1. 1)Определить значение параметра ν, при котором функция $f(x,\nu)=\begin{cases}\varphi(x,\nu),\ x\in A\varphi\\ 0,\ x\notin A\varphi,\end{cases}$ является плотностью распределения некоторой случайной величины ξ_1. Функция $\varphi(x,\ \nu)$ и множество $A\varphi$ (быть может, также зависящее от параметра ν) заданы. Построить график функции $f(x,\ \nu)$.

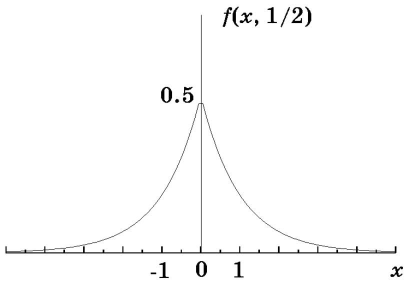
2) Найти $\mathbf{M}\xi_1$ и $\mathbf{D}\xi_1$.

3) Задана функция $y = g(x)$; построить её график, а также найти плотность распределения случайной величины $\eta_1 = g(\xi_1)$.

<u>Решение на примере № 11</u> ($f(x) = \nu e^{-|x|}$, $A\varphi = \mathbb{R}$, $g(x) = 1 + x^2$).

1) f является плотностью распределения некоторой случайной величины, если она удовлетворяет условию $\int\limits_{A\varphi} f(x)dx=1,$ то есть, в нашем случае, $\int\limits_{\mathbb{R}}\nu\exp(-|x|)dx=2\int\limits_0^{+\infty}\nu e^{-x}dx=$

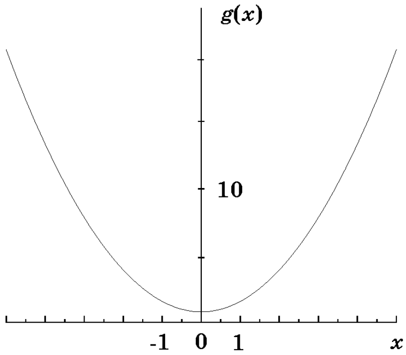
$$=-2\nu e^{-x}\Big|_0^{+\infty}=2\nu\Rightarrow\nu=\frac{1}{2}.$$



2) По определению, $\mathbf{M}\xi_1=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}xf(x,\nu)dx=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2}xe^{-|x|}dx=0,$ так как подынтегральная функция нечётна (x – нечётная, $e^{-|x|}$ – чётная). Также по определению $\mathbf{D}\xi_1=\mathbf{M}(\xi_1-\mathbf{M}\xi_1)=$

$$=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}(x-\mathbf{M}\xi_1)^2\ f(x,\nu)dx=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2}x^2e^{-|x|}dx-(\mathbf{M}\xi_1)^2=\int\limits_0^{+\infty}x^2e^{-x}dx-0=$$

$$=-x^2e^{-x}\Big|_0^{+\infty}+2\int\limits_0^{+\infty}xe^{-x}dx=-2xe^{-x}\Big|_0^{+\infty}+2\int\limits_0^{+\infty}e^{-x}dx=-2e^{-x}\Big|_0^{+\infty}=2.$$



3) (Графики обязательно должны быть построены друг под другом; хотя совершенно непонятно зачем:)).

$$p_{\eta_1}(y)=\begin{cases}f\left(g^{-1}(y),\nu\right)\cdot J^{-1}\left(g^{-1}(y)\right),\ y\ge 1\\ 0,\ y<1.\end{cases}\qquad g^{-1}(y)=\pm\sqrt{y-1};$$

$J(x)=\left(x^2+1\right)'=2x,$ поэтому $p_{\eta_1}(y)=\begin{cases}\dfrac{e^{\sqrt{y-1}}+e^{-\sqrt{y-1}}}{4\sqrt{y-1}},\ y\ge 1\\ 0,\ y<1.\end{cases}$

2. Случайная величина ξ_2 имеет нормальное распределение с заданными параметрами $(a,\ \sigma)$, где $a = \mathbf{M}\xi_2$, $\sigma^2 = \mathbf{D}\xi_2$.

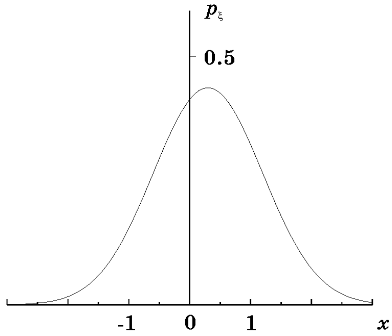
1) Задана функция $y = h(x)$. Построить её график. Найти плотность распределения случайной величины $\eta_2 = h(\xi_2)$.

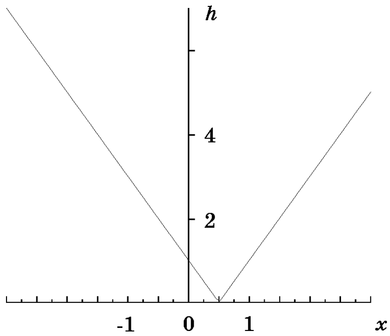
2) Используя таблицы нормального распределения, при заданных c и d найти $P\{c \le \eta_2 \le d\}$.

<u>Решение на примере № 11</u> ($h(x) = |2x - 1|$, $a = 0.3$, $\sigma = 0.9$, $c = 1$, $d = 2$).

1) $y = h(x) = |2x - 1|$, поэтому $x=\frac{1\pm y}{2}=h^{-1}(y)$. $|J(x)| = 2$; $p_{\eta_2}(y)=\sum\limits_{x\in h^{-1}(y)}p_{\xi_2}(x)\cdot\left|J(x)\right|^{-1}=$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{0.9\sqrt{2\pi}}\left(e^{-\frac{(0.4+y)^2}{8\cdot 0.81}}+e^{-\frac{(0.4-y)^2}{8\cdot 0.81}}\right)=\frac{1}{1.8\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2+0.16}{2\cdot(1.8)^2}}\cdot 2\operatorname{ch}\frac{0.4y}{(1.8)^2}.$$





2) $$P\{c \le \eta_2 \le d\} = \frac{1}{1.8\sqrt{2\pi}}\left(\int_c^d e^{-\frac{(y+0.4)^2}{1.62}}dy + \int_c^d e^{-\frac{(y-0.4)^2}{1.62}}\right) = I_1 + I_2.$$

$$I_1 = \left(t = \frac{y+0.4}{1.8}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{7/9}^{4/3} e^{-\frac{t^2}{2}}dt = \Phi_0\left(\frac{4}{3}\right) - \Phi_0\left(\frac{7}{9}\right) \approx 0.1565;$$

$$I_2 = \left(t = \frac{y-0.4}{1.8}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{1/3}^{8/9} e^{-\frac{t^2}{2}}dt = \Phi_0\left(\frac{8}{9}\right) - \Phi_0\left(\frac{1}{3}\right) \approx 0.184;$$

$$P\{1 \le \eta_2 \le 2\} = 0.1565 + 0.184 = 0.3405.$$

3. Случайная величина ξ_3 имеет распределение Пуассона с параметром λ. При заданных λ, m и n найти $P\{m \le \xi_3 \le n\}$.

Решение на примере № 11 ($\lambda = 4$, $m = 1$, $n = 7$).

Для распределения Пуассона $p_k = \dfrac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} \Rightarrow$

$$\Rightarrow P\{m \le \xi_3 \le n\} = \sum_{k=m}^{n} p_k = e^{-4}\sum_{k=1}^{7}\frac{4^k}{k!} = e^{-4}(4 + 8 + \frac{32}{3} + \frac{32}{3} + \frac{128}{3\cdot 5} +$$

$$+ \frac{256}{3\cdot 5\cdot 3} + \frac{1024}{3\cdot 5\cdot 3\cdot 7}) = e^{-4}\left(12 + \frac{64\cdot 105 + 128\cdot 21 + 256\cdot 7 + 1024}{315}\right) = \frac{16004}{e^4\cdot 315} \approx 0.942.$$