен поворотом треугольника АОВ на угол $\delta\varphi$).

Обозначим амплитуду результирующего колебания (длину вектора АД) через А, из равнобедренного треугольника АОД получаем

$$A/2 = R\sin(N\delta\varphi/2). \quad (6.4)$$

Сопоставляя (6.3) и (6.4), получаем выражение для амплитуды результирующего колебания, пригодное для прямоугольного пакета, состоящего из любого количества

$$A = a\,\frac{\sin(N\delta\varphi/2)}{\sin(\delta\varphi/2)} \qquad (6.5)$$

Сдвиг фаз между результирующими колебаниями и колебаниями, возбуждаемыми первой волной пакета, равен углу ВАД на рис.99 (обозначим этот угол φ_0). Поскольку угол ОАВ равен $(\pi - \delta\varphi)/2$, а угол ОАД равен $(\pi - N\delta\varphi)/2$, получаем

$$\varphi_0 = \angle OAB - \angle OAD = (N-1)\delta\varphi/2 = \frac{1}{2}(N-1)(\delta\omega t - \delta k x) \quad (6.5,а)$$

Выразим теперь результирующее колебание ξ, учитывая, что первая волна описывается уравнением (6.I) с n = I, а сдвиг по фазе между ξ и ξ_1 – соотношением (6.5,а):

$$\xi = A\cos(\omega_1 t - k_1 x + \varphi_0) = A\cos(\langle\omega\rangle t - \langle k\rangle x) \quad (6.6)$$

В уравнении волны (6.6) введены средние для волнового пакета частота $\langle\omega\rangle$ и волновое число $\langle k\rangle$:

$$\langle\omega\rangle = \omega_1 + (N-1)\delta\omega/2; \quad \langle k\rangle = k_1 + (N-1)\delta k/2. \quad (6.7)$$

Существенно, что амплитуда результирующей волны A, которая описывается формулой (6.4), непостоянна как во времени, так и в пространстве, поскольку величина φ_0 зависит от t и x. Проведем анализ этой зависимости для случая, когда полное число

волн N в пакете достаточно велико ($N \gg$ I), а фазовый сдвиг между отдельными волнами – мал ($\delta\varphi \ll$ I). В этих условиях в знаменателе (6.4) синус малого угла можно заменить самим углом $\delta\varphi/2$, а в числителе – вместо $N\delta\varphi/2$ писать φ_0 (см. (6.5,а)). В итоге соотношение (6.4) переписывается в следующей форме:

$$A \simeq Na\sin\varphi_0/\varphi_0 \quad ; \quad N \gg 1. \qquad (6.8)$$

Зависимость амплитуды А при $N \gg$ I от угла φ показана на рис.I00. При φ_0 = 0 амплитуда максимальна и равна Na; физический смысл этого очевиден – при этом условии фазы всех колебаний совпадают и "ломаная" векторная диаграмма, показанная на

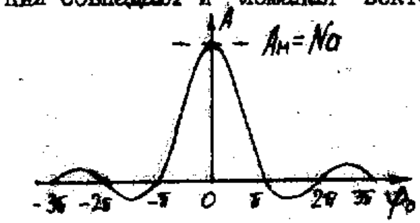


Рис.I00

рис.99, превращается в прямую линию, длина которой Na. Очевидно, что в некоторой точке пространства x_0 амплитуда результирующего колебания достигает максимального значения только в момент времени t_0, когда выполняется условие:

$$\delta\varphi = \delta\omega t_0 - \delta k x_0 = 0. \quad (6.9)$$

В другие моменты времени, из-за того, что частоты колебаний волн, составляющих пакет, неодинаковы, строгая синфазность колебаний $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_N$ нарушена и амплитуда колебаний меньше максимальной. При постепенном увеличении разности фаз между колебаниями "соседних" волн пакета $\delta\varphi$ растет также угол поворота результирующего вектора АД (см. рис.99); когда φ_0 достигает π, вектор АД изменяет направление на обратное (по сравнению с его положением при φ_0 = 0). Это соответствует изменению знака амплитуды на рис.I00 и фактически означает изменение фазы колебаний "несущей" частоты $\langle\omega\rangle$ на π. На рис. I0I показана зависимость амплитуды результирующего колебания в некоторой фиксированной точке x_0 от времени t. Максимальная амплитуда колебаний будет зарегистрирована наблюдателем, находящимся в точке x_0, в момент $t_0 = x_0\delta k/\delta\omega$. Выполнению условий $\varphi_0 = \pm\pi$ соответствуют моменты времени $(t - t_0) = \pm 2\pi/\delta\omega$. Несущая частота результирующего сигнала – $\langle\omega\rangle$ (см. соотношение (6.6)). Поскольку переносимая волной энергия пропорциональна квадрату амплитуды колебаний, практически вся энергия волнового пакета будет зарегистрирована наблюдателем в период времени от $-2\pi/\Delta\omega$ до $+2\pi/\Delta\omega$ – рис.I0I. Таким образом, наблюдатель зафиксирует импульсный сигнал на несущей частоте $\langle\omega\rangle$. Принимая условно за длительность импульса Δt половину протяженности центрального максимума, т.е. полагая, что $\Delta t = 2\pi/\Delta\omega$, получим, что длительность импульса и частотный диапазон, занимаемый волновым пакетом, связаны соотношением:

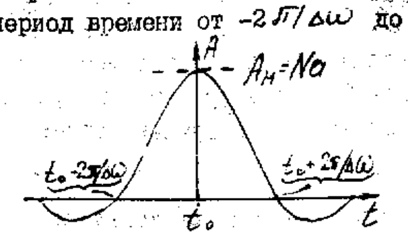


Рис.I0I

$$\Delta t \cdot \Delta\omega \simeq 2\pi \quad \text{или} \quad \Delta t \, \Delta\nu \simeq 1 \qquad (6.I0)$$

Это соотношение часто называют теоремой о ширине частотной полосы. В соответствии с этой теоремой импульсный сигнал длительностью Δt получается сложением пакета волн, частоты которых лежат в диапазоне $\Delta\omega \simeq 2\pi/\Delta t$. Чем более короткий импульс требуется получить, тем шире должен быть частотный интервал, занимаемый волновым пакетом. Одной монохроматической волне соответствует $\Delta\omega = 0$ и, следовательно, $\Delta t \to \infty$ (бесконечно большая длительность сигнала).

Заметим, что в момент времени $t = t_0$ колебания всех составляющих пакета синфазны, через время $t_k = 2\pi/\Delta\omega$ эта синфазность полностью "расстраивается". Очевидно, что время t_k – не что иное, как введенное ранее (см. гл.Ш, § 3) время когерентности.

Интересно теперь зафиксировать момент времени t_0 и сделать "мгновенную фотографию" сигнала в этот момент – см. рис. I02. Условиям $\varphi_0 = \pm\pi$ соответствуют координаты $(x - x_0) = \pm 2\pi/\Delta k$. Почти вся энергия волнового пакета сосредоточена в ограниченной области пространства. Как и ранее, принято считать пространственной протяженностью волнового пакета величину $\Delta x = 2\pi/\Delta k$. Эта величина равна половине расстояния между минимумами $(x_0 - 2\pi/\Delta k)$ и $(x_0 + 2\pi/\Delta k)$. Определенная таким образом протяженность волнового пакета Δx связана с интервалом

Рис.I02

длин волн, составляющих пакет, соотношением, являющимся другой формой теоремы о ширине частотной полосы:

$$\Delta x \cdot \Delta k \simeq 2\pi \quad \text{или} \quad \Delta x/\Delta(1/\lambda) \simeq 1 \qquad (6.II)$$

Очевидно, чем меньше протяженность волнового пакета Δx, тем шире должен быть набор длин волн, составляющих пакет. Монохроматической волне соответствует $\Delta k = 0$, следовательно, такая волна описывается бесконечно длинным цугом. Из (6.II) следует, в частности, что представление о плоской волне строго применимо только для пространственно неограниченных пучков волн. Если же размер волнового пучка (в поперечном сечении) ограничен, то это означает, что этот пучок нужно характеризовать некоторым набором волновых векторов Δk (т.е. волна не является плоской).

На мгновенной фотографии волнового пакета (рис.I02) в точке x_0 все компоненты пакета возбуждают синфазные колебания. После прохождения расстояния $\ell_k = 2\pi/\Delta k$ когерентность колебаний различных волн, составляющих пакет, нарушается. Поэтому расстояние $\ell_k = 2\pi/\Delta k = \lambda^2/\Delta\lambda$ точно равно длине когерентности, определенной ранее (см. гл.Ш, § 3).

В заключение этого параграфа отметим, что соотношение (6.8) можно использовать для количественных расчетов дифракционной картины от щели или системы щелей (решетки), понимая под N число интерферирующих пучков волн (в случае дифракционной решетки N – число щелей); необходимо при этом учитывать, что угол φ_0 приблизительно равен половине сдвига фаз между "крайними" волнами пакета (см. (6.5,а)). Для иллюстрации на рис.I03 показаны векторные диаграммы сложения колебаний компонент волнового пакета в зависимости от угла φ_0 (и, соответственно, сдвига фаз между "крайними" компонентами $N\delta\varphi = 2\varphi_0$). Сопоставляя рис.I03, рис.55 и рис.62, легко видеть эквивалентность этих рисунков, если учесть, что в случае дифракции от одной щели $N\delta\varphi = 2\pi(b \sin\varphi/\lambda)$, а при рассмотрении дополнительных максимумов и минимумов дифракционной картины от решетки $N\delta\varphi = 2\pi(Nd \sin\varphi/\lambda)$. Следует также иметь в виду, что при построении векторных диаграмм на рис.I03 и 99 предполагалось, что каждая последующая волна пакета опережает предыдущую по фазе на $\delta\varphi$, тогда как векторные диаграммы рис.55 и рис.62 построены для случая, когда каждая последующая волна отстает по фазе от предыдущей (соответственно, отличаются направления "закручивания" векторов на рис.103 и рис.55).

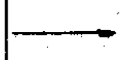
φ_0	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π	$5\pi/2$
$N\delta\varphi=2\varphi_0$	0	π	2π	3π	4π	5π
$\sin\varphi_0/\varphi_0$	I	$2/\pi$	0	$2/3\pi$	0	$2/5\pi$
векторн. диаграмма						

Рис.103

Несколько забегая вперед, отметим, что в современной физике теорема о ширине частотной полосы переходит в принцип неопределенности Гейзенберга. В квантовой механике с частицей сопоставляется волна, параметры которой определяются энергией W и импульсом р частицы: $\nu = W/h$, $\lambda = h/p$, где h – постоянная Планка. Подставляя в формулы (6.10) и (6.11) величины $\Delta\nu = \Delta W/h$ и $\Delta(1/\lambda) = \Delta p/h$, получим:

$$\Delta W \cdot \Delta t \simeq h , \quad \Delta p \cdot \Delta x \simeq h \qquad (6.12)$$

Точные формулировки принципа неопределенности в квантовой механике записываются несколько иначе:

$$\Delta W \cdot \Delta t \geq h/2\pi , \quad \Delta p \cdot \Delta x \geq h/4\pi \qquad (6.13)$$

§ 3. Распространение волновых пакетов

Анализируя условие максимума волнового пакета (6.9), легко понять, что с течением времени пакет перемещается по оси x со скоростью

$$v_r = x_0/t_0 = \delta\omega/\delta k = d\omega/dk. \qquad (6.14)$$

Именно с этой скоростью, называемой групповой скоростью волнового пакета, распространяется энергия пакета и, следовательно, информация, которую мы передаем с помощью волн.

Учитывая, что $\omega = vk$, где v – фазовая скорость волн (см. стр.), можно записать выражение для групповой скорости несколько иначе:

$$v_r = v + k\, dv/dk = v - \lambda\, dv/d\lambda . \qquad (6.15)$$

Для электромагнитных волн в вакууме (гл.II, § 5) фазовая скорость – постоянная величина ($v = c = 1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$); в этом случае групповая скорость равна фазовой. В вакууме информация может быть передана с помощью электромагнитных волн со скоростью, равной С.

Однако в большинстве случаев при распространении как электромагнитных, так и упругих волн в различных веществах фазовая скорость волн оказывается зависящей от λ. В принципе возможны три вида зависимостей $\omega(k)$ – т.н. "дисперсионных кривых" – см. рис.104. Прямая 1, проходящая через начало координат, соответствует среде, в которой $v_r = v = const$ (принято говорить в этом случае об отсутствии дисперсии волн). Кривая 2 характерна для сред, в которых

$$dv/d\lambda > 0 ; \quad v_r < v . \qquad (6.16)$$

Дисперсия волн (т.е. зависимость ω от k, v от λ) для таких сред называется нормальной.

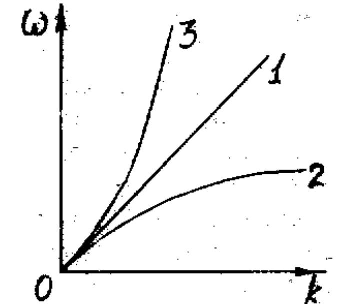


Рис.104 (кр.3).

Наконец, для веществ, в которых дисперсия волн аномальна, $dv/d\lambda < 0$; $v_r > v$.

Рассмотрим качественно характер дисперсии электромагнитных волн в диэлектрике. При прохождении электромагнитной волны через диэлектрик электрическое поле волны выступает в роли вынуждающей переменной силы, вызывающей смещение заряженных частиц (электронов и ионов). Поскольку диэлектрическая проницаемость диэлектрика определяется его способностью поляризоваться в электрическом поле, вид зависимости $\varepsilon(\omega)$ качественно должен повторять зависимость от частоты вынуждающей силы амплитуды дисперсии (см. гл.II, § 5). На рис.105 показан характер зависимостей от частоты вынуждающей силы амплитуды поглощения (а), амплитуды дисперсии (б) и диэлектрической проницаемости $\varepsilon(\omega)$ (в). Величина ε_c

равна диэлектрической проницаемости вещества в постоянном электрическом поле, при резонансной частоте ω_0 диэлектрик не поляризуется (нет смещения заряженных частиц в фазе с вынуждающей силой), поэтому ε = I. На высоких частотах заряженные частицы вообще не успевают реагировать на переменное электрическое поле, следовательно, при $\omega \to \infty$, $\varepsilon \simeq$ I. Учитывая, что фазовая скорость распространения электромагнитных волн $\upsilon = c/\sqrt{\varepsilon\mu}$, причем для большинства веществ магнитная проницаемость μ – постоянная порядка единицы, получаем

$$d\upsilon/d\lambda = (d\upsilon/d\varepsilon)(d\varepsilon/d\lambda) = -(\upsilon/2\varepsilon)(d\varepsilon/d\lambda). \quad (6.17)$$

Отсюда групповая скорость электромагнитных волн может быть записана в форме:

$$\upsilon_г = \upsilon\left(1 + \frac{\lambda}{2\varepsilon}\frac{d\varepsilon}{d\lambda}\right). \quad (6.18)$$

Из соотношения (6.18) следует, что во всем спектральном диапазоне, кроме области вблизи полосы поглощения, дисперсия электромагнитных волн нормальная (соответствующие области спектра обозначены на рис.105 цифрой I). В интервале II, соответствующей полосе поглощения электромагнитных волн в данном материале, дисперсия аномальна.

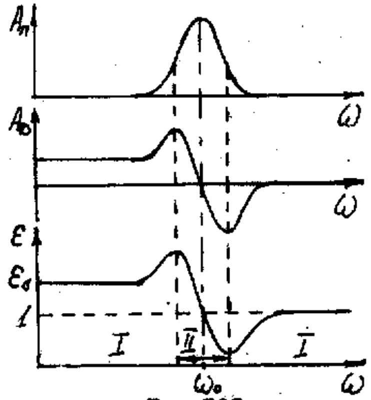


Рис.105

Обсудим теперь некоторые особенности распространения волновых пакетов в диспергирующих средах. На рис.106 показан волновой пакет в три последовательных момента времени ($t_3 > t_2 > t_1$).

Поскольку в диспергирующей среде групповая скорость (характеризующая скорость переноса вдоль оси x огибающей волнового пакета) не равна фазовой скорости волн (которая характеризует скорость перемещения по оси x максимумов "несущей" частоты $\langle\omega\rangle$), волновой пакет при его перемещении будет постоянно видоизменяться. В частности, в случае нормальной дисперсии ($\upsilon_г < \upsilon$) в левой части пакета будет все время как бы "нарождаться" волна частоты $\langle\omega\rangle$ и, перемещаясь быстрее огибающей

пакета, исчезать на его правой границе.

Если волны, составляющие пакет, занимают достаточно узкий диапазон частот $\Delta\omega$, так что соответствующий участок дисперсионной кривой можно считать линейным, то производная $d\omega/dk$ одинакова во всем интервале $\Delta\omega$, и вопрос об определении групповой скорости, характеризующей перемещение максимума огибающей волнового пакета (см. формулу (6.14)) не требует специального обсуждения. Однако, если величина $d\omega/dk$ в диапазоне частот $\Delta\omega$ претерпевает заметные изменения, то определение скорости перемещения максимума огибающей волнового пакета требует некоторого уточнения.

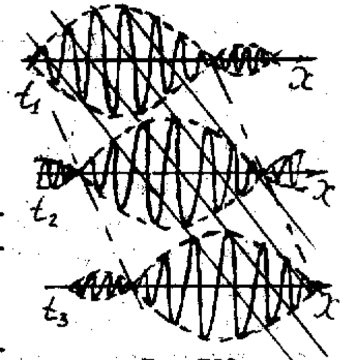


Рис.106

Так как основной вклад в формирование максимума вносят волны средней частоты $\langle\omega\rangle$ (именно такова частота "несущей" гармоники), очевидно, что скорость перемещения максимума нужно вычислять по величине производной $d\omega/dk$ вблизи частоты $\langle\omega\rangle$, т.е.:

$$\upsilon_{max} \equiv \upsilon_г(\langle\omega\rangle) = d\omega/dk\,\big|_{\omega=\langle\omega\rangle}. \quad (6.19)$$

Остановимся вкратце на вопросе об изменениях формы волнового пакета при распространении его в диспергирующих средах. Для этого проделаем мысленно следующую процедуру – разобьем интервал $\Delta\omega$ на несколько (например, на пять) равных частей $\Delta\omega' = \Delta\omega/5$ – см. рис.107. Каждая такая часть может рассматриваться как отдельный волновой пакет (будем называть такой пакет "пакетиком"). Каждый "пакетик" даст волновой импульс, показанный на рис. 102, только длительность $\Delta t'$ и пространственная протяженность $\Delta x'$ "пакетика" будут, в соответствии с теоремой о ширине частотной полосы, в 5 раз больше, чем целого пакета. Если групповые скорости, соответствующие средним частотам всех "пакетиков", одинаковы, то волновые импульсы пяти "пакетиков" будут распространяться вместе, между колебаниями в этих импульсах будет происходить интерференция, и в итоге шири-

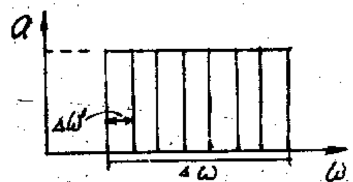


Рис.107

на суммарного волнового импульса уменьшится в 5 раз (точно так же, как уменьшается в 5 раз ширина главного дифракционного максимума при увеличении количества щелей в 5 раз – см. стр.).

Ситуация коренным образом изменится, если частотный диапазон, занимаемый пакетом ($\Delta\omega$), не очень мал, а среда, в которой распространяется пакет – диспергирующая. Тогда величины производной $d\omega/dk$ для частот, соответствующих серединам разных "пакетиков", будут разными; поэтому волновые импульсы от пяти "пакетиков" будут распространяться с различными скоростями и с течением времени будут постепенно расходиться. В результате условия интерференции волновых "пакетиков" нарушатся, что неминуемо приведет к "расплыванию" результирующего волнового пакета. Подчеркнем вместе с тем, что скорость распространения результирующего волнового пакета может быть определена по формуле (6.I9).

Если в момент времени t_0 волновой пакет характеризовался длительностью $(\Delta t)_0$ и пространственной протяженностью $(\Delta x)_0$, то в диспергирующей среде из-за разброса величин групповых скоростей волн $\Delta v_г$ в пределах пакета параметры, характеризующие протяженность волнового пакета во времени и пространстве в момент $t_1 > t_0$, будут с учетом "расплывания" таковы:

$$(\Delta x)_1 = (\Delta x)_0 + (\Delta v_г)(t_1 - t_0), \tag{6.20}$$

$$(\Delta t)_1 = (\Delta t)_0 + (\Delta v_г)(t_1 - t_0)/v_г \tag{6.21}$$

Величина разброса групповых скоростей по пакету $\Delta v_г$ может быть записана в виде: $\Delta v_г = (dv_г/dk)\Delta k = (d^2\omega/dk^2)\Delta k$.

Учитывая формулы (6.20) и (6.2I), легко понять, что полученные ранее соотношения (6.I0) и (6.II) справедливы совершенно строго только в недиспергирующих средах. Использование этих соотношений возможно на начальном этапе распространения пакета (при малых $t_1 - t_0$ "расплыванием" пакета можно пренебречь, $(\Delta x)_I \simeq (\Delta x)_0$); а также если мала величина $\Delta v_г$ в пределах пакета. В противном случае вместо (6.I0) и (6.II) нужно писать

$$\Delta t \cdot \Delta\omega \geqslant 2\pi, \qquad \Delta t \cdot \Delta\nu \geqslant 1; \tag{6.22}$$

$$\Delta x \cdot \Delta k \geqslant 2\pi, \qquad \Delta x \cdot |\Delta(1/\lambda)| \geqslant 1. \tag{6.23}$$

§ 4. Волновые пакеты и импульсы произвольной формы

До сих пор мы имели дело только с "прямоугольным" волновым пакетом. Нам удалось установить, что такому пакету соответствует импульсный сигнал, форма которого показана на рис.I0I и рис.I02. Таким образом, если наблюдатель принял сигнал, имеющий такую форму, сразу можно сделать вывод о спектральном составе зарегистрированного волнового пакета (с учетом соотношений (6.I0) и (6.II)).

Очевидно, что если изменять вид волнового пакета, варьируя амплитуды отдельных составляющих, то будет также изменяться форма соответствующего сигнала. Важно установить, насколько широк диапазон сигналов, которые можно получать, создавая различные по форме волновые пакеты (т.е. задавая разные зависимости амплитуд гармонических компонент от частоты и изменяя спектральный состав пакета).

Некоторые соображения на этот счет можно привести, основываясь только на классическом волновом уравнении (2.5). Ранее упоминалось, что любая достаточно плавная функция* вида $f(t - x/v)$ удовлетворяет этому уравнению. С другой стороны, решениями (2.5) являются также гармонические функции вида:

$$A\sin[\omega(t - x/v)] \quad \text{или} \quad B\cos[\omega(t - x/v)] \tag{6.24}$$

Логично предположить, что любая плавная функция может быть представлена в виде некоторого набора гармоник (6.24).

Для того, чтобы точно определить этот набор для какой-то функции $f(t)$, воспользуемся методом разложения функций в ряд Фурье. Сначала рассмотрим периодическую функцию времени $F(t)$, полагая, что она удовлетворяет условиям Дирихле. Приведенное ниже рассмотрение автоматически переносится на функцию координаты, если провести замену $t \to x$.

Ряд Фурье для функции $F(t)$ выглядит так:

$$F(t) = B_0/2 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin n\omega t + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cos n\omega t \tag{6.25}$$

Здесь $\omega = 2\pi/T$, T – период функции; A_n и B_n – коэффициенты, определяемые соотношениями:

---

* Функция должна удовлетворять условиям Дирихле, см. сноску на стр. 29.

$$A_n = (2/T)\int_t^{t+T} F(t)\sin\omega n t\,dt,$$
$$B_n = (2/T)\int_t^{t+T} F(t)\cos\omega n t\,dt, \qquad (6.26)$$
$$B_0 = (2/T)\int_t^{t+T} F(t)\,dt.$$

Коэффициент B_0 отличается от нуля для функций, среднее значение которых за период не равно нулю (см. рис.I08,а). Если функция $F(t)$ – четная (рис.I08,б), то все $A_n = 0$; для нечетных функций $B_I = B_2 = \ldots = B_n = 0$ (рис.I08,в).

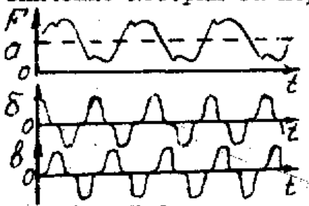


Рис.I08

В качестве примера на рис.I09 показаны три периодические функции (верхняя – четная, средняя и нижняя – нечетные), приведены ряды Фурье для этих функций, а также соответствующие частотные спектры (по горизонтали – частоты, по вертикали – амплитуды гармоник). Видно, что для периодических функций основной вклад в разложение Фурье вносят низкочастотные гармонические составляющие. Чем более плавной является функция, тем быстрее убывают амплитуды гармоник с возрастанием номера n в разложении периодической функции (6.25).

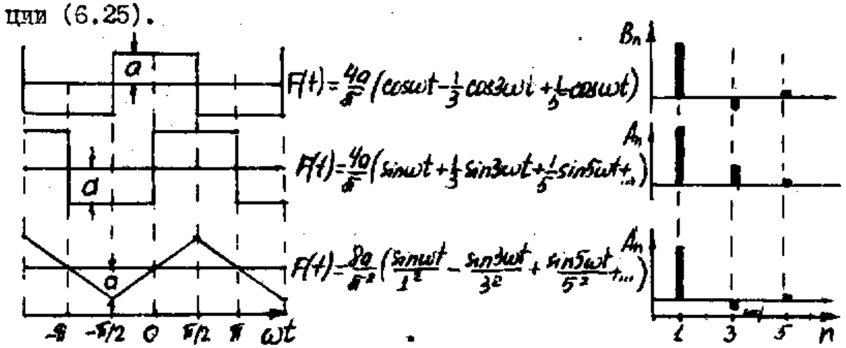


Рис.I09

Для приближенного описания периодических функций, как правило, достаточно небольшого числа первых членов ряда (6.25). Это хорошо видно из рис.II0, на котором показаны графики суммы первых трех (а) и пяти (б) членов ряда Фурье для прямоугольной волны.

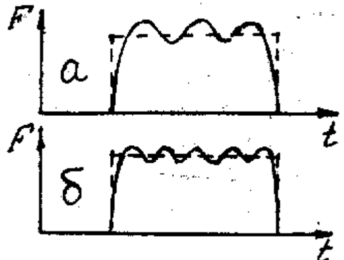


Рис.II0

Перейдем теперь к обсуждению возможности представления в виде суперпозиции гармоник непериодических функций.

Пусть в некоторую точку x_0 приходит непериодический сигнал $\xi(t)$, имеющий форму импульса ограниченной длительности (т.е. функция $\xi(t)$ равна нулю за пределами интервала времени $t_0<t<t_0+T_0$ – см. рис.III,а). Для того, чтобы иметь возможность использовать полученные при рассмотрении периодических функций результаты, воспользуемся следующим приемом. Построим функцию $f(t)$, точно равную функции $\xi(t)$ в интервале $t_0<t<t_0+T_0$, а вне этого интервала представляющую собой периодическое повторение функции $\xi(t)$ с периодом T_0, так что $f(t) = f(t + T_0)$ – см. рис.III,б. Будем считать, что $f(t)$ удовлетворяет условиям Дирихле и ее можно разложить в ряд Фурье (6.25). Если среднее значение функции $\xi(t)$ равно нулю, т.е.

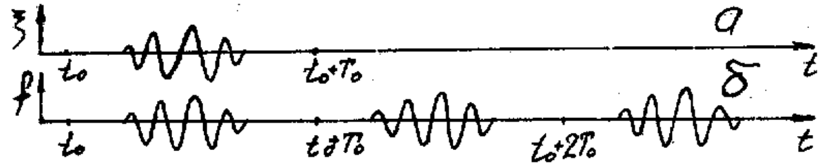


Рис.III

отсутствует постоянный "сдвиг" сигнала (см. рис.I08,а), то коэффициент B_0 в разложении (6.25) равен нулю. Очевидно, что четная функция $f(t)$, как и ранее, будет содержать в разложении (6.25) только косинусы, нечетная – только синусы. В обоих случаях первые члены соответствующих рядов Фурье – гармоники с частотой $\omega_0 = 2\pi/T_0$. Поскольку выбор периода T_0, в общем, произволен, его можно выбрать столь большим, что частота $\omega_0 = 2\pi/T_0$ будет очень малой. При этом отличие частот соседних гармоник (с близкими номерами n) будет тоже малым ($\delta\omega=\omega_0\delta n$).

В итоге суммирование отдельных гармоник в ряду (6.25) можно заменить интегрированием по частоте:

$$f(t)=\int_0^\infty A(\omega)\sin\omega t\,d\omega+\int_0^\infty B(\omega)\cos\omega t\,d\omega, \qquad (6.27)$$

где $A(\omega) = A(n\omega_0) = A_n/\omega_0$, $B(\omega) = B(n\omega_0) = B_n/\omega_0$ (6.28)

Нижние пределы в интегралах (6.27) взяты равными нулю, так как при бесконечном возрастании T_0 частоты самых низкочастотных составляющих ряда (6.25) стремятся к нулю. Детальный анализ трансформации частотного спектра периодической функции $f(t)$ при увеличении периода и перехода в пределе к одиночному сигналу $\xi(t)$ будет проведен в следующем параграфе (п.3).

Амплитуды гармоник можно определить, воспользовавшись соотношениями (6.26) и (6.28):

$$A(\omega) = 2(\omega_0 T_0)^{-1} \int_{t_0}^{t_0+T_0} f(t) \sin \omega t \, dt = (\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \xi(t) \sin \omega t \, dt,$$
$$B(\omega) = 2(\omega_0 T_0)^{-1} \int_{t_0}^{t_0+T_0} f(t) \cos \omega t \, dt = (\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \xi(t) \cos \omega t \, dt. \qquad (6.29)$$

В последних равенствах учтено, что $\omega_0 T_0 = 2\pi$, а величина интеграла по периоду от искусственно сформированной периодической функции $f(t)$ точно равна интегралу по времени от $-\infty$ до $+\infty$ от одиночного непериодического импульса $\xi(t)$.

Резюмируя вышесказанное, запишем представление непериодической функции времени в виде т.н. "интеграла Фурье":

$$\xi(t) = \int_0^{\infty} A(\omega) \sin \omega t \, dt + \int_0^{\infty} B(\omega) \cos \omega t \, dt \qquad (6.30)$$

где коэффициенты $A(\omega)$ и $B(\omega)$ определяются правыми равенствами (6.29).

Мы уже неоднократно убеждались в полной идентичности описания функций времени и пространства, поэтому очевидно, что "пространственный импульс" – зафиксированная в какой-то момент картина распространяющегося по оси x одиночного сигнала – также может быть представлена в виде совокупности гармонических волн, аналогично (6.30), только ωt при этом нужно заменить на kx.

Соотношения (6.29), таким образом, позволяют определять спектральный состав сигналов произвольной формы. Процедура, описываемая формулами (6.29), называется Фурье-анализом сигнала или волнового пакета. В следующем параграфе мы проиллюстрируем возможности Фурье-анализа на примере нескольких сигналов, с которыми довольно часто приходится встречаться на практике.

§ 5. Фурье-анализ волновых пакетов и импульсов

I. Начнем Фурье-анализ сигналов с рассмотрения простейшего волнового пакета – прямоугольного частотного спектра, который мы уже анализировали, пользуясь методом векторных диаграмм (см. гл.VI, § 2).

Пусть функция $A(\omega)$ равна нулю во всем спектральном диапазоне, а функция $B(\omega)$ задана соотношениями:

$$B(\omega) = (\Delta\omega)^{-1}; \quad \omega_1 \le \omega \le \omega_2 = \omega_1 + \Delta\omega;$$
$$B(\omega) = 0; \quad \omega < \omega_1, \ \omega > \omega_2 = \omega_1 + \Delta\omega \qquad (6.31)$$

Постоянное значение функции $B(\omega)$ в интервале частот от ω_1 до ω_2 задано таким, чтобы нормировать ее интеграл по частоте на единицу:

$$\int_0^{\infty} B(\omega) \, d\omega = 1. \qquad (6.32)$$

Воспользовавшись формулой (6.30) и учитывая, что $A(\omega) = 0$, получаем:

$$\xi(t) = \int_0^{\infty} B(\omega) \cos \omega t \, d\omega = (\sin \omega_2 t - \sin \omega_1 t)/\Delta\omega t \qquad (6.33)$$

Представляя разность синусов в виде удвоенного произведения косинуса полусуммы углов на синус полуразности, имеем:

$$\xi(t) = \frac{\sin(\Delta\omega t/2)}{\Delta\omega t/2} \cos\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}\right)t = A(t) \cos \langle\omega\rangle t \qquad (6.34)$$

Таким образом, мы пришли к уже известному нам результату: прямоугольный волновой пакет дает импульс, представляющий собой "быстрое" колебание со средней частотой $\langle\omega\rangle$, а амплитуда импульса сравнительно медленно изменяется со временем по закону:

$$A(t) = \frac{\sin(\Delta\omega t/2)}{\Delta\omega t/2} \qquad (6.35)$$

Формула (6.35) аналогична (6.8); физический смысл величин $N\varphi$ (в соотношении (6.8)) и $\Delta\omega t$ (в (6.35)) абсолютно одинаков – в обоих случаях это разность фаз между "крайними" составляющими прямоугольного пакета. Максимальные значения функций (6.8) и (6.35), конечно, отличаются, поскольку для функции $B(\omega)$

принято условие нормировки (6.31). Максимум (6.35) достигается при $t = 0$ и равен единице.

Заметим, что в задаче с дискретным частотным спектром прямоугольного волнового пакета (§ 2) аналогом интеграла $\int_0^\infty B(\omega)d\omega$ является сумма амплитуд a всех N компонент пакета, т.е. произведение Na, которое равно максимальной амплитуде импульса $A_м$ (см. рис.100). Поэтому условие нормировки функции $B(\omega)$, полностью эквивалентное задаче, рассмотренной в § 2, таково:

$$\int_0^\infty B(\omega)d\omega = A_м \qquad (6.36)$$

Условию (6.36) соответствует постоянная величина амплитуды "непрерывного" пакета, равная $A_м(\Delta\omega)^{-1}$ при $\omega_1 < \omega < \omega_2 = \omega_1 + \Delta\omega$

2. Проведем теперь Фурье-анализ прямоугольного импульсного сигнала $\xi(t)$ – см. рис.112. Пусть t_0 – время, соответствующее центру импульса. Для удобства сравнения с задачей о "непрерывном" прямоугольном частотном спектре пронормируем импульсный сигнал:

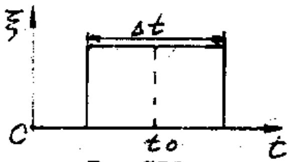


Рис.112

$$\int_0^\infty \xi(t)dt = 1. \qquad (6.37)$$

Из (6.37) следует, что амплитуда импульса равна:

$$\xi(t) = (\Delta t)^{-1} \text{ при } (t_0 - \Delta t/2) < t < (t_0 + \Delta t/2) \qquad (6.38)$$

Из рис.112 видно, что $\xi(t)$ – четная функция $(t - t_0)$, поэтому интеграл Фурье для этой функции можно записать в форме:

$$\xi(t) = \int_0^\infty B(\omega)\cos\omega(t - t_0)d\omega, \qquad (6.39)$$

а спектральный состав гармоник соответствующего пакета находит по формуле (6.29):

$$B(\omega) = (\pi)^{-1}\int_{-\infty}^{\infty} \xi(t)\cos\omega(t - t_0)dt \qquad (6.40)$$

Интегрируя (6.40), получаем

$$B(\omega) = \frac{1}{\pi}\,\frac{\sin(\omega\Delta t/2)}{\omega\Delta t/2} \qquad (6.41)$$

На рис.113 сопоставлены: прямоугольный частотный спектр (а) и амплитуда соответствующего сигнала (б) в разные моменты времени, а также прямоугольный импульсный сигнал (в) и соответствующий частотный спектр (г).

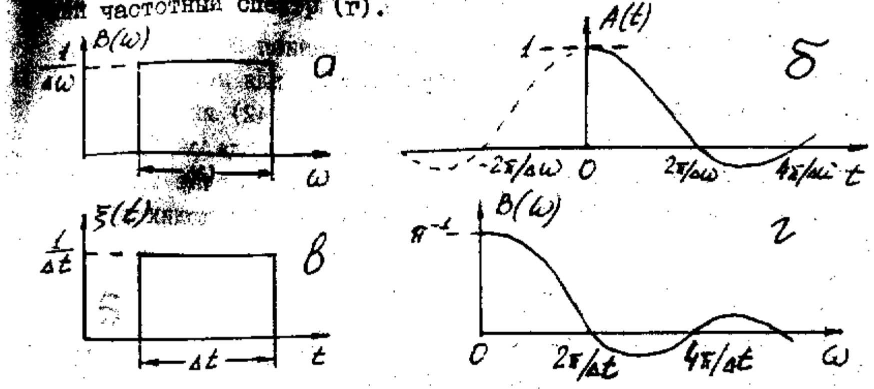


Рис.113

Отрицательные значения амплитуды означают, что в соответствующих частотных диапазонах на рис.113,б фаза несущей частоты $\langle\omega\rangle$ изменяется на π. Аналогично, в спектре частот на рис.113,г присутствуют гармоники, которым соответствуют отрицательные величины $B(\omega)$; начальные фазы соответствующих гармоник сдвинуты на π.

Из рис.113 видно, что имеется однозначное соответствие между функциями $B(\omega)$ и $\xi(t)$ – представляя одну из этих функций в виде интеграла Фурье, получаем другую. Такие пары функций принято называть **"Фурье-образами"** друг друга, а переход от одной к другой – Фурье-преобразованием.

3. Проследим трансформацию, которую претерпевает спектр частот гармоник периодической функции по мере увеличения периода T и в пределе превращения этой функции в одиночный сигнал. Для такого анализа удобно выбрать последовательность импульсов постоянной длительности Δt, период повторения которых T_I.

Начнем мы с "прямоугольной волны", которую рассматривали в начале § 4 (см. рис.109), и будем постепенно трансформировать функцию, увеличивая период повторения импульсов в два раза ($T_I' = 2T_I$, $T_I'' = 4T_I$, ...). В конце концов мы придем к одиночному прямоугольному импульсу – см. рис.114(а-г). Отсчет времени $t = 0$ начнем с середины одного из импульсов, так что наша периодическая функция – четная, поэтому ряд Фурье для нее должен состоять только из косинусов:

$$F(t) = B_0/2 + \sum B_n \cos \omega_1 n t \ , \ \omega_1 = 2\pi/T \qquad (6.42)$$

Поскольку "прямоугольная волна", показанная на рис.II4,а, несимметрична (ср. с рис.I09), коэффициент B_0 для нее отличен от нуля. Но этот постоянный член разложения (6.42) интересовать нас не будет, потому что по мере увеличения периода он будет постепенно уменьшаться, стремясь к нулю. В данном случае мы сконцентрируем внимание только на гармонических составляющих ряда (6.42).

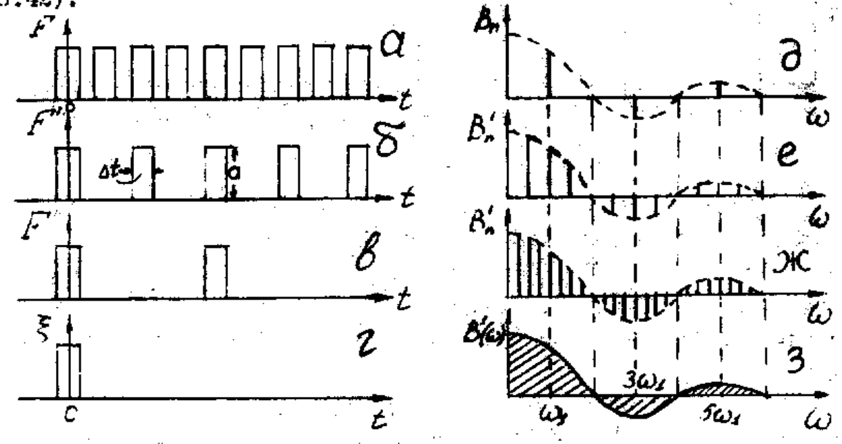


Рис.II4

Амплитуды гармоник B_n находим, используя (6.26):

$$B_n = 2T_1^{-1} \int_0^{T_1} F(t) \cos \omega_1 n t \, dt. \qquad (6.43)$$

Полагая, что амплитуда импульсов равна a, а период повторения их – T_I, получаем:

$$B_n = \left(\frac{4a}{T_1}\right) \frac{\sin n\omega_1 t}{n\omega_1} \Big|_0^{\Delta t/2} = 2a\left(\frac{\Delta t}{T_1}\right) \frac{\sin(n\omega_1 \Delta t/2)}{n\omega_1 \Delta t/2} \qquad (6.44)$$

При постоянной амплитуде импульсов совершенно очевидно, что при "удалении" половины из них амплитуды гармоник уменьшаются пропорционально величине отношения $\Delta t/T_I'$. Так как мы анализируем только спектральный состав сигналов, на графиках рис.II4(е-з) будем изображать коэффициенты $B_n' = B_n T_1'/\Delta t$, величины которых не зависят от отношения $\Delta t/T_I$. Вид функциональной зависимости $B_n'(\omega)$ показан на рис.II3,г и перенесен пунктирной линией на рис.II4(д-ж), на котором ось частот проградуирована в единицах,

соответствующих частоте первой гармоники сигнала $F(t)$, показанного на рис.II4,а.

Положение первого (самого низкочастотного) "узла" на зависимостях $B_n'(\omega)$, изображенных на рис.II4(д-ж), определяется условием (см. рис.I00):

$$n\omega_1 \Delta t/2 = \pi \qquad (6.45)$$

Обозначая $\omega = n\omega_1$ и учитывая, что для "прямоугольной волны" (рис.II4,а) $\Delta t = T_I/2$, получим частоту, соответствующую первому узлу функции $B_n'(\omega)$ на рис.II4,д: $\omega = 2\omega_1$. Из рис.II4,д видно, что амплитуды всех четных гармоник в разложении "прямоугольной волны" в ряд Фурье равны нулю, так как попадают в узлы функции $B_n'(\omega)$. Амплитуды всех нечетных гармоник ($\omega = \omega_1$, $3\omega_1$, $5\omega_1$ и т.д.) попеременно меняют знак (см. также рис.I09). Номера гармоник показаны на рис.II4,д цифрами, проставленными рядом с соответствующими вертикальными штрихами.

Удалим из последовательности импульсов, показанных на рис. II4,а, каждый второй; в результате получим периодическую функцию $F_1'(t)$, период которой $T_I' = 2T_I$, а самая низкая частота в разложении (6.42):

$$\omega_1' = 2T/T_1' = \omega_1/2. \qquad (6.46)$$

Отсюда следует, что расстояние между соседними гармониками по оси частот ряда Фурье для функции $F_1'(t)$ будет в два раза меньше, чем для функции $F(t)$ – ср. рис.II4(д,е).

Снова проведем "прореживание" последовательности импульсов, оставляя каждый второй – см. рис.II4,в. Период функции опять увеличивается в два раза, а самая низкая частота – уменьшается в два раза аналогично (6.46). В итоге спектр частот ряда Фурье для функции $F(t)$ стал еще в два раза "гуще" – см. рис.II4,ж.

Очевидно, что продолжая эту процедуру много раз, мы придем по существу к одиночному импульсу (рис.II4,г), который описывается бесконечно большим количеством гармоник – т.е. непрерывным распределением гармоник по частотам – рис.II4,з. Вместо ряда Фурье в этом случае необходимо использовать интеграл Фурье для представления функции в виде совокупности гармоник – см. соотношения (6.25) и (6.27).

Как уже обсуждалось ранее, чем меньше длительность импульса Δt, тем шире спектр частот гармоник, составляющих этот импульсный сигнал (см. рис.II3,г).

4. Проведем Фурье-анализ затухающего колебательного процесса, происходящего по закону (см. (I.36), рис.7):

$$\xi(t) = A_0 \exp(-\beta t)\cos\omega_c t\,; \quad \omega_c^2 = \omega_0^2 - \beta^2; \quad t > 0 \qquad (6.47)$$

Функция (6.47) – непериодическая, поэтому может быть представлена в виде интеграла Фурье:

$$\xi(t) = \int_0^\infty A(\omega)\sin\omega t\,d\omega + \int_0^\infty B(\omega)\cos\omega t\,d\omega. \qquad (6.48)$$

Коэффициенты Фурье определяются соотношениями:

$$A(\omega) = (\pi)^{-1}\int_{-\infty}^{\infty}\xi(t)\sin\omega t\,dt = (A_0/\pi)\int_0^\infty e^{-\beta t}\cos\omega_c t\sin\omega t\,dt =$$

$$= (A_0/2\pi)\int_0^\infty e^{-\beta t}[\sin(\omega+\omega_c)t + \sin(\omega-\omega_c)t]\,dt. \qquad (6.49)$$

$$B(\omega) = (\pi)^{-1}\int_{-\infty}^{\infty}\xi(t)\cos\omega t\,dt = (A_0/\pi)\int_0^\infty e^{-\beta t}\cos\omega_c t\cos\omega t\,dt =$$

$$= (A_0/2\pi)\int_0^\infty e^{-\beta t}[\cos(\omega+\omega_c)t + \cos(\omega-\omega_c)t]\,dt. \qquad (6.50)$$

Используя табличные интегралы

$$\int_0^\infty e^{-\beta t}\sin\alpha t\,dt = \alpha/(\alpha^2+\beta^2); \quad \int_0^\infty e^{-\beta t}\cos\alpha t\,dt = \beta/(\alpha^2+\beta^2) \qquad (6.51)$$

формулы (6.49) и (6.50) легко привести к виду:

$$A(\omega) = (A_0/2\pi)\{(\omega+\omega_c)/[\beta^2+(\omega+\omega_c)^2] + (\omega-\omega_c)/[\beta^2+(\omega-\omega_c)^2]\} \qquad (6.52)$$

$$B(\omega) = (A_0/2\pi)\{\beta/[\beta^2+(\omega+\omega_c)^2] + \beta/[\beta^2+(\omega-\omega_c)^2]\}. \qquad (6.53)$$

Полагая затухание малым ($\beta^2 \ll \omega_0^2$, $\omega_c \simeq \omega_0$) и рассматривая область частот вблизи ω_0, в соотношениях (6.52) и (6.53) можно пренебречь первыми слагаемыми:

$$A(\omega) \simeq (A_0/2\pi)(\omega-\omega_0)/[\beta^2+(\omega-\omega_0)^2]. \qquad (6.54)$$

$$B(\omega) \simeq (A_0/2\pi)\beta/[\beta^2+(\omega-\omega_0)^2]. \qquad (6.55)$$

Интенсивность колебаний определяется суммой квадратов коэффициентов $A(\omega)$ и $B(\omega)$, поэтому имеем

$$I(\omega) = A^2(\omega) + B^2(\omega) \simeq (A_0/2\pi)^2/[\beta^2+(\omega-\omega_0)^2] \qquad (6.56)$$

Легко видеть, что интенсивность колебаний, в соответствии с формулой (6.56), пропорциональна функции $R(\omega)$ – лоренцевской функции формы линии (см. (I.70)).

Отсюда следует важный практический вывод – для того, чтобы

экспериментально определить характеристики затухающего колебательного процесса, достаточно провести Фурье-анализ этого процесса. Обычно это требует значительно меньшего времени, чем изучение вынужденных колебаний в исследуемой системе.

5. Пусть плоская монохроматическая волна распространяется по оси x – рис.II5,а. Поместим на ее пути длинную щель шириной b, ограничивающую пространственно размер фронта волны по оси y – рис.II5,б. В результате дифракции амплитуда результирующего колебания A будет зависеть от угла дифракции так, как это показано на рис.II5,в (интенсивность волны, пропорциональная квадрату амплитуды, представлена для разных углов дифракции на рис.56)*.

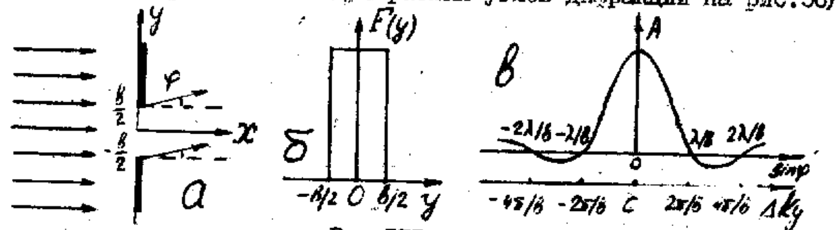


Рис.II5

Положение минимумов дифракционной картины определяется соотношением (4.14), которое можно переписать так:

$$(2\pi/\lambda)\sin\varphi = \pm m(2\pi/b) \qquad (6.57)$$

Учтем, что $k = 2\pi/\lambda$, а $k\sin\varphi = \Delta k_y$ – изменение составляющей волнового вектора в результате дифракции по оси y (амплитуда волнового вектора остается неизменной). В итоге горизонтальную ось на рис.II5,в можно проградуировать в величинах Δk_y. Сопоставляя рис.II5(б,в) и рис.II3(в,г), убеждаемся в их сходстве. Положение ближайшего к центральному максимуму минимума на рис. II5,в соответствует выполнению теоремы о ширине волнового пакета в форме:

$$\Delta k_y \cdot b = \Delta k_y \cdot \Delta y = 2\pi \qquad (6.58)$$

Таким образом, дифракционная картина от щели, действительно, может рассматриваться как Фурье-образ (в Δk_y-пространстве) ограниченного по оси y фронта плоской волны. Представление о дифракции как Фурье-преобразовании оказывается чрезвычайно плодотворным при рассмотрении дифракции на более сложных препятст-

* Причина изменения знака амплитуды на рис.II5,в та же, что и на рис.I00 – см.текст на стр. I2I.

...ии – например, прямоугольных отверстий.

§ 6. Представление о Фурье-спектроскопии

Фурье-спектроскопия – современный метод оптической спектроскопии, в котором спектры исследуемого объекта получаются в две стадии. На первой стадии регистрируется так называемая "интерферограмма" объекта, на второй – проводится математическая обработка интерферограммы, в результате которой и восстанавливается спектральный состав исследуемого излучения.

Для получения интерферограммы используется интерферометр Майкельсона – необходимый элемент любого Фурье-спектрометра. Устройство интерферометра Майкельсона схематически показано на рис. II6. Параллельный пучок исследуемого излучения через входное отверстие спектрометра направляется на полупрозрачное зеркало 3, плоскость которого составляет с пучком угол 45°. Половина составляющих пучок 0 волн проходит через полупрозрачное зеркало (луч I), а другая половина – отражается от него (луч 2). Далее лучи I и 2 отражаются от зеркал 4′ и 4, соответственно; затем они вновь попадают на зеркало 3, где опять происходит разделение каждого из этих лучей на два (на рисунке показаны только лучи I′ и 2′, направления распространения которых совпадают). Если волны I′ и 2′ когерентны, регистрирующий прибор 5 зафиксирует результат интерференции. Устройство интерферометра Майкельсона таково, что интенсивность интерферирующих лучей I′ и 2′ строго одинакова.

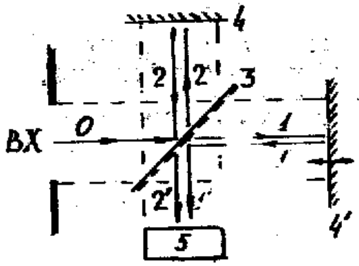


Рис.II6

Сначала предположим, что на вход интерферометра попадает монохроматическое излучение частоты ω. После разделения исходного пучка на два, каждый из вновь образованных пучков (I и 2) проходит свой путь, после чего они вновь соединяются (лучи I′ и 2′). Ранее было показано (см. соотношение (3.9)), что, если интенсивности лучей I′ и 2′ равны $I_0(\omega)/2$, то интенсивность результирующих колебаний на входе прибора 5 будет равна:

$$I(\omega) = I_0(\omega)(1+\cos\Delta\varphi), \tag{6.59}$$

где $\Delta\varphi$ – разность фаз колебаний между лучами I и 2.

В начальный момент времени зеркала 4 и 4′ установлены так, что величина $\Delta\varphi = 0$. Затем одно из них (зеркало 4′, например) начинает поступательно перемещаться вдоль луча I с постоянной скоростью V. Так как разность фаз $\Delta\varphi$ связана с разностью хода лучей I′ и 2′ Δl соотношением $\Delta\varphi = k\Delta l$, получаем:

$$\Delta\varphi = 2V\omega t/\upsilon. \tag{6.60}$$

Здесь υ – фазовая скорость распространения волн; множитель два отражает то обстоятельство, что Δl изменяется со скоростью $2V$.

Поскольку величина $\Delta\varphi$ периодически изменяется со временем, регистрирующий прибор 5 зафиксирует присутствие в сигнале переменной составляющей

$$\tilde{I}(\tau) = I_0(\omega)\cos\omega\tau, \tag{6.61}$$

где $\tau = 2Vt/\upsilon t$.

Если на входе интерферометра присутствуют волны двух частот, то переменный сигнал регистрирующего прибора 5 получится сложением двух составляющих типа (6.61):

$$\tilde{I}(\tau) = I_1(\omega)\cos\omega_1\tau + I_2(\omega)\cos\omega_2\tau. \tag{6.62}$$

Здесь $I_1(\omega_1)$ – интенсивность волн с частотой ω_1, $I_2(\omega_2)$ – интенсивность волн с частотой ω_2 на входе интерферометра.

Очевидно, что если частотный спектр исследуемого сигнала непрерывный, то переменная составляющая отклика регистрирующего прибора 5 запишется в виде интеграла

$$F(\tau) = \int_0^\infty I(\omega)\cos\omega\tau\, d\omega. \tag{6.63}$$

Легко видеть, что выражение (6.63) – не что иное, как Фурье-преобразование частотного спектра исходного сигнала $I(\omega)$. В частности, если исследуемый сигнал представляет собой наложение волн одинаковых амплитуд, равномерно заполняющих частотный диапазон от ω до $\omega + \Delta\omega$ (прямоугольный частотный спектр), то прибор 5 зарегистрирует отклик, изменяющийся во времени так, как это показано на рис.II3,б.

В общем случае оптический спектр исходного сигнала может быть найден, как это следует из предыдущего параграфа, с помощью обратного преобразования Фурье – и это составляет второй этап получения искомого спектра:

$$I(\omega) = (\pi)^{-1}\int_{-\infty}^{\infty} F(\tau)\cos\omega\tau\, d\tau \tag{6.64}$$

Идея Фурье-спектроскопии была высказана Майкельсоном сто лет назад (математический аппарат Фурье преобразований к тому времени был уже развит). Однако, практическая реализация метода стала возможной лишь после появления быстродействующих достаточно компактных компьютеров, с помощью которых можно достаточно быстро проводить численное интегрирование (6.64). В современных вариантах Фурье-спектрометров ЭВМ используется не только для обработки экспериментальных данных, но и для автоматического управления экспериментальной установкой.

Принципиальным отличием Фурье-спектроскопии от традиционной спектроскопии является то, что Фурье-спектрометр регистрирует сразу весь спектр исследуемого сигнала, а не его маленький участок, как обычный спектрометр с диспергирующим элементом (призмой или дифракционной решеткой). Соответственно, на порядки возрастают объем получаемой в единицу времени информации, а также разрешающая способность аппаратуры. Например, в инфракрасной области спектра Фурье-спектрометр позволяет получать спектральное разрешение линий, отличающихся на тысячные доли $см^{-1}$. Фурье-спектрометры для дальней инфракрасной области спектра (50–2000 мкм) находят широкое применение в химии.

ПРИЛОЖЕНИЕ. ИНТЕРФЕРЕНЦИОННЫЕ МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ

Принцип действия всех интерференционных приборов одинаков – пучок света разделяется на два или более когерентных пучков, которые проходят различные оптические пути и затем вновь накладываются друг на друга. Наблюдаемая интерференционная картина зависит от трех параметров: разности хода лучей $\Delta\ell$, показателя (или показателей) преломления среды n, и длины волны используемого света λ. Соответственно, при двух известных параметрах из интерференционной картины может быть извлечен третий параметр: если это разность хода $\Delta\ell$, то прибор называется интерференционным компаратором; если это показатель преломления, – интерференционным рефрактометром; интерференционные аппараты для измерения длин волн называются интерференционными спектральными приборами. Кратко остановимся на устройстве некоторых интерферометров, относящихся к указанным типам приборов.

I. Интерференционные компараторы

Для точного измерения длин в технике широко используются так называемые "концевые меры" или "плитки". В частности, они служат для проверки и градуировки измерительного инструмента (линеек, штангенциркулей и т.п.). Плитки представляют собой прямоугольные параллелепипеды строго определенного сечения (9x30 или 9x35 $мм^2$) с плоскопараллельными гранями. Длины плиток различны – от I до I000 мм. Поверхности плиток столь высокого качества, что при сдавливании двух плиток они за счет сил межмолекулярного взаимодействия как бы "склеиваются", так что из нескольких плиток можно составить новую концевую меру. Обычно плитки составляют набор, с помощью которого можно изготовить любую требуемую концевую меру с заданной точностью (например, 0,0I мм или 0,00I мм).

С помощью интерференционного компаратора можно сравнивать длины изготовленных плиток с эталонными, либо непосредственно с длиной волны света. Идея метода иллюстрируется рисунком II7. Две плитки – эталонная Э и измеряемая И устанавливаются между двумя плоскопараллельными стеклянными или кварцевыми пластинами $П_I$ и $П_2$. На систему направляется параллельный пучок света и в областях I и II наблюдается интерференционная картина (полосы равной толщины при небольшой непараллельности $П_I$ и $П_2$). По виду интерференционной картины в области II можно судить о качестве поверх-

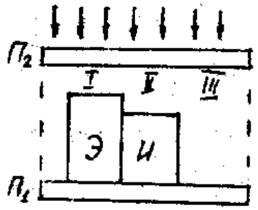


Рис.117

ности плитки И, а по сдвигу интерференционных полос в областях I и II – о различии длин концевых мер Э и И. Длину исследуемой плитки в принципе можно определить и непосредственным сравнением ее с длиной световой волны – для этого необходимо найти величину сдвига интерференционных картин в областях II и III – см. рис.117. Особенностью современных методов определения длин является то, что число волн, укладывающихся на длине концевой меры, получается без непосредственного счета интерференционных полос. Номер соответствующей интерференционной полосы определяется косвенным путем, так называемым "способом совпадения дробных частей" (по совпадению интерференционных максимумов от разных длин волн).

В качестве интерференционного компаратора удобно использовать интерферометр Майкельсона – см. рис.116, поскольку в этом приборе эталонную и измеряемую длины можно пространственно разнести (поместить в разные плечи интерферометра). Одно из зеркал интерферометра Майкельсона (4 или 4′ на рис.116) можно закрепить непосредственно на измеряемом объекте любой формы.

Интерференционные компараторы в сочетании с микроскопом позволяют с высокой степенью точности (до сотых долей длины волны) изучать геометрический рельеф поверхности.

С помощью современных интерференционных компараторов длина в несколько метров может быть измерена с точностью до 0,005 мкм.

П. Интерференционный рефрактометр Жамена

Интерферометр Жамена – типичный двухлучевой интерференционный прибор, широко использующийся для измерения показателей преломления жидкостей и газов. Устройство рефрактометра Жамена показано на рис.118.

Параллельный пучок монохроматического света 0 после отражения от передней и задней поверхностей стеклянной пластины $П_I$ разделяется на два пучка – I и 2. Затем пучки I и 2 проходят через одинаковые кюветы $К_I$ и $К_2$ и попадают на стеклянную пластину $П_2$, которая слегка повернута относительно пластины $П_I$. Два из четырех лучей, отраженных от передней и задней поверхностей пла-

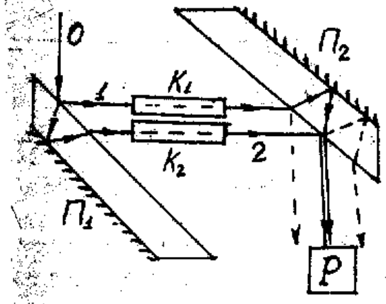


Рис.118

стины $П_2$, накладываются друг на друга (эти лучи показаны на рис. 118 сплошными линиями) и интерферируют в регистрирующем устройстве Р. Если в качестве регистрирующего устройства используется зрительная труба, то наблюдатель будет видеть систему полос равной толщины (пластины $П_I$ и $П_2$ образуют "воздушный клин").

В контрольном эксперименте обе кюветы заполнены одним и тем же веществом, положение максимумов и минимумов интерференционной картины строго фиксируется. После этого одна из кювет заполняется исследуемым веществом и регистрируется величина сдвига интерференционной картины. Из-за того, что показатели преломления веществ, находящихся в кюветах $К_I$ и $К_2$, разные, между лучами I и 2 возникает дополнительная оптическая разность хода $\Delta = (n_2 - n_1)\ell$, где n_2 и n_1 – показатели преломления веществ в кюветах $К_I$ и $К_2$, ℓ – длина кювет. Направление смещения интерференционной картины по сравнению с контрольной указывает, какой из показателей преломления (n_2 или n_1) больше, а из величины сдвига легко вычислить искомый показатель преломления n_2.

Оценим точность определения показателя преломления интерференционным методом. Пусть длина кювет ℓ = 5 см, длина волны используемого света $\lambda = 5 \cdot 10^{-7}$ м, а минимальная величина сдвига интерференционной картины, регистрируемая прибором Р, соответствует смещению на 0,I полосы. Тогда получаем

$$\Delta n = n_2 - n_1 = \Delta/\ell = 0{,}1 \cdot 5 \cdot 10^{-7}\,м / 5 \cdot 10^{-2}\,м \quad 10^{-6} \qquad (П.1)$$

Точность определения   может быть повышена, во-первых, удлинением кювет $К_I$ и $К_2$, а во-вторых, использованием более совершенной регистрирующей аппаратуры. В современных лазерных интерференционных рефрактометрах точность определения Δn достигает седьмого-восьмого десятичного знака.

Рефрактометрия находит широкое применение в химии для определения состава и структуры веществ (чаще всего газов и разбавленных растворов). Для иллюстрации возможностей метода в следующей таблице приведены показатели преломления разбавленных водных растворах сахарозы

вес сахарозы, в процентах	0	I	2	3
показатель преломления	I,33299	I,33443	I,33588	I,33733

Видно, что при точности метода $10^{-7}-10^{-8}$ легко зарегистрировать изменения концентрации раствора в тысячные доли процента (одна ложка сахара в плавательном бассейне).

Измерение показателя преломления вещества позволяет, кроме того, проверить правильность предположений о составе и строении этого вещества путем определения так называемой "молекулярной рефракции"

$$R_M = \frac{n^2-1}{n^2+2}\,\frac{M}{\rho} \qquad (\text{П.2})$$

где М – молекулярная масса; ρ – плотность вещества.

В соответствии с формулой Лоренц-Лоренца показатель преломления вещества с электронной поляризуемостью составляющих его частиц однозначно связан с величиной этой поляризуемости :

$$\frac{n^2-1}{n^2+2}\,\frac{M}{\rho} = \frac{4\pi}{3} N_A \cdot \alpha. \qquad (\text{П.3})$$

(Здесь N_A – число поляризующихся частиц в единице объема). При использовании видимого или ультрафиолетового света поляризуемость вещества чисто электронная, поэтому формула Лоренц-Лоренца справедлива. Сопоставляя (П.2) и (П.3), легко видеть, что молекулярная рефракция пропорциональна поляризуемости молекул, из которых состоит исследуемое вещество. Поскольку электронная поляризуемость обладает свойством аддитивности (складывается из поляризуемостей отдельных атомов или связей в молекуле), таким же свойством аддитивности обладает и молекулярная рефракция R_M. Поэтому молекулярную рефракцию какого-либо вещества можно найти как сумму ряда постоянных слагаемых R_i, соответствующих атомным рефракциям, групповым рефракциям, связевым рефракциям и т.п. В частности, молекулярная рефракция бензола может быть вычислена как сумма связевых рефракций:

$$R_{C_6H_6} = 6R_{C-H} + 3R_{C-C} + 3R_{C=C} = 26{,}307. \qquad (\text{П.4})$$

Здесь связевые рефракции равны соответственно $R_{C-H} = 1{,}705$; $R_{C-C} = 1{,}209$; $R_{C=C} = 4{,}15$.

В случае растворов молекулярная рефракция сохраняет свойство аддитивности в тех случаях, когда при растворении поляризуемости компонентов не изменяются. При этом молекулярная рефракция раствора будет линейной функцией рефракций отдельных компонентов раствора с коэффициентами, учитывающими содержание этих компонентов в растворе.

Ш. Интерференционный спектральный аппарат Фабри-Перо

Интерферометр Фабри-Перо представляет собой многолучевой прибор, предназначенный для исследования тонкой структуры спектров в достаточно узком спектральном диапазоне.

Интерферометр состоит из двух прозрачных стеклянных или кварцевых пластинок, внутренние поверхности которых покрыты отражающей пленкой и установлены строго параллельно друг другу. Коэффициент отражения покрытий обычно находится в пределах 80-95%. Это означает, что при отражении луча света от поверхности пластинки его интенсивность уменьшается в τ = 0,8-0,95 раз. Соответственно, сквозь отражающее покрытие проходит $(1-\tau)$ от интенсивности падающего луча.

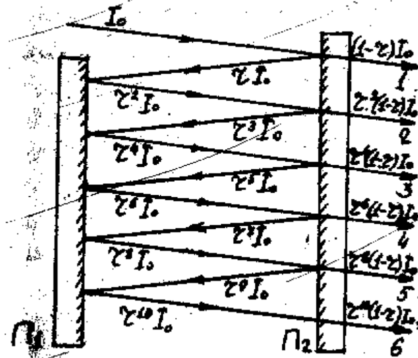


Рис.II9

На систему направляется параллельный (или почти параллельный) пучок света интенсивностью I_0, который претерпевает многократные отражения от зеркальных покрытий пластин $П_I$ и $П_2$. При каждом отражении из системы выходит часть энергии света (лучи I, 2, 3, ...). Интенсивности нескольких отраженных и проходящих через пластину $П_2$ лучей показаны на рис.II9 (предполагается, что поглощением света внутри пластин $П_I$ и $П_2$ можно пренебречь). Видно, что интенсивность каждого последующего луча, выходящего из интерферометра, меньше интенсивности предыдущего в τ^2 раз. При условии сохранения когерентности все выходящие лучи, накладываясь друг на друга, образуют интерференционную картину. Без применения собирающей линзы эта картина, как обсуждалось в гл.III (§ 5), локализована в бесконечности; однако обычно после интерферометра ставится линза и интерференционная картина регистрируется в фокальной плоскости этой линзы. Если падающий на интерферометр пучок света слегка непараллелен, картина будет состоять из светлых и темных полос равного наклона. Существенно, что чем большее количество лучей интерферирует, тем более резкой получится интерференционная картина (точно также, как при увеличении количества щелей дифракционной решетки). Поскольку условия максимумов и минимумов интерференции зависят от длины волны света, положения максимумов для разных длин волн будут отличаться. Таким образом, интерферометр Фабри-Перо будет осуществлять разложение падающего луча света в спектр, т.е. будет выполнять функции спектрального аппарата.

Проведем оценку важнейших параметров спектрометра Фабри-Перо. Воспользуемся для этого результатами, полученными при анализе параметров дифракционной решетки (гл.IУ, § 5).

В частности, для разрешающей способности решетки была получена формула (4.43): $R = mN$, где m - порядок интерференции, N - число щелей. Очевидно, что в случае спектрометра Фабри-Перо под N следует понимать количество интерферирующих лучей, выходящих из аппарата.

Оценим число N следующим образом. Будем полагать, что "последний" интерферирующий луч ослаблен по сравнению с первым в k раз. Тогда, учитывая, что луч под номером N имеет интенсивность $I_N = \tau^{2N} I_1$ (см. рис.II9), получаем:

$$N = \ln k / 2\ln \tau. \qquad (П.5)$$

Условно принимая, что $k = 10^{-2}$ (результат не очень сильно зависит от выбора величины k), получаем из (П.5) следующие значения для наиболее типичных коэффициентов отражения:

τ	0,8	0,85	0,9	0,95
N	I0	I4	22	45

Для того, чтобы оценить порядок интерференции в интерферометре Фабри-Перо, нужно разность хода между двумя соседними лучами, выходящими из интерферометра, разделить на длину световой волны. Поскольку обычно расстояние между пластинами $П_1$ и $П_2$ выбирается порядка нескольких сантиметров, а разность хода между соседними лучами порядка удвоенного расстояния между пластинами, имеем $m = 10^5$-10^6. Учитывая, что N = I0-I00, получаем в итоге разрешающую способность спектрометра Фабри-Перо $R = mN = 10^6$-10^8. Это очень большая величина, которая на несколько порядков превышает типичные значения R для призменных или решеточных спектрометров. Совершенно ясно, что для увеличения разрешающей способности спектрального аппарата Фабри-Перо нужно увеличивать расстояние между зеркалами, а также коэффициент отражения покрытий τ. Однако, при этом нужно иметь в виду, что при росте τ существенно уменьшается интенсивность света, проведенного через прибор. Поэтому обычно выбирают некоторое оптимальное значение τ = 0,8-0,9.

Другой важный параметр спектрального аппарата - свободная спектральная область. Так как величина свободной спектральной области равна отношению минимальной длины волны в рабочем диапазоне к порядку интерференции, получаем, что для спектрометра Фабри-Перо эта область очень узкая - всего лишь 10^{-5}-$10^{-6}\ \lambda$. Поэтому основное применение этого прибора - изучение тонкой структуры оптических спектров в узкой спектральной области.

Запись спектра исследуемого сигнала обычно осуществляется с помощью т.н. "сканирующего" интерферометра Фабри-Перо следующим образом. Интенсивность интерференционной картины в определенной точке регистрируется фотоэлементом. Одно из зеркал поступательно перемещается, так что расстояние между зеркалами контролируемым образом изменяется. Каждому положению зеркала соответствует выполнение условия максимума интерференции для определенной длины волны. Полученная зависимость амплитуды сигнала, снимаемого с фотоэлемента, от положения зеркала, легко может быть пересчитана в искомый оптический спектр сигнала.

ЛИТЕРАТУРА

I. Крауфорд Ф. Волны. М.: Наука, 1984. 510 с.
2. Киттель Ч., Найт В., Рудерман М. Механика. М.: Наука, 1983. 447 с.
3. Савельев И.В. Курс общей физики, т.I. Механика, молекулярная физика. М.: Наука, 1987. 432 с.
4. Савельев И.В. Курс общей физики, т.II. Электричество и магнетизм. М.: Наука, 1988. 496 с.
5. Ландсберг Г.С. Оптика. М.: Наука, 1976. 926 с.
6. Калашников С.Г. Электричество. М.: Наука, 1985. 576 с.
7. Матвеев А.Н. Оптика. М.: Высшая школа, 1985. 351 с.
8. Матвеев А.Н. Механика и теория относительности. М.: Высшая школа, 1986. 320 с.
9. Пейн Г. Физика колебаний и волн. М.: Мир, 1979. 389 с.
10. Бишоп Р. Колебания. М.: Наука, 1986. 190 с.
11. Горелик Г.С. Колебания и волны. М.: ГИТТЛ, 1950. 551 с.

Учебное издание

Козлов Сергей Николаевич

Колебания и волны

Зав. редакцией Н.М.Глазкова
Редактор С.П.Нестеренко
Художественный редактор Ю.М.Добрянская