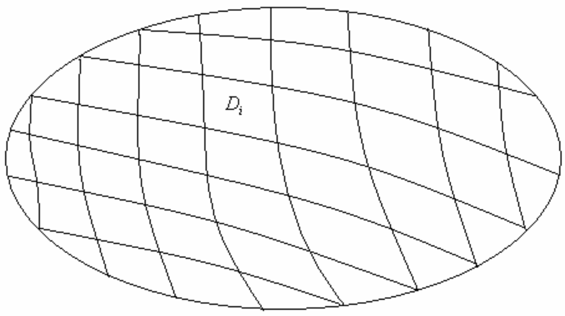
Кратные интегралы.

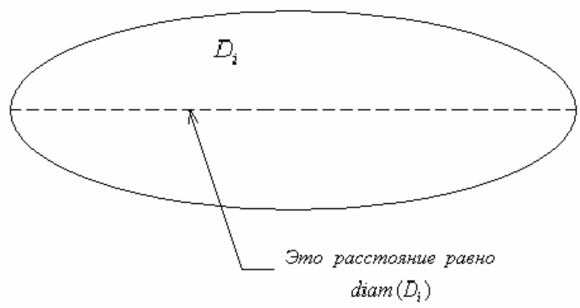
1. Двойной интеграл.

Мы будем рассматривать функции $f(x,y)$, определённые на квадрируемом (то есть имеющем площадь) множестве *D*. Если вспомнить теорию определённого интеграла, то мы начали её изложение с понятия разбиения Т отрезка $[a,b]$. По аналогии, определим разбиение Т квадрируемого множества *D*, как представление множества *D* в виде объединения конечного числа квадрируемых частей, $D=\bigcup_{i=1}^{n} D_i$.

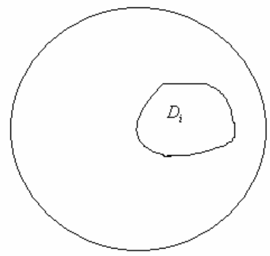


Практически всегда *D* представляет собой криволинейную трапецию или конечное объединение криволинейных трапеций. Можно считать, что и разбиение *D* на части D_i определяется с помощью непрерывных кривых, то есть все D_i также криволинейные трапеции или их объединения.

В одномерном случае мы рассматривали длины частей разбиения $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$. В двумерном случае обобщением понятия длины Δx_i будет площадь D_i. Однако нам потребуется также понятие диаметра множества D, обозначаемого $diam(D)$. Эта величина определяется как точная верхняя грань расстояний между точками множества *D*. В частности, если *D* – круг, то $diam(D)$ – это как раз длина диаметра круга в привычном смысле. В общем случае это понятие поясняет рисунок:

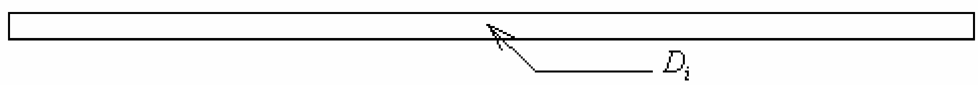


Ясно, что если *diam(D_i)* невелик, то и площадь D_i также невелика, поскольку неравенство $diam(D_i) < \delta$ означает, что D_i содержится в некотором круге радиуса δ, и, значит имеет площадь не больше, чем $\pi\delta^2$.



Действительно, возьмём произвольную точку множества D в качестве центра этого круга. Так как $diam(D_i) < \delta$, остальные точки D_i лежат внутри круга.

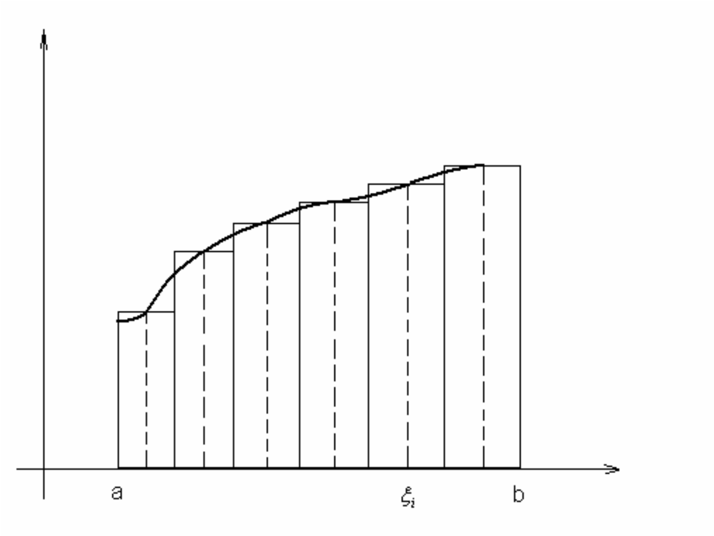
Однако площадь круга может быть невелика, а $diam(D_i)$ достаточно велик. Пример – очень тонкий прямоугольник.



Определим диаметр *d(T)* разбиения *T* как наибольший из диаметров $diam(D_i)$ частей этого разбиения.

Далее, как и в одномерном случае, выберем точки $N_i \in D_i$ (было: $\xi_i \in [x_{i-1}; x_i]$). Пусть N_i имеет координаты (ξ_i, η_i). Важную роль в дальнейшем будет играть понятие интегральной суммы $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i) \cdot пл(D_i) = \sigma(f, T, \{N_i\})$.

Так же, как и в одномерном случае, эта величина имеет простой геометрический смысл. Вспомним, что сумма $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ представляла собой *площадь ступенчатой фигуры* вида:



(для простоты считаем, что $f(x) \geq 0$).

Вспомним также, что объём цилиндра с основанием, имеющим площадь *S* и с высотой *h* равен $S \cdot h$.

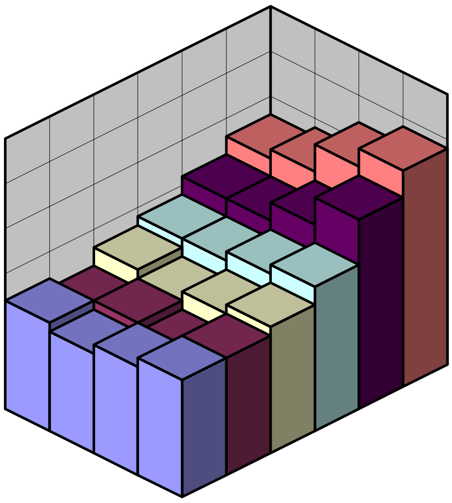
Поэтому интегральная сумма $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i) пл(D_i)$ равна объёму тела, состоящего из цилиндров с высотой $f(\xi_i, \eta_i)$ (для простоты считаем, что $f(x, y) \geq 0$) и основаниями D_i.

<u>Определение.</u> Пусть $f(x, y)$ - ограниченная на квадрируемом множестве D функция. Пусть $I \in R$. Если $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ $\forall T : d(T) < \delta$ $\forall \{N_i\}$ $|\sigma(f, T, \{N_i\}) - I| < \varepsilon$, то будем говорить, что *f* – интегрируема на *D* функция и $I = \iint\limits_{D} f(x, y) dxdy$.

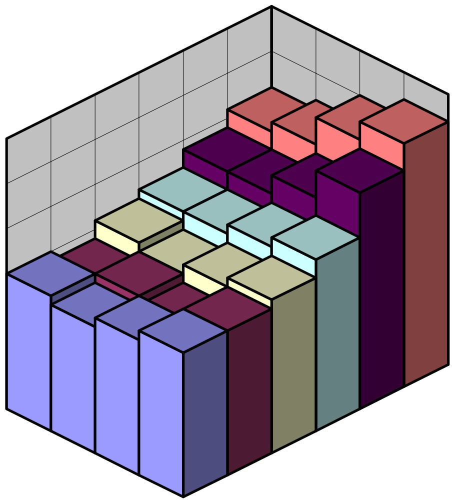
<u>Замечание.</u> Это определение несколько отличается от одномерного, в котором отсутствовало требование ограниченности функции $f(x)$. Мы тогда доказывали необходимое условие интегрируемости: *если* $f(x)$ *интегрируема на* $[a, b]$, *то* $f(x)$ *ограничена на* $[a, b]$. Здесь условие ограниченности включено в определение.

Критерий существования $\int\limits_a^b f(x)dx$ формулировался в терминах *сумм Дарбу* вида $s(T)=\sum\limits_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i$, $S(T)=\sum\limits_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i$, где $m_i = \inf\limits_{x\in[x_{i-1};x_i]} f(x)$, $M_i = \sup\limits_{x\in[x_{i-1};x_i]} f(x)$, то есть m_i - нижняя грань, а M_i - верхняя грань множества значений $f(x)$ при $x\in[x_{i-1};x_i]$.

Аналогично обозначим для ограниченной на D функции $f(N)$ $m_i=\inf\limits_{N\in D_i} f(N)$, $M_i=\sup\limits_{N\in D_i} f(N)$ (эти числа существуют ввиду предполагаемой ограниченности



Нижняя сумма Дарбу



Верхняя сумма Дарбу

$f(N)$ на D и, значит, на всех D_i и определим суммы Дарбу равенствами $s(T)=\sum\limits_{i=1}^{n} m_i \cdot пл(D_i)$, $S(T)=\sum\limits_{i=1}^{n} M_i \cdot пл(D_i)$. Эти величины представляют собой объемы тел, состоящих из цилиндров с основаниями D_i и высотами, соответственно m_i и M_i. Ясно, что при любом выборе $\{N_i\}$ $s(T)\le\sigma(f,T,\{N_i\})\le S(T)$.

Вполне аналогично одномерному случаю можно доказать критерий интегрируемости.

Теорема. Ограниченная $f(x,y)$ интегрируема на квадрируемом множестве D $\Leftrightarrow$ $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall T: d(T)<\delta\ \ S(T)-s(t)<\varepsilon$

(На экзамене ограничиваемся формулировкой).

Из этого критерия следует теорема.

Теорема. Если $f(x,y)$ непрерывна на квадрируемом множестве D, то $f(x,y)$ интегрируема на этом множестве.

(На экзамене достаточно формулировки).

2. *Свойства двойных интегралов*

Свойство 1. Если f_1, f_2 - интегрируемые на D функции, а α_1, α_2 - числа, то $\iint\limits_D (\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2) dxdy = \alpha_1 \iint\limits_D f_1 dxdy + \alpha_2 \iint\limits_D f_2 dxdy$. Иными словами, ***интеграл - линейный функционал.***

Свойство 2. Если f - интегрируема на $D_1 \cup D_2$, причем если площадь пересечения $D_1 \cup D_2$ равна 0, то $\iint\limits_{D_1 \cup D_2} fdxdy = \iint\limits_{D_1} fdxdy + \iint\limits_{D_2} fdxdy$. (Аддитивность интеграла по множеству).

Свойство 3. Если f - интегрируемая на D функция и $f \geq 0$, то $\iint\limits_D fdxdy \geq 0$.

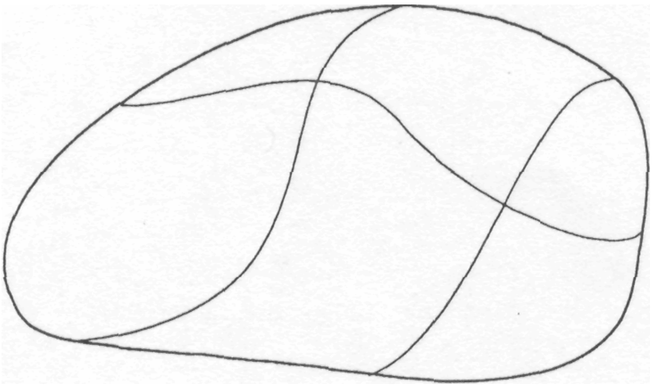
Свойство 4. Если f_1, f_2 - интегрируемые на D функции и $f_1 \geq f_2$, то $\iint\limits_D f_1 dxdya \geq \iint\limits_D f_2 dxdy$.

Свойство 5. Если f - интегрируемая на D функция, то $|f|$ - также интегрируемая, причем $\left|\iint\limits_D fdxdy\right| \leq \iint\limits_D |f| dxdy$.

Свойство 6. Если f - интегрируемая на D функция, причем $m < f < M$, где m, M ограничивающие множество значений f числа, то $m \cdot пл(D) \leq \iint fdxdy \leq M \cdot пл(D)$ (пл.(D) – площадь D), т.е. $\exists \gamma, m \leq \gamma \leq M$: $\iint\limits_D fdxdy = \gamma \cdot m(D)$. Если, кроме того, f - непрерывна на D, то $\exists (\xi, \eta) \in D$: $\iint\limits_D fdxdy = f(\xi, \eta) \cdot m(D)$.

Доказывать эти свойства мы не будем - они вполне аналогичны свойствам обычного интеграла.

Можно доказать, что если f - непрерывная на множестве D функция, то



f -интегрируема на D

Свойство 2 позволяет утверждать, что если f имеет разрывы на D лишь вдоль конечного числа непрерывных линий, разбивающих D на квадрируемые области, то f - интегрируема на D, т.к., по свойству 2, интеграл по D, есть просто сумма конечного числа интегралов по полученным частям D (где f - непрерывна и, значит, интегрируема).

3. Вычисление двойных интегралов

Двойной интеграл – новый пока для нас объект, и сначала мы укажем способ его вычисления сведением к более привычным объектам. Сначала рассмотрим двойной интеграл по прямоугольной области D, стороны которой параллельны осям координат.

Теорема. Пусть для $f(x,y)$ существует $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$, где $D:\{(x,y)\mid a\le x\le b; c\le y\le d\}$. Кроме того, пусть для любого $x\in[a,b]$ существует $J(x)=\int\limits_c^d f(x.y)dy$.

Тогда существует и интеграл, называемый повторным, и имеет место равенство:

$$\int_a^b J(x)dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x,y)dy$$

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b dx \int_c^d f(x,y)dy$$

Доказательство.

Разобьём прямоугольник D на прямоугольники, обозначенные D_{ij}, прямыми, параллельными оси y через точки $a = x_o < x_1 < ... < x_m = b$ и прямыми, параллельными оси x и проходящими через точки $c = y_o < y_1 < ... < y_l = d$. Таким образом, $D_{i,j} = \{(x,y),\ x \in [x_{i-1}, x_i],\ y \in [y_{j-1,} y_j]\}$, $i = 1,...,m, j = 1,...k$.

Пусть $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}, \Delta y_i = y_i - y_{i-1}$, $m_{i,j}$ и $M_{i,j}$, соответственно, нижняя и верхняя грани функции $f(x,y)$ на D_{ij}, откуда $m_{i,j} \le f(x,y) \le M_{i,j}$ интегрируем это неравенство по y: $m_{i,j}\Delta y_i \le \int_{y_{j-1}}^{y_j} f(\xi, y)dy \le M_{i,j}\Delta y_i$. Суммируя эти неравенство по j от *j=1* до *j=k*: $\sum_{j=1}^{k} m_{i,j}\Delta y_i \le J(\xi_i) \le \sum_{j=1}^{k} M_{i,j}\Delta y_i$. Умножим все части этих неравенств на $\Delta x_i > 0$ и суммируем всё по i от i=1 до m: $\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{k} m_{i,j}\Delta x_i \Delta y_j \le \sum_{i=1}^{m} J(\xi_i)\Delta x_i \le \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{k} M_{i,j}\Delta x_i \Delta y_j$.

или

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{k} m_{i,j} \cdot пл.D_{i,j} \le \sum_{i=1}^{m} J(\xi_i)\Delta x_i \le \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{k} M_{i,j} \cdot пл.D_{i,j}$$

или

$$s(T) \le \sum_{i=1}^{m} J(\xi_i)\Delta x_i \le S(T)$$

где T – разбиение D на прямоугольники D_{ij}. При $d(T) \longrightarrow 0$ стремится к нулю и $\max \Delta x_i$. Кроме того, $s(T), S(T) \longrightarrow \iint_D f dxdy$. Значит, интеграл $\int_a^b dx \int_c^d f(x,y)dy$ существует и равен $\iint_D f(x,y)dxdy$, что и утверждалось.

В случае криволинейной трапеции.

Справедлива такая теорема:

Теорема (Фубини). Пусть область D задана неравенствами $a \le x \le b$, $\Phi_1(x) \le y \le \Phi_2(x)$, где $\Phi_1(x), \Phi_2(x) \in C[a,b]$. Пусть существует $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ и для любого $x \in [a,b]$ существует $J(x) = \int\limits_{\Phi_1(x)}^{\Phi_2(x)} f(x,y)dy$. Тогда существует интеграл $\int\limits_a^b J(x)dx = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\Phi_1(x)}^{\Phi_2(x)} f(x,y)dy$ и он равен $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$.

Доказательство. Так как $\Phi_1(x)$ непрерывна на [a,b], существует её минимальное значение *c* на этом отрезке. Аналогично, существует максимальное значение d функции $\Phi_2(x)$ на [a, b]. Заключим область D в прямоугольник D*, состоящий из точек (x,y), $a \le x \le b$, $c \le y \le d$. На этом прямоугольнике рассмотрим функцию $f^*(x,y) = \begin{cases} f(x,y), если (x,y) \in D \\ 0, если (x,y) \in D^* \setminus D \end{cases}$

Условия предыдущей теоремы для f* выполнены. Она интегрируема в D, равна 0 (и, значит, интегрируема) в D*\D. Следовательно, она интегрируема на всей D*. При этом

$$\iint\limits_{D^*} f^* dxdy = \iint\limits_D f^* dxdy + \iint\limits_{D^* \setminus D} f^* dxdy = \iint\limits_D f dxdy .$$

Наконец, для любого $x \in [a,b]$

$$\int\limits_c^d f^*(x,y)dy = \int\limits_c^{\Phi_1(x)} f^*(x,y)dy + \int\limits_{\Phi_1(x)}^{\Phi_2(x)} f^*(x,y)dy + \int\limits_{\Phi_2(x)}^{d} f^*(x,y)dy = \int\limits_{\Phi_1(x)}^{\Phi_2(x)} f^*(x,y)dy .$$

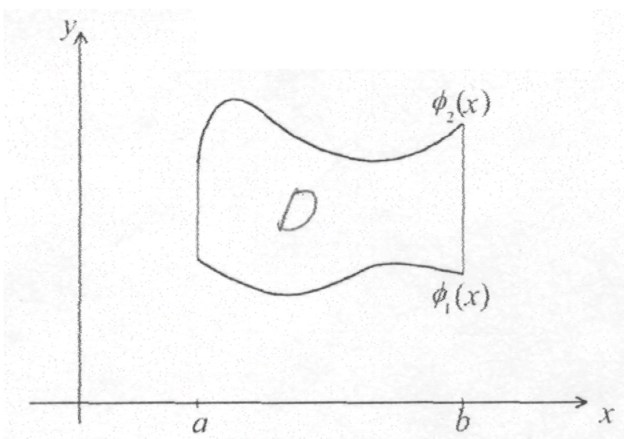
По доказанному в предыдущей теореме,

$$\iint\limits_{D^*} f^* dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_c^d f^*(x,y)dy .$$

Откуда сразу получаем:

$$\iint\limits_D f dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\Phi_1(x)}^{\Phi_1(x)} f(x,y)dy ,$$

Что и требовалось доказать.



<u>Следствие</u>: Пусть *f*(*x*,*y*) непрерывна в области *D*, ограниченной сверху графиком непрерывной функции $y = \phi_2(x)$, снизу - $y = \phi_1(x)$, $x \in [a;b]$, а по бокам - отрезками вертикальных прямых $x = a$ и $x = b$. Тогда

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x,y)dy.$$

<u>Доказательство</u>. Из непрерывности *f*(*x*,*y*) сразу следует её интегрируемость на *D*. Кроме того, для любого $x \in [a,b]$ функция *f*(*x*,*y*) непрерывна (а, значит интегрируема по *y*). Все условия теоремы выполнены.

<u>Замечание.</u> Если область *D* можно ограничить так: $c \le y \le d,\ \psi_1(y) \le x \le \psi_1(y),\ \psi_1, \psi_2 \in C[c,d]$, то

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx.$$

Смысл этой теоремы ясен – указан способ сведения нового для нас объекта – двойного интеграла – к уже изученным обычным интегралам.

При вычислении интегралов часто бывает удобно сделать замену переменных $x = x(u,v),\ y = y(u,v)$, где $x(u,v), y(u,v), \frac{\partial x}{\partial u}(u,v), \frac{\partial x}{\partial v}(u,v), \frac{\partial y}{\partial u}(u,v), \frac{\partial y}{\partial v}(u,v)$ – непрерывны в некоторой области $\Delta \subset \mathbf{R}^2$. Впоследствии мы будем часто писать просто $\frac{\partial x}{\partial u}$ вместо $\frac{\partial x}{\partial u}(u,v)$ и т.п. и, кроме того, говорить при выполнении вышеупомянутых условий, что *x* и *y* – непрерывно дифференцируемые в Δ функции.

Пусть при этом формулы $x = x(u,v), y = y(u,v)$ задают <u>взаимно-однозначное</u> отображение квадрируемых областей: $D \leftrightarrow \Delta, (x,y) \in D, (u,v) \in \Delta$. Кроме того, не стремясь к минимальности условий, потребуем, чтобы всюду на области Δ

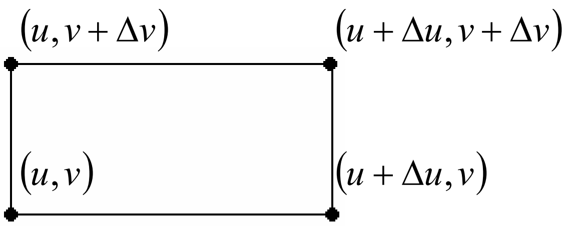
$$J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$ не равнялся 0.

<u>Теорема.</u> При сформулированных выше условиях для непрерывной на D функции $f(x, y)$ выполняется равенство:

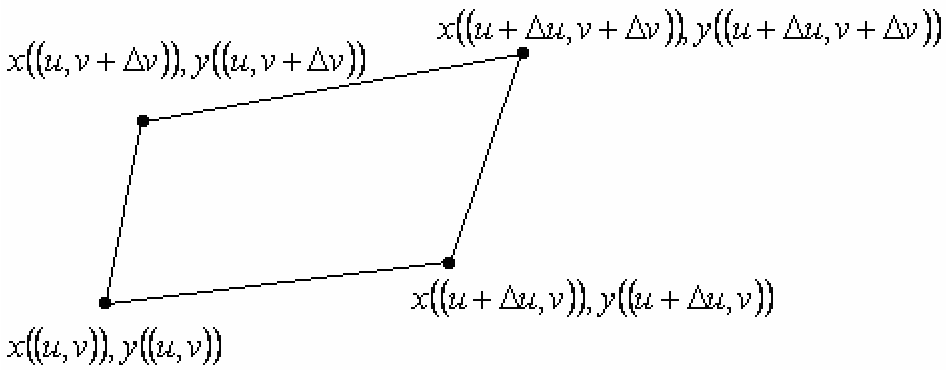
$$\iint_D f(x, y)dxdy = \iint_\Delta f(x(u, v), y(u, v))|J|dudv.$$

Строгое доказательство этой теоремы потребовало бы значительных усилий из-за обилия технических деталей. Мы изложим здесь схему доказательства. Во-первых, оба интеграла в формулировке теоремы существуют, поскольку $f(x, y)$ – непрерывная функция.

Рассмотрим разбиение области Δ прямыми, параллельными осям u и v. Рассмотрим его часть, имеющую вид прямоугольника с вершинами



При отображении $x = x(u, v), y = y(u, v)$ эти точки перейдут, соответственно, в точки



Далее, при $\Delta u \to 0, \Delta v \to 0$

$$x(u, v+\Delta v) - x(u, v) = \frac{\partial x}{\partial v}(u, v)\Delta v + \overset{=}{o}(\Delta v)$$

$$y(u, v+\Delta v) - y(u, v) = \frac{\partial y}{\partial v}(u, v)\Delta v + \overset{=}{o}(\Delta v)$$

$$x(u+\Delta u, v) - x(u, v) = \frac{\partial x}{\partial u}(u, v)\Delta u + \overset{=}{o}(\Delta u)$$

$$y(u+\Delta u, v) - y(u, v) = \frac{\partial y}{\partial u}(u, v)\Delta u + \overset{=}{o}(\Delta u)$$

$$x(u+\Delta u, v+\Delta v) - x(u, v+\Delta v) = \frac{\partial x}{\partial u}(u, v+\Delta v)\Delta u + \overset{=}{o}(\Delta u)$$

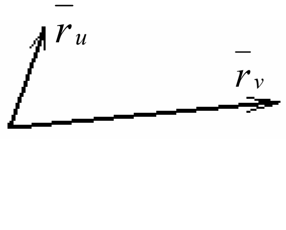
$$y(u+\Delta u, v+\Delta v) - y(u, v+\Delta v) = \frac{\partial y}{\partial u}(u, v+\Delta v)\Delta u + \overset{=}{o}(\Delta u)$$

$$x(u+\Delta u, v+\Delta v) - x(u+\Delta u, v) = \frac{\partial x}{\partial v}(u, v+\Delta v)\Delta v + \overset{=}{o}(\Delta v)$$

$$y(u+\Delta u, v+\Delta v) - y(u+\Delta u, v) = \frac{\partial y}{\partial v}(u, v+\Delta v)\Delta v + \overset{=}{o}(\Delta v)$$

При малых $\Delta u, \Delta v$ производные $\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial v}$, вычисленные в точках $(u+\Delta u, v), (u, v+\Delta v)$, мало отличаются от соответствующих производных, вычисленных в точке (u, v), поэтому $\bar{r}_u(u, v), \bar{r}_v(u, v)$ мало отличаются от $\bar{r}_u(u+\Delta u, v), \bar{r}_v(u+\Delta u, v)$ и $\bar{r}_u(u, v+\Delta v), \bar{r}_v(u, v+\Delta v)$, соответственно, и рассматриваемый четырёхугольник представляет собой «почти параллелограмм».

Площадь параллелограмма со сторонами $\bar{r}_u, \bar{r}_v$



равна модулю определителя $\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = J$, т.е. равна $|J|$.

Поэтому при преобразовании интегральная сумма $\sum_{i=1}^{n} f\left(x(u_i, v_i), y(u_i, v_i)\right)\left|J(u_i, v_i)\right|\Delta u \Delta v$ близка к интегральной сумме $\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i) пл.(D_i)$, и т.к. соответствующие интегральные суммы для интегралов, стоящих в правой и левой частях доказываемого равенства мало отличаются друг от друга, то и интегралы совпадают.

Замечание. Утверждение теоремы сохранится, если условие взаимной однозначности отображения $x = x(u,v), y = y(u,v)$ нарушится на множестве нулевой площади.

Пример. Переход к полярным координатам.

Пусть требуется вычислить $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ по области D, которая задаётся в полярных координатах условиями

$$\begin{cases} \alpha \le \phi \le \beta \\ r \le r(\phi) \end{cases}$$

Сделаем замену переменных

$$\begin{cases} x = r\cos\phi \\ y = r\sin\phi \end{cases}$$

При этой замене нарушается взаимная однозначность отображения. Точке (0,0) соответствует целый отрезок $[\alpha, \beta]$ на оси ϕ. Однако точка и отрезок имеют нулевую площадь, и теорема справедлива. Осталось вычислить J. $\frac{\partial x}{\partial r} = \cos\phi, \frac{\partial y}{\partial r} = \sin\phi, \frac{\partial x}{\partial \phi} = -r\sin\phi, \frac{\partial y}{\partial \phi} = r\cos\phi.$

$$J = \begin{vmatrix} \cos\phi & -r\sin\phi \\ \sin\phi & r\cos\phi \end{vmatrix} = r\cos^2\phi + r\sin^2\phi = r$$

Следовательно, $\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int_\alpha^\beta d\phi \int_0^{r(\phi)} f(r\cos\phi, r\sin\phi) r dr$.

Полярные координаты бывают очень полезны при вычислениях. Рассмотрим **пример**. Найти $I = \int_0^\infty e^{-x^2} dx$.

Решение. I — это несобственный интеграл, и прежде всего следует установить его сходимость. По определению, $\int\limits_0^\infty e^{-x^2}dx = \int\limits_0^1 e^{-x^2}dx + \int\limits_1^\infty e^{-x^2}dx$. Первый из интегралов — собственный, второй — сходится по 1-й теореме о сравнении, так как при $x \ge 1$ справедливы неравенства $x^2 \ge x \Rightarrow -x^2 \le -x, e^{-x^2} \le e^{-x}$, а $\int\limits_1^\infty e^{-x}dx$, очевидно, сходится.

Обозначим $I_R = \int\limits_0^R e^{-x^2}dx$ (очевидно, $I_R \to I, R \to \infty$). Тогда, поскольку обозначение переменной интегрирования можно выбрать произвольным, $I_R^2 = I_R \cdot I_R = \int\limits_0^R e^{-x^2}dx \cdot 0\int\limits^R e^{-y^2}dy = \iint\limits_{S_R} e^{-x^2-y^2}dxdy$, где S_R — квадрат, а $C_R, C_{\sqrt{2}R}$ — четверти круга, соответственно, радиусов R и $\sqrt{2}R$. Так как $e^{-x^2-y^2} \ge 0$, то по свойствам 2 и 3 двойного интеграла $\iint\limits_{C_R} e^{-x^2-y^2}dxdy \le I_R^2 \le \iint\limits_{C_{\sqrt{2}R}} e^{-x^2-y^2}dxdy$. В интеграле $\iint\limits_{C_R} e^{-x^2-y^2}dxdy$ перейдем к полярным координатам:

$$\iint\limits_{C_R} e^{-x^2-y^2}dxdy = \int\limits_0^{\pi/2} d\phi \int\limits_0^R e^{-r^2} rdr = \frac{\pi}{2}\int\limits_0^R e^{-r^2}\frac{1}{2}dr^2 = \frac{\pi}{4}\left(e^{-r^2}\Big|_0^R \right) = \frac{\pi}{4}\left(1 - e^{-R^2}\right).$$

Аналогично, $\iint\limits_{C_{\sqrt{2}R}} e^{-x^2-y^2}dxdy = \frac{\pi}{4}\left(1 - e^{-2R^2}\right)$ и $\frac{\pi}{4}\left(1 - e^{-R^2}dx\right) \le I_R^2 \le \frac{\pi}{4}\left(1 - e^{-2R^2}dx\right)$. При стремлении R к ∞ получаем, что $\lim\limits_{R\to\infty} I_R^2 = \frac{\pi}{4}$, то есть $I^2 = \frac{\pi}{4}, I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

4. Тройные интегралы

Рассмотрим кубируемую область в трехмерном пространстве $\mathbf{V} \subset \mathbf{R}^3$. Разбиение T на части V_i осуществляется непрерывными поверхностями. Диаметр разбиения определяется аналогично двумерному случаю. Также, по аналогии, можно определить для функции $f(x, y, z)$, разбиения T области V и выбранных точек $M_i(x_i, y_i, z_i) \in V_i$ интегральную сумму $\sigma(f, T, \{M_i\}) = \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\mu(V_i)$, где $\mu(V_i)$ обозначает объем области V_i.

<u>Определение.</u> Пусть $I \in R$ такое число, что $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall T, d(T) < \delta$ $\forall \{\mu_i\} |\sigma(f, t\{\mu_i\}) - I| < \varepsilon$. Тогда мы говорим, что f интегрируема на V, число I есть интеграл f по области V и обозначаем это так: $I = \iiint\limits_V f(x, y, z)dxdydz$.

Как и в случае двойного интеграла, выполняются аналогичные свойства 1-6. Можно доказать, что если $f(x, y, z)$ непрерывна на *V*, то она интегрируема на *V*. Точно также можно убедиться в том, что если точки разрыва *f* лежат на конечном числе непрерывных поверхностей, и разбивающих *V* на кубируемые области, то *f* интегрируема на *V*.

Вычисление тройного интеграла производится по следующему правилу.

<u>Теорема.</u> Пусть *V* задана следующими неравенствами: $\psi_1(x, y) \le z \le \psi_2(x, y), (x, y) \in D$. D — квадрируемая замкнутая область на плоскости, ψ_1, ψ_2 — непрерывные функции на D. Тогда

$$\iiint\limits_V f(x, y, z)dxdydz = \iint\limits_D dxdy \int\limits_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} f(x, y, z)dz$$

<u>Замечание.</u> Если область D задана неравенствами $a \le x \le b, \phi_1(x) \le y \le \phi_2(x)$, где ϕ_1, ϕ_2 — непрерывные функции на $[a, b]$, то

$$\iiint\limits_V f(x, y, z)dxdydz = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} dy \int\limits_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} f(x, y, z)dz.$$

Сформулируем общую теорему о замене переменных.

<u>Теорема.</u> Пусть отображение $x = x(u, v, w), \ y = y(u, v, w), \ z = z(u, v, w)$ устанавливает взаимно однозначное соответствие между областями $\Delta, (u, v, w) \in \Delta$ и $V, (x, y, z) \in V$, причем функции x, y, z — непрерывно дифференцируемые и $J=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w}\\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w}\end{vmatrix}\neq 0$ ни в одной точке Δ. Пусть $f(x,y,z)$ — непрерывная функция. Тогда

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz=\iiint\limits_\Delta f\big(x(u,,v,w),y(u,v,w),z(u,v,w)\big)\cdot|J|dudvdw$$

Как и для двойного интеграла, теорема остается верной в случае нарушения ее условий на множестве нулевого объема.

<u>Пример 1.</u> Переход к цилиндрическим координатам. Он осуществляется с помощью функций: $x=r\cos\phi, y=r\sin\phi, z=z$.

При этом якобиан равен $J=\begin{vmatrix}\cos\phi & -r\sin\phi & 0\\ \sin\phi & r\cos\phi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\cos\phi & -r\sin\phi\\ \sin\phi & r\cos\phi\end{vmatrix}=r\cos^2\phi+r\sin^2\phi=r$.

<u>Пример 2.</u> Переход к сферическим координатам осуществляется функциями $x=r\cos\phi\cos\psi, y=r\sin\phi\cos\psi, z=r\sin\psi$.

Якобиан преобразования равен $J=\begin{vmatrix}\cos\phi\cos\psi & -r\sin\phi\cos\psi & -r\cos\phi\sin\psi\\ \sin\phi\cos\psi & r\cos\phi\cos\psi & -r\sin\phi\sin\psi\\ \sin\psi & 0 & r\cos\psi\end{vmatrix}=$

(разложение по 3-й строке) $=r\cos\psi\begin{vmatrix}\cos\phi\cos\psi & -r\sin\phi\cos\psi\\ \sin\phi\cos\psi & r\cos\phi\cos\psi\end{vmatrix}+\sin\psi\begin{vmatrix}-r\sin\phi\cos\psi & -r\cos\phi\sin\psi\\ r\cos\phi\cos\psi & -r\sin\phi\sin\psi\end{vmatrix}=$

(выделим общие множители у столбцов)

$$r^2\cos^3\psi\begin{vmatrix}\cos\phi & -\sin\phi\\ \sin\phi & \cos\phi\end{vmatrix}+r^2\sin^2\psi\cos\psi\begin{vmatrix}-\sin\phi & -\cos\phi\\ \cos\phi & -\sin\phi\end{vmatrix}=r^2\cos^3\psi+r^2\sin^2\psi\cos\psi=$$

$$=r^2\cos\psi\left(\cos^2\psi+\sin^2\psi\right)=r^2\cos\psi.$$

Криволинейные интегралы

1. Криволинейные интегралы первого типа

Рассмотрим спрямляемую (т.е. имеющую длину) кривую AB на плоскости (A, B – точки плоскости). Для простоты, считаем, что эта кривая задана параметрически $x = x(t),\ y = y(t), t \in [T_0; T_1]$, причем $x(t), y(t)$ – непрерывно дифференцируемые на отрезке функции такие, что каждому значению параметра соответствует единственная точка кривой.

Тогда длина кривой выражается формулой $l = \int\limits_{T_0}^{T_1} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\,dt$.

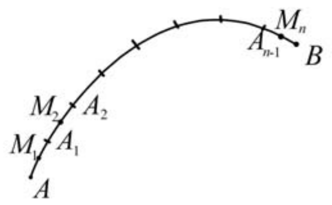
Под *разбиением* T кривой AB будем понимать множество точек $A = A_0, A_1, ..., A_n = B$, лежащих на этой кривой и занумерованных в направлении от A к B. Пусть Δl_i - длина кривой A_{i-1}, A_i.

Диаметр $d(T)$ определим как $d(T) = \max\limits_{i=1,...,n} \Delta l_i$.

Пусть функция $f(M) = f(x, y)$ определена на кривой AB. Выберем на каждом участке $A_{i-1}A_i$ кривой точку M_i и образуем сумму $\sigma(f, T, \{M_i\}) = \sum\limits_{i-1}^{n} f(M_i)\Delta l_i$, называемую *интегральной*.

<u>Определение.</u> Пусть $I \in \mathbf{R}$. Если $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall T : d(T) < \delta\ \forall \{M_i\}$ $|\sigma(f, T, \{M_i\}) - I| < \varepsilon$, то величина I называется *криволинейным интегралом первого типа по кривой AB* и обозначается так: $I = \int\limits_{AB} f(x, y) dl$.

<u>Важное замечание.</u> Если бы мы совершали движение по кривой не от A к B,



а от B к A, то в разбиении T с выбранными точками $\{M_i\}$ изменилась бы <u>только нумерация</u> отрезков и точек M_i, а сама интегральная сумма <u>не изменилась</u> бы, поскольку в ее определении фигурирует <u>лишь длина</u> Δl_i участка, которая не зависит от того, в каком направлении проходится участок. Это означает, что $\int\limits_{AB} f(x,y)dl = \int\limits_{BA} f(x,y)dl$.

В этом важнейшее отличие от обычного определенного интеграла, который менял бы знак при изменении направления обхода кривой.

Сформулируем теорему, сводящую новый пока объект - криволинейный интеграл к обычному определенному интегралу.

<u>**Теорема.**</u> Пусть $f(M)$ - непрерывная на кривой AB функция (т.е. $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall M_1, M_2$ - точек кривой таких, что расстояние между M_1, M_2 меньше δ, $|f(M_1) - f(M_2)| < \varepsilon$). Пусть кривая AB параметризована так: $x = x(t), y = y(t), t \in [T_0; T_1]$, где $x(t), y(t), x'(t), y'(t)$ - непрерывные на $[T_0; T_1]$ функции, причем каждому значению параметра соответствует единственная точка кривой. Тогда $\int\limits_{AB} f(M)ds = \int\limits_{T_0}^{T_1} f(x(t), y(t))\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\,dt$.

<u>**Доказательство.**</u> Интегральная сумма $\sum\limits_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta l_i = \sum\limits_{i=1}^{n} f(M_i)\int\limits_{t_{i-1}}^{t_i}\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\,dt$ для криволинейного интеграла первого типа отличается от интегральной суммы $\sum f(x(t_i), y(t_i))\sqrt{(x'(t_i))^2 + (y'(t_i))^2}\,\Delta t_i$ для интеграла

$\int\limits_{T_0}^{T_1} f(x(t), y(t))\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\,dt$ лишь тем, что $\int\limits_{t_{i-1}}^{t_i} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\,dt$ несколько отличается от $\sqrt{(x'(t_i))^2 + (y'(t_i))^2}\,\Delta t_i$, именно , этот интеграл равен $\sqrt{(x'(\xi_i))^2 + (y'(\xi_i))^2}\,\Delta t_i$.

Нетрудно доказать, что при $d(T) \to 0$ пределы этих сумм равны (строгое доказательство опущено). Это означает, что теорема доказана.

Отметим, что изменение направления обхода кривой означает одновременную смену пределов интегрирования и знака величины dt, что не изменяет величину интеграла в правой части этого равенства.

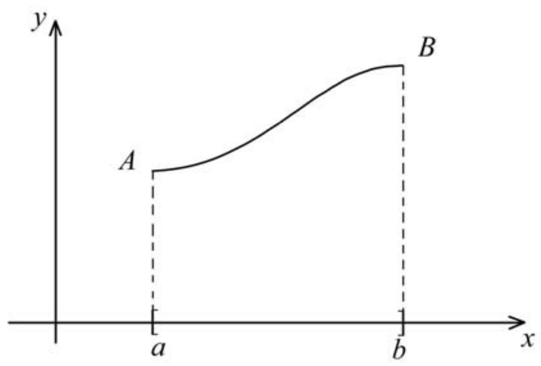
Из свойств криволинейного интеграла отметим следующие 2 основных:

1. $\int\limits_{AB} (\lambda_1 f_1(M) + \lambda_2 f_2(M))dl = \lambda_1 \int\limits_{AB} f_1(M)dl + \lambda_2 \int\limits_{AB} f_2(M)dl$ при условии, что существуют $\int\limits_{AB} f_1(M)dl$ и $\int\limits_{AB} f_2(M)dl$.
2. Если AB, BC - кривые, удовлетворяющие условиям теоремы, то $\int\limits_{AC} f(M)dl = \int\limits_{AB} f(M)dl + \int\limits_{BC} f(M)dl$.

Свойство 2 позволяет определить криволинейные интегралы 1-го типа для кусочно-гладких кривых (т.е. кривых, состоящих из конечного числа частей, каждая из которых удовлетворяет условиям теоремы). В частности, можно определить криволинейный интеграл и для замкнутых кривых.

2. Криволинейные интегралы второго типа

Рассмотрим, как и в параграфе 1, кривую AB, которую пока считаем незамкнутой.



Пусть проекция этой кривой на ось x представляет собой отрезок $[a;b]$.

Пусть точки $A_0,...,A_n$ дают разбиение кривой AB. Рассмотрим их проекции $x_0,...,x_n$, лежащие на отрезке $[a;b]$ и обозначим $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}, i = 1,...,n$.

Пусть $P(x, y)$ - определена на AB. Пусть M_i - точка, лежащая на кривой между A_{i-1} и A_i. Положим $\sigma = \sum_{i=1}^{n} P(M_i)\Delta x_i$.

<u>Определение.</u> Пусть $I \in \mathbf{R}$. Если $\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \delta > 0 \ \ \forall T: \ d(T) < \delta$ и $\forall \{M_i\}$ выполняется $|\sigma - I| < \varepsilon$, то говорят, что I - это *криволинейный интеграл второго типа* $\int_{AB} P(x, y)dx$.

Точно также, рассматривая проекции на ось y, определим $\int_{AB} Q(x, y)dy$.

Интеграл общего вида $\int_{AB} P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ определяется, как сумма этих двух интегралов.

Вычисление криволинейного интеграла 2-го типа проводится в соответствии со следующей теоремой.

<u>Теорема.</u> Пусть L – кривая, заданная уравнениями: $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, $t \in [T_0, T_1]$, $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ – непрерывные на L функции. Тогда:

$$\int_L Pdx + Qdy = \int_{T_0}^{T_1} \left(P(x(t), y(t))x'(t) + Q(x(t), y(t))y'(t)\right)dt.$$

Теорема без доказательства.

<u>Примечание 1.</u>

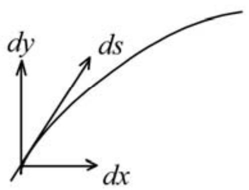
a) Если кривая L задана явным уравнением $y=\phi(x),\ a\le x\le b$, где $\phi(x)$ - непрерывно дифференцируемая функция, то предыдущая формула принимает вид: $\int\limits_L Pdx+Qdy=\int\limits_a^b P(x,\phi(x))dx+\int\limits_a^b Q(x,\phi(x))\phi'(x)dx$.

b) Если L задана уравнением $x=\psi(y),\ c\le y\le d$, то $\int\limits_L Pdx+Qdy=$

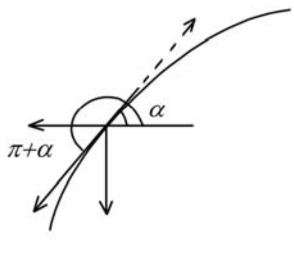
$$=\int\limits_c^d P(\psi(y),y)\psi'(y)dy+\int\limits_c^d Q(\psi(y),y)dy.$$

c) Если L - отрезок прямой $x=x_0$, то $\int\limits_L Pdx\equiv 0$ для любой функции P, если L - отрезок прямой $y=y_0$, то $\int\limits_L Qdy\equiv 0$ для любой функции Q.

Примечание 2.



Пусть α - угол, составляемый вектором касательной к кривой и положительным направлением оси x. Тогда $dx=ds\cos\alpha,\ dy=ds\sin\alpha$. Поэтому $\int\limits_L Pdx+Qdy=\int\limits_L (P\cos\alpha+Q\sin\alpha)ds$.



Заметим, что при изменении направления обхода угол α изменяется на $\pi+\alpha$. При этом $\cos(\pi+\alpha)=-\cos\alpha,\ \sin(\pi+\alpha)=-\sin\alpha$, и интеграл в правой части написанного выше равенства меняет свой знак.

Примечание 3. В случае пространственной кривой L: $x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t)$, где x, y, z, x', y', z' - непрерывные на $[T_0; T_1]$ функции, а f - непрерывна на L, имеет место равенство:

$$\int_L f(M)ds = \int_{T_0}^{T_1} f(x(t), y(t), z(t))\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}\,dt\ .$$

Аналогично, для непрерывных на L функций P,Q,R имеем $\int_L Pdx + Qdy + Rdz =$

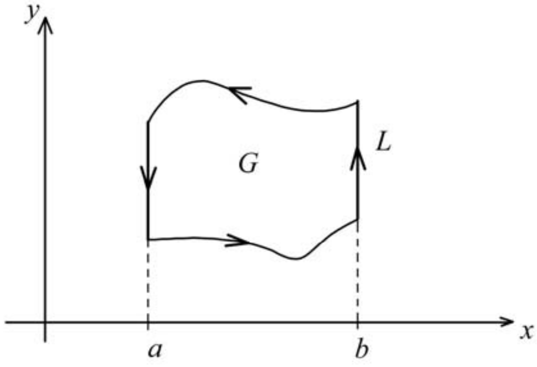
$$= \int_{T_0}^{T_1} \left(P(x(t), y(t), z(t))x'(t) + Q(x(t), y(t), z(t))y'(t) + R(x(t), y(t), z(t))z'(t)\right)dt\ .$$

Примечание 4. Говорят, что на области $D \subset \mathbf{R}^2$ задано *векторное поле* $\overline{F} = (P, Q)$, если каждой точке $(x, y) \in D$ сопоставлен вектор $(P(x, y), Q(x, y))$. Обозначим $\overline{r} = (x, y)$ - радиус-вектор точки (x, y) и $d\overline{r} = (dx, dy)$. Тогда $Pdx + Qdy = (P, Q)\cdot(dx, dy)$ (скалярное произведение) $= \overline{F}\cdot d\overline{r}$. Поэтому $\int_L Pdx + Qdy = \int_L \overline{F}\cdot d\overline{r}$. Из физики известно, что эта величина представляет собой работу силы $\overline{F}$ вдоль кривой L.

3. Формула Грина

Эта формула обобщает формулу Ньютона-Лейбница.

Теорема 1. Пусть G - криволинейная трапеция: $a \le x \le b,\ \phi_1(x) \le y \le \phi_2(x)$, где $\phi_1(x), \phi_2(x)$ - непрерывные на $[a; b]$ функции, L - граница области G и направление обхода L выбрано так, что область G остается слева.



Пусть $P(x, y), \dfrac{\partial P}{\partial y}(x, y) \in C(G)$. Тогда $\oint\limits_L P dx = -\iint\limits_G \dfrac{\partial P}{\partial y} dxdy$.

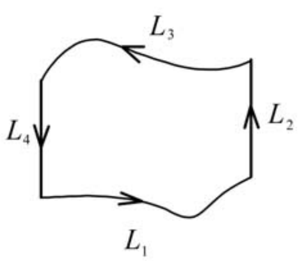
Знак $\oint\limits_L$ означает, что контур интегрирования L - замкнутый.

__Доказательство.__ Вычислим $\iint\limits_G \dfrac{\partial P}{\partial y} dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} \dfrac{\partial P}{\partial y} dy$.

При каждом <u>фиксированном</u> $x \in [a; b]$ величина $\dfrac{\partial P}{\partial y}$ определяется, как производная по y функции $P(x, y)$ от одной переменной y. Поэтому при каждом x применима формула Ньютона-Лейбница, согласно которой $\int\limits_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} \dfrac{\partial P}{\partial y} dy = P(x, \phi_2(x)) - P(x, \phi_1(x))$. Поэтому

$$\iint\limits_G \frac{\partial P}{\partial y} dxdy = \int\limits_a^b dx\left(P(x, \phi_2(x)) - P(x, \phi_1(x))\right) = \int\limits_a^b P(x, \phi_2(x)) dx - \int\limits_a^b P(x, \phi_1(x)) dx.$$

Разобъем кривую L на 4 участка.



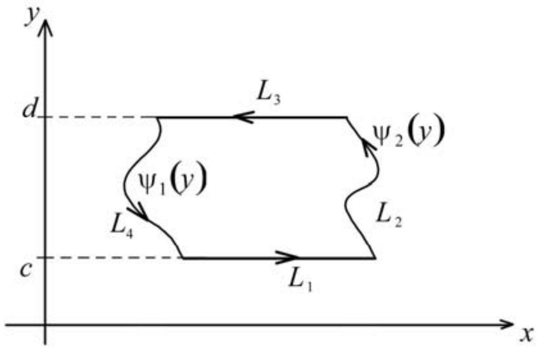
Согласно **c)** из примечания **1** предыдущего параграфа, $\int\limits_{L_2} P dx = 0, \int\limits_{L_4} P dx = 0$.

По правилу из **а)** примечания **1**, $\int\limits_{L_1} P(x, y) dx = \int\limits_a^b P(x, \phi_1(x)) dx, \int\limits_{L_3} P(x, y) dx =$

$= -\int_a^b P(x, \phi_2(x))dx$. Поэтому $\oint_L Pdx = \int_{L_1} Pdx + \int_{L_2} Pdx + \int_{L_3} Pdx + \int_{L_4} Pdx = -\int_a^b P(x, \phi_2(x))dx +$

$+ \int_a^b P(x, \phi_1(x))dx = -\iint_G \frac{\partial P}{\partial y} dxdy$.

Теорема 2. Пусть G - криволинейная трапеция $c \le y \le d$, $\psi_1(y) \le x \le \psi_2(y)$, где $\psi_1(y), \psi_2(y)$ - непрерывные на $[c; d]$ функции, L - граница, а направление обхода L выбрано так, что G остается слева.



Пусть $Q(x, y), \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) \in C(G)$.

Тогда $\oint_L Qdy = \iint_G \frac{\partial Q}{\partial x} dxdy$.

Доказательство. $\iint_G \frac{\partial Q}{\partial x} dxdy = \int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} \frac{\partial Q}{\partial x} dx = \int_c^d (Q(\psi_2(y), y) - Q(\psi_1(y), y))dy =$

$= \int_c^d Q(\psi_2(y), y)dy - \int_c^d Q(\psi_1(y), y)dy = \int_{L_1} Q(x, y)dy + \int_{L_2} Q(x, y)dy + \int_{L_3} Q(x, y)dy +$

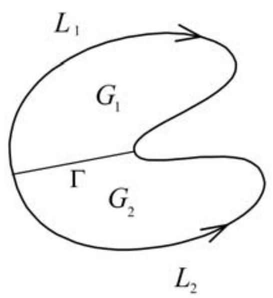
$+ \int_{L_4} Q(x, y)dy = \oint_L Qdy$. Теорема доказана.

Следствие 1. Если область G можно представить как в виде трапеции $a \le x \le b, \phi_1(x) \le y \le \phi_2(x)$, где $\phi_1(x), \phi_2(x)$ - непрерывно дифференцируемые на $[a; b]$ функции, так и в виде $c \le y \le d$, $\psi_1(y) \le x \le \psi_2(y)$, где $\psi_1(y), \psi_2(y)$ - непрерывно дифференцируемые на $[c; d]$ функции, L - граница, причем при ее обходе область G остается слева, то $\oint_L Pdx + Qdy = \iint_G \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy$.

Примечание. Области, удовлетворяющие условиям следствия 1 - явление обычное. Например, круг $x^2 + y^2 \le 1$, ограниченный окружностью $x^2 + y^2 = 1$, можно задать так: $-1 \le x \le 1,\ -\sqrt{1-x^2} \le y \le \sqrt{1-x^2}$, а можно и так: $-1 \le y \le 1,\ -\sqrt{1-y^2} \le x \le \sqrt{1-y^2}$.

<u>Следствие 2.</u> Если область *G* можно разбить кривыми на конечное число областей, удовлетворяющих условиям следствия 1 и *L* - граница *G*, причем направление обхода выбрано так, что область *G* остается слева, и *P* и *Q* удовлетворяют перечисленным выше условиям, то $\oint\limits_L Pdx + Qdy = \iint\limits_G \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy$.

<u>Доказательство.</u>

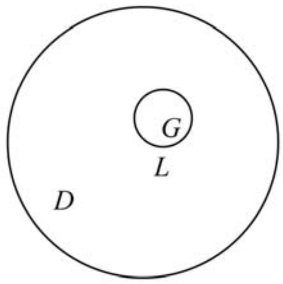


Ограничимся случаем, когда область *G* разбивается на 2 части G_1 и G_2, удовлетворяющие условиям следствия 1, кривой Γ. Пусть L_1 ограничивает G_1, а L_2 ограничивает G_2. Тогда $\oint\limits_L Pdx + Qdy = \oint\limits_{L_1} Pdx + Qdy +$ $+ \oint\limits_{L_2} Pdx + Qdy$, поскольку L_1 - это часть *L* и кривая Γ, а L_2 - остаток *L* и кривая Γ, но проходимая в <u>противоположном</u> направлении (поэтому интегралы по этим добавленным участкам сократятся).

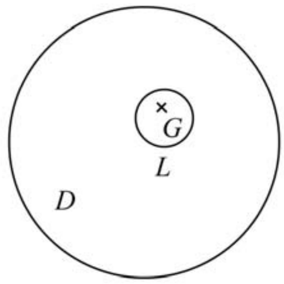
<u>Замечание.</u> Можно доказать формулу Грина для областей, ограниченных замкнутыми кусочно-гладкими кривыми.

4. Независимость криволинейного интеграла от формы пути интегрирования

Пусть D область. Эта область называется *односвязной*, если вместе с любым замкнутым контуром L, лежащим в D ограничиваемая контуром L область G также целиком содержится в D.



Пример односвязной области: круг

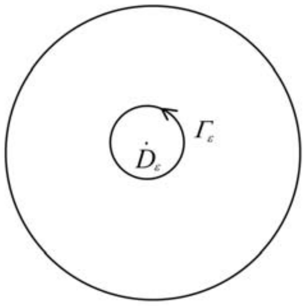


Пример неодносвязной области: круг с выколотой точкой. G содержит выколотую точку, а D - нет, следовательно G не входит в D целиком.

Теорема 1. Пусть D - односвязная область, $P, Q, \frac{\partial P}{\partial y}, \frac{\partial Q}{\partial x} \in C(D)$. Условие, что $\forall L \subset D$ $\oint_L P dx + Q dy = 0$ равносильно тому, что всюду в этой области $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$.

Доказательство.

1. $\Leftarrow$. Если всюду в D выполнено равенство $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$, то $\forall L$ по формуле Грина $\oint_L P dx + Q dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy = \iint_D 0 \cdot dxdy = 0$.
2. $\Rightarrow$. Предположим, что в области D есть точка $(x_0; y_0)$, в которой $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \neq 0$. Пусть, для определенности, $\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right)(x_0; y_0) = c > 0$.



Тогда существует окрестность точки $(x_0; y_0)$, в которой значения $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}$ больше, чем $\frac{c}{2}$. Выберем в этой окрестности окружность Γ_ε радиуса ε и рассмотрим $\oint\limits_{\Gamma_\varepsilon} Pdx + Qdy$.

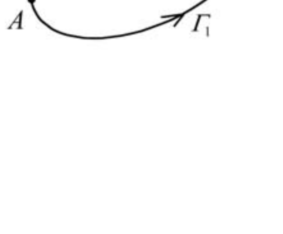
По формуле Грина $\oint\limits_{\Gamma_\varepsilon} Pdx + Qdy = \iint \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy > \frac{c}{2} S(D_\varepsilon) = \frac{c}{2} \pi \varepsilon^2 > 0$. Это противоречит предположению о том, что $\oint\limits_{\Gamma_\varepsilon} Pdx + Qdy$ должен быть равен 0.

Определение. Пусть D - область, $\Gamma \subset D$, Γ - контур. Будем говорить, что $\int\limits_{\Gamma} Pdx + Qdy$ *не зависит от формы пути в* D, если $\forall A, B \in D$, $\forall \Gamma_1, \Gamma_2$ - контуров с началом в точке A и концом в точке B, $\Gamma_1 \subset D, \Gamma_2 \subset D$ выполняется равенство: $\int\limits_{\Gamma_1} Pdx + Qdy = \int\limits_{\Gamma_2} Pdx + Qdy$.

Теорема 2. Пусть D - область. Условие независимости $\int\limits_{\Gamma} Pdx + Qdy$ от формы пути в D равносильно тому, что для любого замкнутого контура $L \subset D$ имеет место равенство $\oint\limits_{L} Pdx + Qdy = 0$.

Доказательство.

1. $(\Rightarrow)$. Пусть интеграл не зависит от формы пути и пусть L - замкнутый контур в D. Выберем на L две произвольные точки A и B и рассмотрим

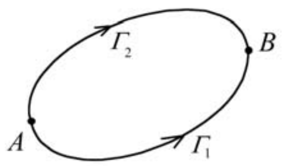


соединяющие эти точки части контура L, назовем их Γ_1 и Γ_2. При этом L состоит из Γ_1 и проходимого в противоположном направлении контура Γ_2. По условию, $\int\limits_{\Gamma_1} Pdx + Qdy = \int\limits_{\Gamma_2} Pdx + Qdy$. Значит,

$$\oint_L Pdx+Qdy=\int_{\Gamma_1} Pdx+Qdy-\int_{\Gamma_2} Pdx+Qdy=0\,.$$

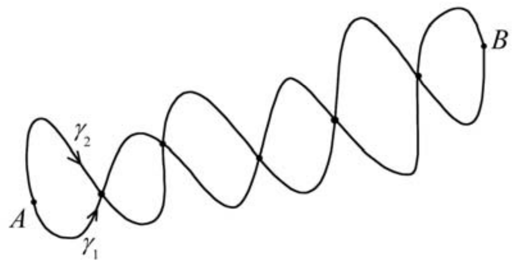
2. ($\Leftarrow$). Пусть для любого контура $L\subset D$ $\oint_L Pdx+Qdy=0$.

А) В случае, если Γ_1 и Γ_2, соединяющие точки A, B не имеют других общих точек, то, как и в предыдущей части, L состоит из Γ_1 и проходимой в противоположном направлении Γ_2. Поэтому $0=\oint_L Pdx+Qdy=\int_{\Gamma_1} Pdx+Qdy-\oint_{\Gamma_2} Pdx+Qdy$, откуда



$$\int_{\Gamma_1} Pdx+Qdy=\int_{\Gamma_2} Pdx+Qdy\,.$$

Б) Если Γ_1 и Γ_2 имеют конечное число общих точек, кроме A и B, то можно



применить пункт **2А** к каждому полученному контуру, интеграл по которому в связи с предположением равен 0, и поэтому для каждой такой полученной части $\int_{\gamma_1} Pdx+Qdy=\int_{\gamma_2} Pdx+Qdy$.

В) Случай, когда кроме A и B кривые Γ_1 и Γ_2 имеют бесконечное множество общих точек, мы оставим без доказательства.

Сопоставляя теорему 2 с теоремой 1, получаем следствие.

Следствие. Пусть D - односвязная область. $\int_{\Gamma} Pdx+Qdy$ не зависит в D от формы пути интегрирования тогда и только тогда, когда в этой области выполняется тождество $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial y}$.

5. Связь с вопросом о полном дифференциале

Если $u(x,y)$ - дифференцируемая функция двух переменных, то $du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy$. Выясним, при каких условиях на P,Q существует такая функция u, что $Pdx + Qdy = du$, т.е. $\frac{\partial u}{\partial x} = P, \frac{\partial u}{\partial y} = Q$. В предположении непрерывности смешанных производных: $\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ или $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$. Докажем, что если D - односвязная область, то верно и обратное.

<u>Теорема 3.</u> Если $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$ в односвязной области D, то существует $u(x,y)$ такая, что $P = \frac{\partial u}{\partial x}, Q = \frac{\partial u}{\partial y}$.

<u>Доказательство.</u> Возьмем произвольную точку $A(x_0, y_0)$ и рассмотрим переменную точку $B(x,y)$ и любую кривую Γ, соединяющую A с B.

По следствию теоремы 2, $\int\limits_{\Gamma} Pdx + Qdy$ зависит только от конечной точки $B(x,y)$ и, значит, есть некоторая функция $u(x,y)$. Покажем, что $u(x,y)$ - искомая функция, т.е. $\frac{\partial u}{\partial x} = P, \frac{\partial u}{\partial y} = Q$. Для этого рассмотрим точку $(x + \Delta x, y)$ и рассмотрим $u(x + \Delta x, y) - u(x,y) = \int\limits_{\Gamma'} Pdx + Qdy$, где Γ' - отрезок прямой, соединяющей точки $(x + \Delta x, y)$ и (x,y). На этом отрезке $dy \equiv 0$ и $\int\limits_{\Gamma'} Pdx + Qdy = \int\limits_{x}^{x+\Delta x} P(x,y)dx$. Применяя <u>теорему о среднем</u>, получаем (ввиду непрерывности P), что $\int\limits_{x}^{x+\Delta x} P(x,y)dx = \; = P(x + \theta \Delta x, y) \cdot \Delta x$, где $0 < \theta < 1$. Тогда $\frac{u(x + \Delta x, y) - u(x,y)}{\Delta x} = P(x + \Delta x, y)$. $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{u(x + \Delta x, y) - u(x,y)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} P(x + \theta \Delta x, y) = P(x,y)$.

Для Q доказательство аналогичное.

<u>Замечание.</u> Если векторное поле $\overline{F}=(P,Q)$ обладает свойством $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$ в односвязной области D, то говорят, что $\overline{F}$ - потенциальное поле и найденная функция u такая, что $\frac{\partial u}{\partial x}=P, \frac{\partial u}{\partial y}=Q$, т.е. $\overline{F}=\nabla u$, называется *потенциалом* поля $\overline{F}$.

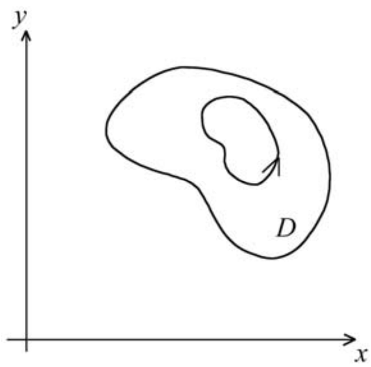
<u>Следствие.</u> В потенциальном поле работа вдоль любого замкнутого контура равна 0. Вообще, если Γ соединяет A и B, то работа $\overline{F}$ вдоль Γ равна

$$\int_{\Gamma}\overline{F}\overline{dr}=\int_{\Gamma}Pdx+Qdy=\int_{T_0}^{T_1}P(x(t),y(t))x'(t)dt+Q(x(t),y(y))y'(t)dt=\int_{T_0}^{T_1}\frac{\partial u}{\partial x}(x(t),y(t))x'(t)dt+$$

$$+\frac{\partial u}{\partial y}(x(t),y(t))y'(t)dt=\int_{T_0}^{T_1}\frac{du(x(t),y(t))}{dt}dt=u(x(T_1),y(T_1))-u(x(T_0),y(T_0))=u(B)-u(A).$$

Т.е. работа равна <u>разности потенциалов</u>.

<u>Примечание.</u> Условие <u>односвязности</u> существенно.



<u>Например</u>, если область D не содержит начала координат, то $\forall L\subset D\ \oint_L\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}=0$.

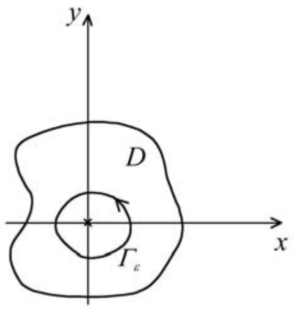
Действительно,

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{-y}{x^2+y^2}\right)=\frac{(-x^2-y^2)-2y(-y)}{(x^2+y^2)^2}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2},$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)=\frac{x^2+y^2-2x\cdot x}{(x^2+y^2)^2}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

Т.о. условие $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$ выполнено во всей области D (которая не содержит точки $(0;0)$).

С другой стороны, пусть D содержит $(0;0)$.



Рассмотрим Γ_ε - окружность радиуса ε, содержащуюся в D. Параметризуем эту окружность: $\begin{cases} x = \varepsilon\cos t, & 0 \le t \le 2\pi \\ y = \varepsilon\sin t \end{cases}$. Тогда

$$\int\limits_{\Gamma_\varepsilon} \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} \frac{(\varepsilon\cos t \cdot \varepsilon\cos t + \varepsilon\sin t \cdot \varepsilon\sin t)}{\varepsilon^2\cos^2 t + \varepsilon^2\sin^2 t} dt = \int\limits_0^{2\pi} dt = 2\pi \ne 0 .$$

Это связано с тем, что область, в которой непрерывны $P, Q, \dfrac{\partial P}{\partial y}, \dfrac{\partial Q}{\partial x}$ многосвязная.

Поверхностные интегралы.

1. Площадь поверхности, заданной явным уравнением.

Сначала рассмотрим простейший случай поверхности *S*, заданной явным уравнением $z = z(x, y), (x, y) \in D$ (1)

где *D* - плоская область. Примерами таких поверхностей служат изученные Вами в курсе аналитической геометрии плоскости и параболоиды, многие другие поверхности. Предположим, что функция $z(x, y)$ и её частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ непрерывны в области *D*. Это будет кратко обозначаться так: $z \in C^1(D)$.

Пусть $(x_0, y_0, z_0) \in S$, т.е. $z_0 = z(x_0, y_0)$. Уравнение касательной плоскости к поверхности в этой точке имеет вид: $z - z_0 = \frac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial z}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)$.

Далее в этом параграфе мы будем для краткости обозначать $z'_x = \frac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0),\ z'_y = \frac{\partial z}{\partial y}(x_0, y_0)$. Напомним, что в общем уравнении плоскости $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$ числа *A, B, C* представляют собой координаты перпендикулярного к этой плоскости вектора. Значит, $(z'_x, z'_y, -1)$ - нормальный вектор к поверхности *S* в точке (x_0, y_0, z_0). Этот вектор, вообще говоря, не единичный. Чтобы сделать его единичным, его следует умножить на один из нормирующих множителей, т.е. на одно из чисел $\pm\frac{1}{\sqrt{(z'_x)^2 + (z'_y)^2 + 1}}$. Итак, два единичных вектора нормали к поверхности в рассматриваемой точке имеют вид:

$$\overline{n}_1 = \left(\frac{-z'_x}{\sqrt{(z'_x)^2 + (z'_y)^2 + 1}}, \frac{-z'_y}{\sqrt{(z'_x)^2 + (z'_y)^2 + 1}}, \frac{1}{\sqrt{(z'_x)^2 + (z'_y)^2 + 1}} \right)$$

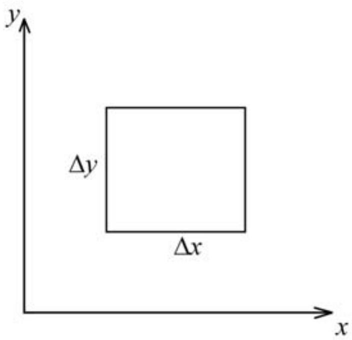
$$\overline{n}_2 = \left(\frac{z'_x}{\sqrt{(z'_x)^2 + (z'_y)^2 + 1}}, \frac{z'_y}{\sqrt{(z'_x)^2 + (z'_y)^2 + 1}}, \frac{-1}{\sqrt{(z'_x)^2 + (z'_y)^2 + 1}} \right)$$

Известно, что координаты единичного вектора – это косинусы углов, составляемых этим вектором с осями *x,y,z* (т.е. с положительными направлениями этих осей), соответственно. Пусть $\overline{n}_1 = (\cos\alpha_1, \cos\beta_1, \cos\gamma_1)$, $\overline{n}_2 = (\cos\alpha_2, \cos\beta_2, \cos\gamma_2)$. Очевидно, что $\overline{n}_1 = -\overline{n}_2$. Это означает, что справедливы равенства $\alpha_1 = \pi + \alpha_2$, $\beta_1 = \pi + \beta_2$, $\gamma_1 = \pi + \gamma_2$.

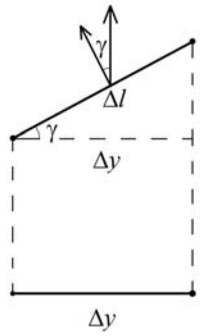
Предположим, что мы рассматриваем разбиение *T* этой поверхности на части *S*$_l$ непрерывными кривыми. Под *диаметром множества S*$_l$ понимается точная верхняя грань расстояний между точками этого множества. *Диаметр разбиения T* – это наибольший из диаметров получившихся частей. Обозначают его $d(T)$.

В каждой полученной части поверхности выберем точку (x_0, y_0, z_0) и рассмотрим касательную плоскость к поверхности в этой точке. Пересечения этих касательных плоскостей ограничат многоугольники, которые образуют «панцирь» на поверхности. Этот «панцирь» состоит из плоских многоугольников и, следовательно, имеет площадь, равную сумме площадей составляющих его многоугольников.

Если при стремлении к 0 диаметра разбиения площади «панцирей» имеют конечный предел, то он и называется площадью поверхности. Это определение позволяет легко найти формулу для вычисления площади поверхности. Рассмотрим плоский многоугольник, нормаль к которому имеет направляющие косинусы $(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$. Можем считать, что $\cos\gamma > 0$.



Без ограничения общности, достаточно рассматривать прямоугольник, причём, для простоты, считаем, что его проекция на плоскость $z = 0$ есть прямоугольник со сторонами $\Delta x, \Delta y$, а сам он имеет стороны $\Delta x, \Delta l$.



Тогда $\Delta y = \Delta l \cos\gamma$ и

$$пл.(S) = \Delta x \cdot \Delta l = \frac{\Delta x \cdot \Delta y}{\cos\gamma} \quad (\cos\gamma > 0).$$

В общем случае $пл.(S) = \dfrac{\Delta x \cdot \Delta y}{|\cos\gamma|}$.

Если нормали выбирались в точках (x_i, y_i, z_i), то пусть $(\cos\alpha_i, \cos\beta_i, \cos\gamma_i)$ – их направляющие косинусы. Согласно сказанному выше, площадь «панциря» есть $\sum_{i=1}^{n} пл.(S_i) = \sum_{i=1}^{n} \dfrac{\Delta x_i \Delta y_i}{|\cos\gamma_i|}$. Эта сумма является интегральной суммой для двойного интеграла $\iint_D \dfrac{dxdy}{|\cos\gamma|}$. Как установлено выше, $|\cos\gamma| = \dfrac{1}{\sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1}}$, поэтому $S = \iint_D \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1}\,dxdy$.

2. *Площадь поверхности, заданной параметрически*

Часто поверхности заданы параметрическими уравнениями

$\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \\ z = z(u,v) \end{cases}$, где $(u,v) \in \Delta$, а Δ - некоторая плоская область. Пусть $x, y, z \in C^1(\Delta)$.

Кроме того, пусть в любой точке Δ ранг матрицы $\begin{pmatrix} x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{pmatrix}$ равен 2. Это означает, что в любой точке Δ хотя бы один из миноров второго порядка этой матрицы не равен 0. Если, скажем, в некоторой точке $C = \begin{vmatrix} x'_u & y'_u \\ x'_v & y'_v \end{vmatrix} \neq 0$, то это означает (вспомним сформулированную в конце 2 семестра теорему о системе неявных функций), что уравнения $\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \end{cases}$ можно решить, выразив в окрестности этой точки переменные u,v через переменные *x,y*, т.е. получить равенства вида $u = u(x,y),\ v = v(x,y)$. Подставив эти выражения в уравнение $z = z(x,y)$, получим уравнение $z = z(u(x,y), v(x,y)) = Z(x,y)$, т.е. в окрестности рассматриваемой точки поверхность может быть задана явным уравнением вида (1).

(Если $A = \begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0$, то имеем, по аналогии, $X = X(y,z)$, а если $-B = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0$, то $Y = Y(x,z)$).

Обозначим $\bar{r}(u,v)$ вектор $\begin{pmatrix} x(u,v) \\ y(u,v) \\ z(u,v) \end{pmatrix}$. Рассмотрим произвольную точку $(u_0, v_0) \in \Delta$. Зафиксируем сначала v_0 и рассмотрим $\bar{r}(u, v_0)$ – кривую на поверхности. Тогда $\bar{r}_u = \frac{\partial \bar{r}}{\partial u}(u_0, v_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(u_0, v_0) \\ \frac{\partial y}{\partial u}(u_0, v_0) \\ \frac{\partial z}{\partial u}(u_0, v_0) \end{pmatrix}$ – вектор касательной к этой кривой в точке (u_0, v_0). Аналогично, $\bar{r}_v = \frac{\partial \bar{r}}{\partial v}(u_0, v_0)$ - вектор касательной к кривой $\bar{r}(u_0, v)$.

Нормаль к поверхности является нормалью к касательной плоскости и она перпендикулярна $\bar{r}_u$ и $\bar{r}_v$. Условие $rg\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix} = 2$ означает, что $\bar{r}_u$ и $\bar{r}_v$ не параллельны. Поэтому в качестве нормального вектора можно взять $\bar{r}_u \times \bar{r}_v$ (векторное произведение) или

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} \bar{i} + \begin{vmatrix} \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial u} \\ \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial v} \end{vmatrix} \bar{j} + \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \bar{k} = A\bar{i} + B\bar{j} + C\bar{k}.$$

Тогда единичные векторы нормали равны $\left(\frac{A}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \frac{B}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \frac{C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \right)$, при этом выбору верхней нормали соответствует выбор того же знака, что и знак числа *C*, перед корнем (поскольку тогда $\cos\gamma > 0$).

Если поверхность задана параметрически, то, как указывалось выше, в окрестности любой её точки её возможно задать явным уравнением ($z = z(x, y)$ или $x = x(y, z)$ или $y = y(x, z)$).

Предположим, что поверхность, заданная параметрически, представляет собой конечное объединение частей, каждая из которых задана явным уравнением, и рассмотрим одну из её частей, для которой $z = z(x, y), (x, y) \in D$.

Тогда площадь этой части, по доказанному выше, равна $\iint\limits_D \frac{dxdy}{|\cos\gamma|}$. Перейдём в этом интеграле к переменным *u,v*, учитывая, что якобиан перехода – это как раз определитель C, а $|\cos\gamma| = \dfrac{|C|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$, и пусть области D соответствует область Δ_0 на плоскости (u,v). Тогда по теореме о замене переменных, $\iint\limits_D \dfrac{dxdy}{|\cos\gamma|} = \iint\limits_{\Delta_0} \dfrac{|C|dudv}{|C|\big/\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = \iint\limits_{\Delta_0} \sqrt{A^2+B^2+C^2}\,dudv$.

Легко проверить, что в случае уравнения $x = x(y,z)$ или $y = y(x,z)$ получится интеграл такого же вида: $\iint\limits_{\Delta_i} \sqrt{A^2+B^2+C^2}\,dudv,\ i = 1,2$

Объединяя все полученные части, получаем общую площадь $\iint\limits_{\Delta} \sqrt{A^2+B^2+C^2}\,dudv$, где Δ - вся область изменения параметров $(u,v),\ \Delta = \Delta_0 \cup \Delta_1 \cup \Delta_2$.

Отметим, что выражение $A^2+B^2+C^2$ можно преобразовать к более удобному для вычислений виду.

Числа (A,B,C) суть координаты $\overline{r_u} \times \overline{r_v}$. Поэтому $A^2+B^2+C^2$ – квадрат модуля вектора $\overline{r_u} \times \overline{r_v}$. Напомним, что модуль векторного произведения равен $|\overline{r_u}||\overline{r_v}|\sin\phi$ (ϕ - угол между $\overline{r_u}$ и $\overline{r_v}$). Значит, $A^2+B^2+C^2 = r_u^2 \cdot r_v^2 \sin^2\phi = r_u^2 r_v^2 (1-\cos^2\phi) = r_u^2 r_v^2 - r_u^2 r_v^2 \cos^2\phi = r_u^2 r_v^2 - (r_u r_v \cos\phi)^2 = r_u^2 r_v^2 - (\overline{r_u}, \overline{r_v})^2$. Здесь $r_u^2 = |\overline{r_u}|^2 = \left|\left(\dfrac{\partial x}{\partial u}, \dfrac{\partial y}{\partial u}, \dfrac{\partial z}{\partial u}\right)\right|^2 = \left(\dfrac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial z}{\partial u}\right)^2 = E$; $r_v^2 = \left(\dfrac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial y}{\partial v}\right)^2 +$ и $(\overline{r_u}, \overline{r_v}) = \left(\left(\dfrac{\partial x}{\partial u}, \dfrac{\partial y}{\partial u}, \dfrac{\partial z}{\partial u}\right), \left(\dfrac{\partial x}{\partial v}, \dfrac{\partial y}{\partial v}, \dfrac{\partial z}{\partial v}\right)\right) = \dfrac{\partial x}{\partial u}\cdot\dfrac{\partial x}{\partial v} + \dfrac{\partial y}{\partial u}\cdot\dfrac{\partial y}{\partial v} + \dfrac{\partial z}{\partial u}\cdot\dfrac{\partial z}{\partial v} = F$. Итак, $A^2+B^2+C^2 = EG - F^2$, и формула для площади поверхности, заданной параметрически, такова: $S = \iint\limits_D \sqrt{EG-F^2}\,dudv$.

3. Поверхностные интегралы 1-го типа.

Пусть S – поверхность, имеющая площадь пл.(S). Рассмотрим разбиение T этой поверхности на части S_i с помощью непрерывных кривых. Пусть функция $f(x,y,z)$ определена во всех точках поверхности S. Выберем произвольным образом точки $M_i(x_i, y_i, z_i) \in S_i$ и рассмотрим сумму $\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i) пл.(S_i) = \sigma(f, T, \{M_i\})$.

<u>Определение.</u> Пусть $I \in \mathbf{R}$. Если $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall T : d(T) < \delta\ \forall \{M_i\}\ |\sigma(f, T, \{M_i\}) - I| < \varepsilon$, то мы говорим, что I есть *поверхностный интеграл 1-го типа* от функции $f(x, y, z)$ по поверхности S и обозначаем это следующим образом: $I = \iint\limits_S f(x, y, z) dS$.

Пример задачи, моделью которой служит поверхностный интеграл первого типа – нахождение массы поверхности *S*, поверхностная плотность которой в точке (x, y, z) равна $f(x, y, z)$.

Для вычисления поверхностного интеграла 1-го типа удобно использовать следующие теоремы.

<u>Теорема 1</u>. Пусть поверхность *S* задана уравнением $z = z(x, y),\ (x, y) \in D_0$, где z – непрерывно дифференцируемая на квадрируемой области D_0 функция, $D_0 \subset \mathbf{R}^2$. Тогда для любой непрерывной на поверхности *S* функции *f*

$$\iint\limits_S f(x, y, z) dS = \iint\limits_{D_0} f(x, y, z(x, y)) \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1}\, dxdy.$$

<u>Замечание 1.</u> если поверхность задана уравнением $y = y(x, z),\ (x, z) \in D_1$, где *y* – непрерывно дифференцируемая на квадрируемой области $D_1,\ D_1 \subset \mathbf{R}^2$ функция, то $\iint\limits_S f(x, y, z) dS = \iint\limits_{D_1} f(x, y(x, z), z) \sqrt{\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2 + 1}\, dxdz$. Аналогично, в случае задания поверхности уравнением $x = x(y, z)$ $\iint\limits_S f(x, y, z) dS = \iint\limits_{D_2} f(x(y, z), y, z) \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2 + 1}\, dydz$ при аналогичных условиях на область D_2 и функцию $x(y, z)$.

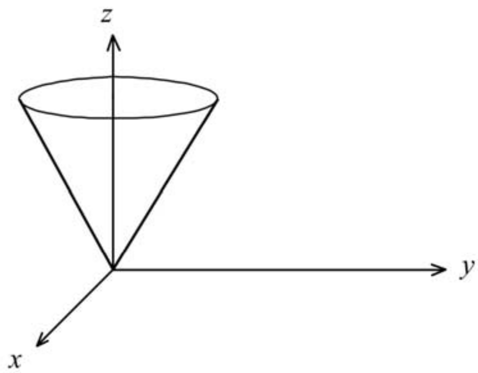
<u>Теорема 2.</u> Если поверхность *(S)* задана параметрическими уравнениями $\begin{array}{l} x = x(u, v), \\ y = y(u, v), \\ z = z(u, v), \end{array}$ $\quad (u, v) \in \Delta \subset \mathbf{R}^2$, где x, y, z – непрерывно дифференцируемые функции на Δ и пусть функция $f(x, y, z)$ непрерывна на *(S)*, то $\iint\limits_S f(x, y, z)dS = \iint\limits_\Delta f(x(u,v), y(u,v), z(u,v))\sqrt{EG - F^2}\,dudv$.

Теоремы 1 и 2 оставим **без доказательства**.

Вместо этого приведём пример вычисления поверхностного интеграла 1-го типа.

<u>Задача.</u> Найти $\iint\limits_S (x^2 + y^2)dS$, где S – граница тела $\sqrt{x^2 + y^2} \le z \le 1$.

<u>Решение.</u> Это тело представляет собой конус:



S состоит из боковой поверхности S_1 и основания S_2. На боковой поверхности, уравнение которой $z = \sqrt{x^2 + y^2}$,всюду, кроме точки $(x, y) = (0,0)$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}},\ \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \text{ и } \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1 = \frac{x^2}{x^2 + y^2} + \frac{y^2}{x^2 + y^2} + 1 = \frac{2(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} = 2$$

и $dS = \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1}\,dxdy = \sqrt{2}dxdy$.

Нарушение этой формулы в <u>единственной</u> точке $(x, y) = (0,0)$ не повлияет на результат, поэтому $\iint\limits_{S_1} (x^2 + y^2)dS = \iint\limits_D (x^2 + y^2)\sqrt{2}dxdy$, где D – проекция S_1 на плоскость $z = 0$, т.е. D – круг $x^2 + y^2 \le 1$.

В интеграле, стоящем в правой части, перейдём к полярным координатам: $\iint\limits_D (x^2+y^2)\sqrt{2}dxdy = \int\limits_0^{2\pi} d\phi \int\limits_0^1 (r^2)\sqrt{2} r dr = 2\pi\sqrt{2}\int\limits_0^1 r^3 dr =$ (r - якобиан преобразования) $= 2\pi\sqrt{2}\,\frac{r^4}{4}\Big|_0^1 = \frac{2\pi\sqrt{2}}{4} = \frac{\pi\sqrt{2}}{2}$.

Основание S_2 задано уравнением z=1, поэтому $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1 = 0+0+1 = 1$ и $\iint\limits_{S_2}(x^2+y^2)dS = \iint\limits_D (x^2+y^2)dxdy = \frac{\pi}{2}$ (этот интеграл отличается от вычисленного выше лишь множителем, поэтому подробное вычисление опущено).

Итак, весь интеграл $\iint\limits_S (x^2+y^2)dS = \iint\limits_{S_1}(x^2+y^2)dS + \iint\limits_{S_2}(x^2+y^2)dS = \frac{\pi\sqrt{2}}{2} + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi(1+\sqrt{2})}{2}$

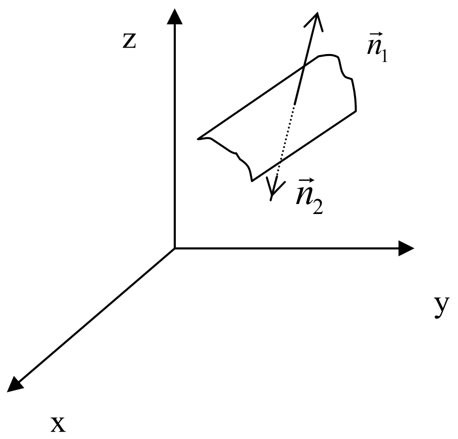
3. Сторона поверхности.

Понятие стороны поверхности интуитивно хорошо известно. Мы говорим о верхней и нижней стороне, внутренней и внешней стороне (для замкнутых поверхностей) и т. п. Даже сейчас, если вдруг перевернуть лист бумаги, на котором расположен читаемый Вами текст (или повернуть экран монитора), Вы скажете: «Не та сторона!». Надеюсь, это не вызовет у Вас чувства облегчения, Вы вновь перевернёте лист и узнаете тогда, как принято определять сторону поверхности в математике и у всякой ли поверхности есть 2 стороны.

Как обычно, проще всего обстоит дело с поверхностью, заданной явным уравнением.

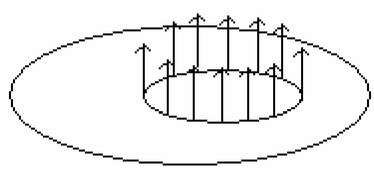
$$z = z(x,y), (x,y) \in D \tag{1}$$

В этом случае, очевидно, есть 2 стороны, верхняя и нижняя. Чтобы определить сторону, достаточно установить, какой угол составляет



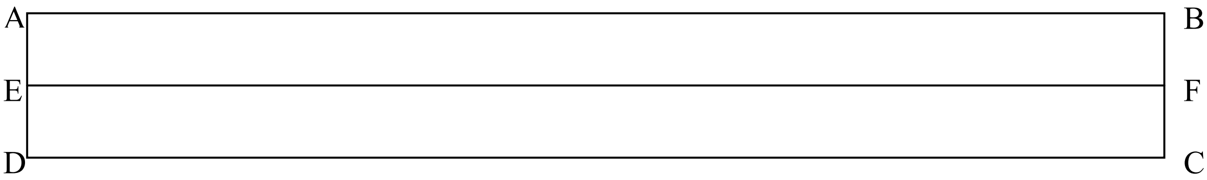
выбранная Вами нормаль к поверхности с осью z. Если $\cos\gamma > 0$, то это – верхняя сторона. Если $\cos\gamma < 0$ - то – нижняя.

На верхней стороне $\cos\gamma > 0$, поэтому верхней стороне соответсвует вектор $\vec{n}_1$. Пусть α – замкнутый контур, лежащий на поверхности и не пересекающей её край. Выберем в произвольной точке этого контура одно из двух направлений нормали. Пусть при обходе этого контура нормаль меняется непрерывно. Тогда в исходную точку мы вернёмся с исходным направлением нормали.



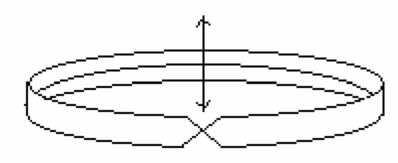
Описанное выше свойство поверхности (1) будем считать определением двусторонней поверхности (в общем случае, а не только для поверхностей вида (1)). Точнее говоря, поверхность называется двусторонней, если при обходе любого замкнутого контура, лежащего на ней и не пересекающего её край, направление нормали при возвращении в исходную точку сохраняется. Если же существует замкнутый контур, при обходе которого направление нормали при возвращении в исходную точку сменяется на противоположное, то поверхность называется односторонней.

Бываю поверхности, не являющиеся двусторонними. Простейший



пример – лист Мебиуса. Он получается так: рассмотрим прямоугольник ABCD и линию EF, соединяющую середины его сторон.

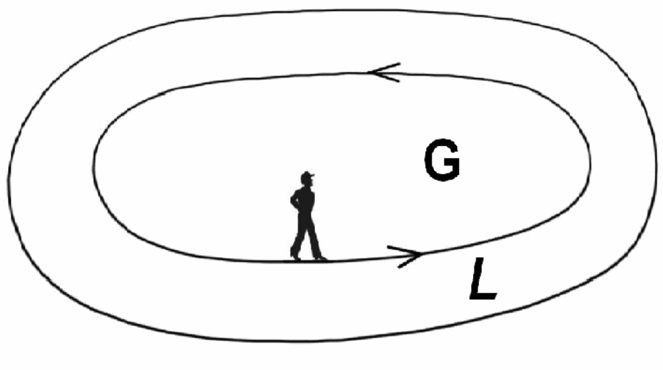
Склеим точку А с точкой с С, В с D.



Если обходить контур EF, то при возвращении в исходную точку направление нормали изменится на противоположное. Это доказывает односторонность листа Мебиуса.

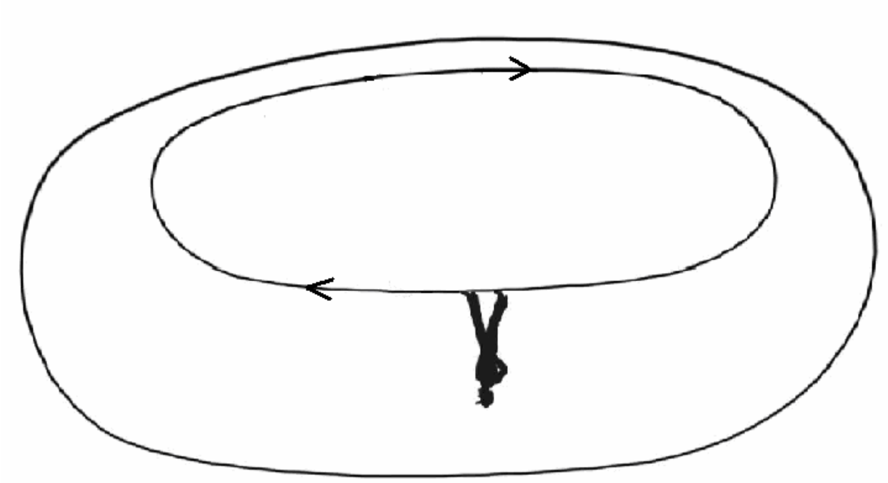
В дальнейшем мы будем рассматривать только двусторонние поверхности.

Двусторонняя поверхность, у которой выбрана сторона, называется ориентированной. На ориентированной поверхности определено положительное направление произвольного замкнутого контура, лежащего на ней, а также контура, ограничивающего саму эту поверхность. Пусть L – рассматриваемый контур и пусть ”обходчик”, голова которого направлена так же, как и выбранная нормаль к поверхности при обходе этого контура видит ограничиваемую этим контуром часть G рассматриваемой поверхности слева от себя (в случае, если обходчик пошёл по краю поверхности S, он должен видеть S слева от себя).



В этом случае контур обходится в положительном направлении. Противоположное направление считаем отрицательным.

Очевидно, что если взять другую сторону поверхности, т.е. изменить в данной точке направление нормали на противоположное, то положительное направление обхода контуров станет отрицательным и наоборот.



Стрелка указывает новое положительное направление обхода – оно совпадает с бывшим отрицательным.

4. Поверхностные интегралы II типа (II рода).

Пусть S — двусторонняя поверхность. Вначале считаем, что S задана уравнением $z = z(x, y)$, $(x, y) \in D_1$,где D_1 — квадрируемое множество на плоскости XOY. Как обычно, считаем, что $z(x, y)$, $\frac{\partial z}{\partial z}(x, y)$, $\frac{\partial z}{\partial y}(x, y)$ — непрерывные на D_1 функции, и выберем верхнюю нормаль к S.

Разобьем область D_1 на квадрируемые участки $D_{1,i}$ и выберем точки $(\xi_i, \eta_i) \in D_1$ произвольным образом. Пусть функция $R(x, y, z)$ определена на поверхности S.

Рассмотрим интегральную сумму

$$\sum_{i=0}^{n-1} R(\xi_i, \eta_i, z(\xi_i, \eta_i)) \cdot \text{пл.}(D_{1,i}) = \sigma(R, T, \{\xi_i, \eta_i\})$$

Если $\exists\ I \in R \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall T : d(T) < \delta \quad \forall \{\xi_i, \eta_i\}$

$$|\sigma(R, T, \{\xi_i, \eta_i\}) - I| < \varepsilon,$$

то число I называется ***поверхностным интегралом II типа (II рода)*** от функции *f* по внешней стороне S и обозначается так:

$$I = \iint_S R(x, y, z) dxdy .$$

(Часто используется более современное обозначение $I = \iint_S R(x, y, z) dx \wedge dy$.)

Если выбрана нижняя сторона поверхности S, то все величины $\text{пл.}(D_{1,i})$ в интегральной сумме заменяем на $(-\text{пл.}(D_{i,1}))$.

Это означает, что поверхностный интеграл II типа (II рода) по нижней стороне поверхности отличается от интеграла по верхней стороне поверхности только знаком.

Как отмечалось выше, $\text{пл.}(S_i) = \dfrac{\text{пл.}(D_{1,i})}{|\cos \gamma_i|}$

$\text{пл.}(D_{i,1}) = \text{пл.}(S_i) |\cos \gamma_i|$, т.е.

$пл.(D_{i,1}) = пл.(S_i)\cos\gamma_i$, если γ_i составляет с осью Z острый угол.

$пл.(D_{i,1}) = -пл.(S_i)\cos\gamma_i$, если γ_i составляет с осью Z тупой угол.

Поэтому, $\cos\gamma_i пл.(S_i) = пл.(D_i)$ или $-пл.(D_i)$, в зависимости от выбора стороны поверхности и $\iint\limits_S R(x,y,z)dx\wedge dy = \iint\limits_S R(x,y,z)\cos\gamma dS$.

Точно также, если $R(x,y,z)$ — непрерывная функция, то

$\iint\limits_S R(x,y,z)dx\wedge dy = \iint\limits_{D_1} R(x,y,z(x,y))dxdy$, если взята верхняя сторона S и

$\iint\limits_S R(x,y,z)dx\wedge dy = -\iint\limits_{D_1} R(x,y,z(x,y))dxdy$, если взята нижняя сторона S.

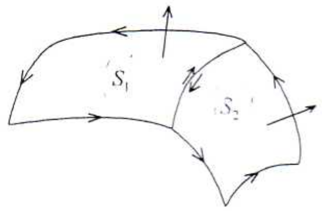
Если S задаётся уравнением $y = y(x,z)$, $(x,z)\in D_2$, квадрируемой области плоскости xOz, то определён интеграл $\iint\limits_S Q(x,y,z)dz\wedge dx$, который равен $\iint\limits_S Q(x,y,z)\cos\beta dS$. Интеграл $\iint\limits_S Q(x,y,z)\cos\beta dS$ вычисляется по формуле $\iint\limits_S Q(x,y(x,z),z)dxdz$, если угол, составляемый нормалью к выбранной стороне поверхности с осью y острый (то есть, угол β), и по формуле $-\iint\limits_S Q(x,y(x,z),z)dxdz$, если этот угол тупой.

Если же S задана уравнением $x = x(y,z)$, $(y,z)\in D_3$, квадрируемой области плоскости yOz, то определён интеграл $\iint\limits_S P(x,y,z)dy\wedge dz$, равный $\iint\limits_S P(x,y,z)\cos\alpha dS$ и вычисляемый по формуле $\iint\limits_{D_3} P(x(y,z),y,z)dydz$, если угол, составляемый нормалью к выбранной стороне поверхности с осью x острый, и по формуле $-\iint\limits_{D_3} P(x(y,z),y,z)dydz$, если этот угол тупой.

Если поверхность S можно одновременно представить уравнениями рассмотренных выше типов, то определён

$$\iint\limits_S P(x,y,z)dy\wedge dz + Q(x,y,z)dz\wedge dx + R(x,y,z)dx\wedge dy = \iint\limits_S P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)dS$$

Если поверхность S есть конечное объединение таких поверхностей и *ориентации таких поверхностей согласованы*, то интеграл по всей поверхности равен сумме интегралов по составляющим эту поверхность частям.



Согласованность ориентации означает следующее: нормали на отдельных частях выбраны так, что положительные направления обхода общих границ противоположны друг другу.

В общем случае, если поверхность S задана параметрически:

$$x = x(u,v)$$
$$y = y(u,v)$$
$$z = z(u,v)$$

где $u,v \in \Delta$ - квадрируемой области и $x,y,z \in C^1(\Delta)$, то

$$\iint_S P(x,y,z,)\cos\alpha\ dS + Q(x,y,z)\cos\beta\ dS + R(x,y,z)\cos\gamma\ dS =$$
$$= \pm\iint_\Delta P(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\cdot A(u,v)dudv \pm \iint_\Delta Q(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\cdot B(u,v)dudv \pm$$
$$\pm\iint_\Delta R(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\cdot C(u,v)dudv$$

где, как и выше,

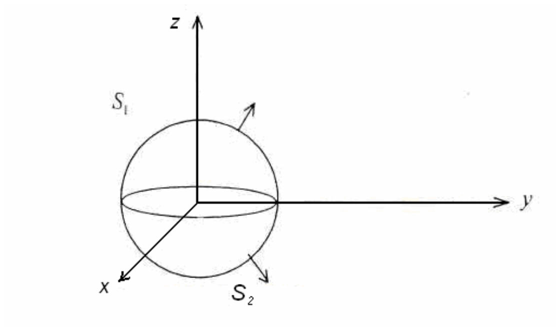
$$A(u,v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}, \qquad B(u,v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial u} \\ \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial v} \end{vmatrix}, \qquad C(u,v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix},$$

(то есть, коэффициенты нормали, равной $\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}$),

а знак “+” или “–” выбирается в соответствии с выбором стороны поверхности.

Пример. Приведём пример вычисления поверхностного интеграла 2-го типа $I = \iint_S xdy \wedge dz + ydz \wedge dx + zdx \wedge dy$, где S – внешняя сторона сферы

$x^2+y^2+z^2=a^2$. Обозначим $I_1=\iint\limits_S zdx\wedge dy$. Из соображений симметрии очевидны равенства $\iint\limits_S xdy\wedge dz=\iint\limits_S ydz\wedge dx=I_1$, так что $I=3I_1$. Поверхность S состоит из частей S_1 и S_2, задаваемых уравнениями $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ (это S_1 – верхняя полусфера) и $z=-\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ (это уравнение для нижней полусферы S_2). На S_1 внешняя нормаль составляет с осью z острый угол, на S_2 – тупой.



Поэтому $\iint\limits_{S_1} zdxdy=\iint\limits_D\sqrt{a^2-x^2-y^2}\,dxdy=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\sqrt{a^2-r^2}\,rdr=2\pi\cdot\frac{1}{2}\int\limits_0^a\sqrt{a^2-r^2}\,d\left(r^2\right)=$

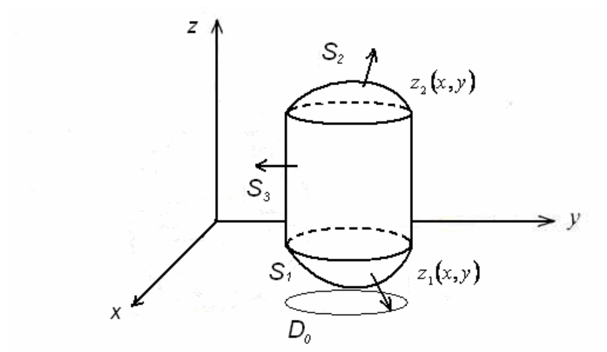
$$=-\pi\int\limits_0^a\sqrt{a^2-r^2}\,d\left(a^2-r^2\right)=-\pi\frac{2}{3}\left(\sqrt{a^2-r^2}\right)^3\Big|_0^a=\frac{2\pi a^3}{3}.$$

Аналогично, так как на S_2 $z=-\sqrt{a^2-x^2-y^2}$, а нормаль составляет с осью z тупой угол, $\iint\limits_{S_2} zdx\wedge dy=-\iint\limits_D-\sqrt{a^2-x^2-y^2}\,dxdy=\iint\limits_D\sqrt{a^2-x^2-y^2}\,dxdy=$ $=\frac{2\pi a^3}{3}$. Значит, $I_1=\iint\limits_S zdx\wedge dy=\frac{2\pi a^3}{3}+\frac{2\pi a^3}{3}=\frac{4\pi a^3}{3}$. Поэтому $I=3I_1=4\pi a^3$.

5. Формула Остроградского-Гаусса.

Теорема. Пусть S – замкнутая кусочно-гладкая поверхность, ограничивающая тело V в пространстве. Пусть выбрана внешняя сторона S. Пусть P,Q,R – функции, имеющие непрерывные производные на V. Тогда $\oiint\limits_S\left(Pdy\wedge dz+Qdz\wedge dx+Rdx\wedge dy\right)=\iiint\limits_V\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dxdydz$. Равносильная формулировка: $\oint\!\!\oint_S (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)dS = \iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)dxdydz$, где $(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ – <u>внешняя</u> нормаль к S.

<u>**Доказательство.**</u> Предположим, что V ограничено сверху S_2 – графиком функции $z = z_2(x,y)$, снизу S_1 $z = z_1(x,y)$, $x, y \in D_0$, а сбоку – цилиндрической поверхностью S_3.



Вычислим $\iiint_V \frac{\partial R}{\partial z} dxdydz = \iint_{D_0} dxdy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} \frac{\partial R}{\partial z} dz = \iint_{D_0} (R(x,y,z_2(x,y)) - R(x,y,z_2(x,y)))dxdy =$

$= \iint_{D_0} R(x,y,z_2(x,y))dxdy - \iint_{D_0} R(x,y,z_1(x,y))dxdy = \iint_{S_2} Rdx \wedge dy - \iint_{S_1} Rdx \wedge dy$, так как на S_1 внешняя нормаль составляет с осью z тупой угол.

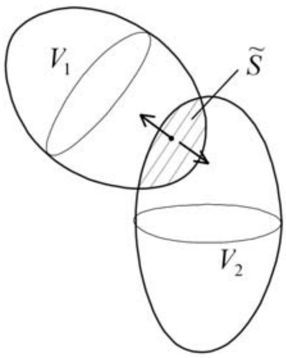
Далее, на S_3 $\cos\gamma = 0$ и можно добавить к сумме слагаемое $0 = \iint_{S_3} R\cos\gamma \; dS = \iint_{S_3} Rdx \wedge dy$.

Итак, $\iiint_V \frac{\partial R}{\partial z} dxdydz = \oint\!\!\oint_S Rdx \wedge dy$.

Далее, если поверхность S можно представить в виде объединения поверхностей $x = x_2(y,z)$, $x = x_1(y,z)$, $x, y \in D_1$ и цилиндрической поверхности, то $\iiint_V \frac{\partial Q}{\partial y} dxdydz = \oint\!\!\oint_S Qdz \wedge dx$, и, при аналогичных условиях, $\iiint_V \frac{\partial P}{\partial x} dxdydz = \oint\!\!\oint_S Pdy \wedge dz$.

Поэтому, если поверхность S удовлетворяет условиям всех трёх случаев, то $\oint\!\!\oint_S (Pdy \wedge dz + Qdz \wedge dx + Rdx \wedge dy) = \iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)dxdydz$.

Теперь предположим, что V состоит из конечного числа тел $V_1,\ldots,V_k$, разделённых гладкими поверхностями $S_1,\ldots,S_k$, причём эти тела V_i удовлетворяют сформулированным выше условиям. Для простоты, пусть $V = V_1 \cup V_2$, $S = S_1 \cup S_2$:



Тогда:

$\iiint\limits_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dxdydz = \iiint\limits_{V_1} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dxdydz + \iiint\limits_{V_2} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dxdydz$. Каждый из интервалов $\iiint\limits_{V_1} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dxdydz$, $i = 1,2$, преобразуем по формуле Остроградского-Гаусса как $\oint\!\!\!\oint\limits_{S_i} (Pdy \wedge dz + Qdz \wedge dx + Rdx \wedge dy)$, $i = 1,2$, где взяты <u>внешние</u> стороны поверхностей S_i, $i = 1,2$.

Поверхности S_1 и S_2 имеют общую часть $\tilde{S}$, причём их внешние нормали на $\tilde{S}$ противоположны и интегралы по $\tilde{S}$ от $Pdy \wedge dz + Qdz \wedge dx + Rdx \wedge dy$ взаимно сократятся, поэтому $\iint\limits_{S_1} Pdy \wedge dz + Qdz \wedge dx + Rdx \wedge dy +$

$$+ \iint\limits_{S_2} Pdy \wedge dz + Qdz \wedge dx + Rdx \wedge dy = \oint\!\!\!\oint\limits_{S} Pdy \wedge dz + Qdz \wedge dx + Rdx \wedge dy .$$

Тем самым, теорема доказана.

6. Формула Стокса.

<u>Теорема.</u> Пусть S – гладкая ориентированная двусторонняя поверхность (т.е. направление нормали выбрано) и L – кусочно гладкая кривая, ограничивающая S, причём мы считаем направление обхода L положительным. Пусть функции P,Q,R – непрерывно дифференцируемые. Тогда $\oint\limits_L (Pdx + Qdy + Rdz) = \iint\limits_S \left(\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dy \wedge dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dz \wedge dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx \wedge dy \right)$.

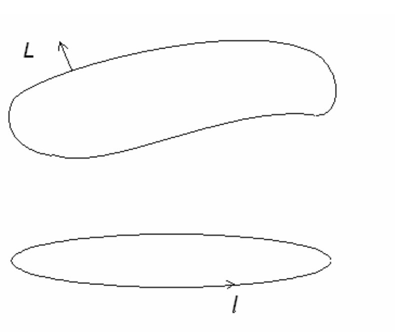
<u>Замечание 1.</u> Равносильная формулировка $\oint\limits_L (Pdx + Qdy + Rdz) = \iint\limits_S \left(\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \cos\alpha + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \cos\beta + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \cos\gamma \right) dS$.

<u>Замечание 2.</u> В случае плоской кривой L, лежащей на плоскости Oxy и функций $P(x,y)$, $Q(x,y)$ эта формула совпадает с формулой Грина.

<u>Замечание 3.</u> Формулы в правой части запомнить непросто. Поэтому удобно записать подынтегральное выражение в виде определителя: $\begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$.

Разумеется, это не совсем обычный определитель. Ведь во второй строке его стоят <u>операторы</u> дифференцирования. Поэтому условимся считать, что мы понимаем под этим определителем его формальное разложение по первой строке, причём произведение, например, оператора $\frac{\partial}{\partial x}$ на функцию R есть $\frac{\partial R}{\partial x}$ и т.п.

<u>Доказательство.</u> Вычислим, например, $\oint\limits_L Pdx$. Пусть, для простоты,



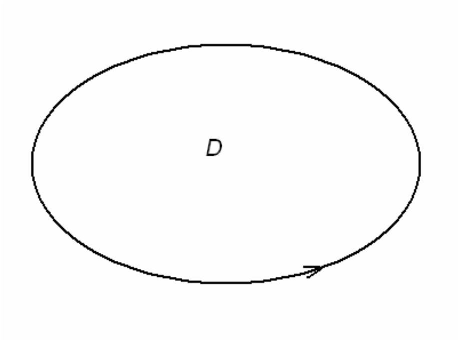
$z = z(x,y)$ - уравнение S.

Тогда рассмотрим параметризацию проекции l кривой L на плоскости $z=0$: $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in [T_0;T_1]$ (разумеется, $x(t)$, $y(t)$ - непрерывно дифференцируемые функции).

Тогда $\oint\limits_L Pdx = \int\limits_{T_0}^{T_1} P(x(t), y(t), z(x(t), y(t)))x'dt = \oint\limits_l P(x,y,z(x,y))dx$. К плоской кривой l применим формулу Грина: $\oint\limits_l P(x,y,z(x,y))dx = -\iint\limits_D \frac{\partial}{\partial y} P(x,y,z(x,y))dxdy$, где D –

ограничиваемая кривой l область плоскости Оху. Вычислим $\frac{\partial}{\partial y}P(x,y,z(x,y))=$

$=\frac{\partial P}{\partial y}+\frac{\partial P}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}$. Итак, $\oint\limits_l Pdx=-\iint\limits_D\left(\frac{\partial P}{\partial y}+\frac{\partial P}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}\right)dxdy$.



Перейдём от двойного интеграла к поверхностному: $dxdy=\cos\gamma dS$, $\frac{\partial z}{\partial y}\cos\gamma=-\cos\beta$, и значит, $\frac{\partial z}{\partial y}dxdy=\frac{\partial z}{\partial y}\cos\gamma dS=-\cos\beta dS$. Поэтому $\oint\limits_l Pdx=\iint\limits_S\left(\frac{\partial P}{\partial z}\cos\beta-\frac{\partial P}{\partial y}\cos\gamma\right)dS$.

Аналогично, $\oint\limits_L Qdy=\iint\limits_S\left(\frac{\partial Q}{\partial z}\cos\gamma-\frac{\partial Q}{\partial y}\cos\alpha\right)dS$, $\oint\limits_l Rdz=\iint\limits_S\left(\frac{\partial R}{\partial y}\cos\alpha-\frac{\partial R}{\partial x}\cos\beta\right)dS$

и $\oint\limits_L(Pdx+Qdy+Rdz)=\iint\limits_S\left(\frac{\partial P}{\partial z}\cos\beta-\frac{\partial P}{\partial y}\cos\gamma\right)dS+\iint\limits_S\left(\frac{\partial Q}{\partial x}\cos\gamma-\frac{\partial Q}{\partial z}\cos\alpha\right)+$

$$+\iint\limits_S\left(\frac{\partial R}{\partial y}\cos\alpha-\frac{\partial R}{\partial x}\cos\beta\right)dS=\iint\limits_S\left(\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\cos\alpha+\left(\frac{\partial p}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\cos\beta+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\cos\gamma\right)dS.$$

Формула Стокса доказана.

Введение в теорию дифференциальных форм.

В трёхмерном пространстве определены следующие внешние дифференциальные формы:

$\omega^1=Pdx+Qdy+Rdz$ *(форма первой степени)*

$\omega^2=Rdx\wedge dy+Qdz\wedge dx+Pdy\wedge dz$ *(форма второй степени)*

Здесь и выше P, Q и R – функции от x, y и z.

$\omega^3=dx\wedge dy\wedge dz$ *(ориентированный элемент объёма)*

Операция $\wedge$ *, называемая внешним произведением, обладает такими свойствами:*

1) $(dx\wedge dy)\wedge dz=dx\wedge(dy\wedge dz)$

2) $dx \wedge dy = -dy \wedge dx$

Для дифференциальной формы определено дифференцирование, обладающее свойствами:

1) $d(\omega_1 + \omega_2) = d\omega_1 + d\omega_2$

2)d($(\omega_1 \wedge \omega_2) = d\omega_1 \wedge d\omega_2 + (-1)^k \omega_1 \wedge d\omega_2$, где k – степень формы ω_2

3) $d(d\omega) = 0$

Следуя этим правилам, вычислим: $d(Pdx) = dP \wedge dx + Pd(fx) = dP \wedge dx$*, т.к. P – формулой нулевой степени.*

Например,

$$d\omega^1 = d(Pdx + Qdy + Rdz) = d(Pdx) + d(Qdy) + d(Rdz) =$$

$$= dP \wedge dx + dQ \wedge dy + dR \wedge dz = \left(\frac{\partial P}{\partial x}dx + \frac{\partial P}{\partial y}dy + \frac{\partial P}{\partial z}dz \right) \wedge dx +$$

$$+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}dx + \frac{\partial Q}{\partial y}dy + \frac{\partial Q}{\partial z}dz \right) \wedge dy + \left(\frac{\partial R}{\partial x}dx + \frac{\partial R}{\partial y}dy + \frac{\partial R}{\partial z}dz \right) dz =$$

$$= \frac{\partial P}{\partial x}dx \wedge dx + \frac{\partial P}{\partial y}dy \wedge dx + \frac{\partial P}{\partial z}dz \wedge dx + \frac{\partial Q}{\partial x}dx \wedge dy + \frac{\partial Q}{\partial y}dy \wedge dy +$$

$$+ \frac{\partial Q}{\partial z}dz \wedge dy + \frac{\partial R}{\partial x}dx \wedge dz + \frac{\partial R}{\partial y}dy \wedge dz + \frac{\partial R}{\partial z}dz \wedge dz =$$

$$= \left(-\frac{\partial P}{\partial y} \right) dx \wedge dy + \frac{\partial P}{\partial z}dz \wedge dx + \frac{\partial Q}{\partial x}dx \wedge dy + \frac{\partial R}{\partial y}dy \wedge dz + \left(-\frac{\partial Q}{\partial z} \right) dy \wedge dz + \left(-\frac{\partial R}{\partial x} \right) dz \wedge dx =$$

$$= \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx \wedge dy + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial y}x \right) dz \wedge dx + \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dy \wedge dz$$

Полученный результат даёт повод вспомнить теорему Стокса.

Далее,

$$d(\omega^2) = d(Rdx \wedge dy + Qdz \wedge dx + Pdy \wedge dz) = dR \wedge dx \wedge dy +$$

$$+ dQ \wedge dz \wedge dx + dP \wedge dy \wedge dz = \left(\frac{\partial R}{\partial x}dx + \frac{\partial R}{\partial y}dy + \frac{\partial R}{\partial z}dz \right) \wedge dx \wedge dy +$$

$$+ \left(\frac{\partial Q}{\partial x}dx + \frac{\partial Q}{\partial y}dy + \frac{\partial Q}{\partial z}dz \right) \wedge dz \wedge dx + \left(\frac{\partial P}{\partial x}dx + \frac{\partial P}{\partial y}dy + \frac{\partial P}{\partial z}dz \right) \wedge dy \wedge dz =$$

$$= \frac{\partial R}{\partial x}dx \wedge dx \wedge dy + \frac{\partial R}{\partial y}dy \wedge dx \wedge dy + \frac{\partial R}{\partial z}dz \wedge dx \wedge dy + \frac{\partial Q}{\partial x}dx \wedge dz \wedge dx +$$

$$+\frac{\partial Q}{\partial y}dy\wedge dz\wedge dx+\frac{\partial Q}{\partial z}dz\wedge dz\wedge dx+\frac{\partial P}{\partial x}dx\wedge dy\wedge dz+$$

$$+\frac{\partial P}{\partial y}dy\wedge dy\wedge dz+\frac{\partial P}{\partial z}dz\wedge dy\wedge dz=\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial R}{\partial z}+\frac{\partial Q}{\partial y}\right)dx\wedge dy\wedge dz$$

так как $dz\wedge dx\wedge dy=-dx\wedge dz\wedge dy=dx\wedge dy\wedge dz$.

Полученный результат даёт повод вспомнить теорему Остроградского.

Приложения кратных, криволинейных и поверхностных интегралов. Элементы теории поля.

1. *Скалярное и векторное поле*

Определение. *Скалярное поле* на области $D \subset \mathbf{R}^3$ ($D \subset \mathbf{R}^2$) представляет собой произвольную функцию $U(M)$, определенную на $D, M \in D$.

Поверхности уровня скалярного поля – это множества решений уравнения $U(M) = C,\ C \in \mathbf{R}$ при заданных значениях C.

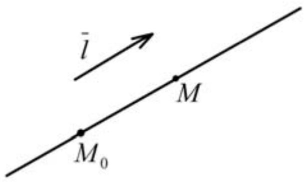
Пример. На географической карте *линии уровня* (двумерный аналог поверхности уровня) показывают точки, лежащие на одной высоте. Аналогичные примеры – изотермы, изобары и т.д.

Векторное поле $\overline{F}$ на области $D \subset \mathbf{R}^3$ (или $D \subset \mathbf{R}^2$) – это вектор, координаты которого (P, Q, R) являются функциями, определенными на D.

Примеры представляют собой силовое поле, поле скоростей и т.п.

2. *Производная скалярного поля по направлению. Градиент скалярного поля*

Во 2-м семестре мы уже рассматривали производную плоского поля (т.е. $D \subset \mathbf{R}^2$) по направлению l, $\dfrac{\partial U}{\partial l}$. Понятие *величины отрезка* M_0M определяется аналогично и для $D \subset \mathbf{R}^3$. Напоминаем: *величина* M_0M отрезка $\overline{M_0M}$ представляет собой его длину со знаком “+”, если векторы $\overline{M_0M}$ и $\bar{l}$ одинаково направлены и длину со знаком “-”, если их направления противоположны. Тогда, по определению, $\dfrac{\partial U}{\partial l} = \lim\limits_{M \to M_0} \dfrac{U(M) - U(M_0)}{M_0M}$.



Если введена система прямоугольных декартовых координат и вектор $\bar{l}$ задан направляющими косинусами $(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$, то при условии дифференцируемости U в т. M_0 легко вывести формулу:

$$\frac{\partial U}{\partial l}(M_0) = \frac{\partial U}{\partial x}(M_0)\cos\alpha + \frac{\partial U}{\partial y}(M_0)\cos\beta + \frac{\partial U}{\partial z}(M_0)\cos\gamma = \left(\mathrm{grad}U, \bar{l}\right),$$ где

$\mathrm{grad}U(M_0) = \left(\frac{\partial U}{\partial x}(M_0), \frac{\partial U}{\partial y}(M_0), \frac{\partial U}{\partial z}(M_0)\right)$ - *градиент* скалярного поля U в точке M_0.

Разумеется, понятие градиента можно ввести и без использования системы координат: $\frac{\partial U}{\partial l} = |\mathrm{grad}U| \cdot |\bar{l}| \cdot \cos\phi = |\mathrm{grad}U| \cdot \cos\phi$, т.к. $\bar{l}$ - единичный вектор. Таким образом, $\left|\frac{\partial U}{\partial l}\right| \le |\mathrm{grad}U|$, причем равенство наступает при условии $|\cos\phi| = 1$. Наибольшее значение $\frac{\partial U}{\partial l}$ по всем выборам $\bar{l}$, таким образом, есть $|\mathrm{grad}(U(M_0))|$, а направление градиента – это как раз тот вектор $\bar{l}$, на котором это наибольшее значение достигается. Итак, направление и модуль вектора $\mathrm{grad}U(M_0)$ определено без использования координат. Это говорит об инвариантности этого понятия и о наличии реальных естественно-научных интерпретаций.

Однако для вычисления градиента удобно его координатное представление. Из него, в частности, легко следуют свойства градиента.

1. $\mathrm{grad}(u+v) = \mathrm{grad}u + \mathrm{grad}v$
2. $\mathrm{grad}(c \cdot u) = c\,\mathrm{grad}u,\ c = const$
3. $\mathrm{grad}(u \cdot v) = u\,\mathrm{grad}v + v\,\mathrm{grad}u$
4. $\mathrm{grad}(u/v) = \frac{v\,\mathrm{grad}u - u\,\mathrm{grad}v}{v^2},\ v \ne 0$
5. $\mathrm{grad}f(u) = f'(u)\,\mathrm{grad}u$ (f - дифференцируемая функция)

Пример. Найдем $\operatorname{grad} r$, где $r = |\bar{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ - модуль радиус-вектора $\bar{r}(x, y, z)$.

$$\frac{\partial r}{dx} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \ \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \ \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$ и

$$\operatorname{grad} r = \left(\frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r}\right) = \frac{\bar{r}}{r}.$$

По формуле 5 из этого равенства следует: $\operatorname{grad} f(r) = f'(r) \cdot \frac{\bar{r}}{r}$

Мы получили формулу для вычисления градиента радиальной функции $f(r)$.

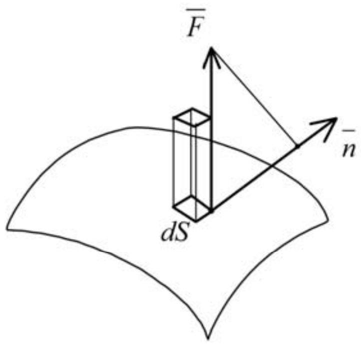
Рассмотрим теперь поверхность уровня скалярного поля U, т.е. поверхность, задаваемую уравнением $U(x, y, z) = C$. Предположим, что U - непрерывно дифференцируемая функция от x, y, z. Тогда уравнение касательной плоскости в точке M_0, лежащей на этой поверхности, имеет вид

$$\frac{\partial U}{\partial x}(M_0)(x - x_0) + \frac{\partial U}{\partial y}(M_0)(y - y_0) + \frac{\partial U}{\partial z}(M_0)(z - z_0) = 0.$$

Координаты вектора градиента представляют собой коэффициенты этого уравнения. Поэтому $\operatorname{grad} U(M_0)$ - нормаль к касательной плоскости в т. M_0 и, по определению, нормаль к самой поверхности уровня в этой точке.

3. Поток вектора через поверхность. Дивергенция векторного поля. Векторная формулировка теоремы Остроградского-Гаусса

Пусть $\overline{F}$ - векторное поле, S - двусторонняя поверхность. Пусть выбрана сторона, т.е. нормаль $\bar{n}$. Назовем $\iint\limits_S (\overline{F} \cdot \bar{n}) dS$ - *потоком вектора* $\overline{F}$ через поверхность S в указанную сторону.



Этот термин совпадает со следующей гидродинамической задачей. Пусть $\overline{F}$ - вектор скорости течения жидкости в момент t. Посчитаем, сколько жидкости пройдет через малую часть поверхности dS за момент времени dt. Этот объем жидкости представляет собой цилиндр с основанием dS и высотой $\overline{F}\cdot\overline{n}\cdot dt$, т.е. этот объем равен $\overline{F}\cdot\overline{n}\cdot dS\cdot dt$.

Тогда для всей поверхности получим $dt\iint\limits_S \overline{F}\cdot\overline{n}\cdot dS$. Таким образом, <u>поток</u> представляет собой скорость изменения количества протекающей через S жидкости в рассматриваемый момент времени.

Пусть векторное поле $\overline{F}$ задано в выбранной системе координат как $\overline{F}(P,Q,R)$. Назовем *дивергенцией* $\overline{F}$ скалярное поле $\operatorname{div}\overline{F}=\dfrac{\partial P}{\partial x}+\dfrac{\partial Q}{\partial y}+\dfrac{\partial R}{\partial z}$ (при условии, что эти частные производные существуют).

Легко доказать, что:

1. $\operatorname{div}\left(\overline{a}+\overline{b}\right)=\operatorname{div}\overline{a}+\operatorname{div}\overline{b}$
2. $\operatorname{div}\left(U\cdot\overline{a}\right)=U\operatorname{div}\overline{a}+\overline{a}\operatorname{grad}U$. Здесь U - скалярное поле и символ $\overline{a}\operatorname{grad}U$ обозначает скалярное произведение этих векторов.

Вспомним формулировку теоремы Остроградского-Гаусса: $\iint\limits_S (P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)dS=\iiint\limits_V\left(\dfrac{\partial P}{\partial x}+\dfrac{\partial Q}{\partial y}+\dfrac{\partial R}{\partial z}\right)dxdydz$, где $\overline{F}=(P,Q,R)$ - непрерывно дифференцируемое векторное поле, S - замкнутая поверхность, ограничивающая объем V и $(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$ - вектор внешней нормали.

Левая часть формулы имеет вид $\iint\limits_S\left(\overline{F}\cdot\overline{n}\right)dS$, т.е. представляет собой поток $\overline{F}$ через внешнюю сторону S, а правую часть можно выразить следующим образом: $\iiint\limits_V \mathrm{div}\overline{F}dxdydz$. Итак, векторная формулировка теоремы Остроградского-Гаусса:

При сформулированных выше условиях $\iint\limits_S \left(\overline{F}\cdot\overline{n}\right)dS = \iiint\limits_V \mathrm{div}\overline{F}dxdydz$.

Понятие $\mathrm{div}\overline{F}$ можно определить независимым от координат способом. Для этого рассмотрим точку M_0, окружим ее шаром радиуса ε и применим теорему Остроградского-Гаусса: $\iint\limits_{S_\varepsilon} \left(\overline{F}\cdot\overline{n}\right)dS = \iiint\limits_{V_\varepsilon} \mathrm{div}\overline{F}dxdydz$, где V_ε - вышеупомянутый шар, а S_ε - внешняя сторона ограничивающей его сферы. К правой части применим теорему о среднем (учитывая <u>непрерывность</u> $\mathrm{div}\overline{F}$): $\iiint\limits_{V_\varepsilon} \mathrm{div}\overline{F}dxdydz = \mathrm{div}\overline{F}\left(M_1\right)\frac{4}{3}\pi\varepsilon^3$, где M_1 - близкая к M_0 точка. При $\varepsilon \to 0$ $\mathrm{div}\overline{F}\left(M_1\right) \to \mathrm{div}\overline{F}\left(M_0\right)$ и мы можем определить дивергенцию равенством: $\mathrm{div}\overline{F}\left(M_0\right) = \lim\limits_{\varepsilon\to 0}\frac{\iint\limits_{S_\varepsilon}\left(\overline{F}\cdot\overline{n}\right)dS}{4/3\,\pi\varepsilon^3}$, в правой части которого система координат <u>не фигурирует</u>.

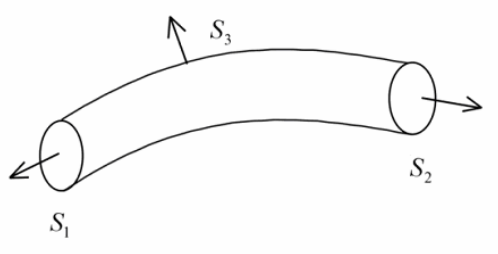
Если считать $\overline{F}$ вектором скорости жидкости, то $\mathrm{div}\overline{F}$ - это плотность источника, если $div\overline{F} > 0$, или стока, если $div\overline{F} < 0$.

4. Соленоидальное поле

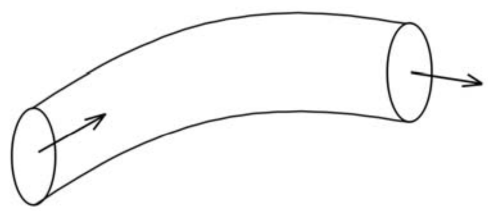
<u>**Определение.**</u> $\overline{F}$ - *соленоидальное поле*, если $\mathrm{div}\overline{F} = 0$.

Векторная линия обладает тем свойством, что в любой ее точке вектор касательной к линии совпадает с $\overline{F}$.

Векторная трубка – это совокупность векторных линий.



Пусть S_1, S_2 - сечения векторной трубки и S_3 - ее боковая поверхность. $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3$. Рассмотрим внешнюю нормаль к S и применим теорему Остроградского: $\iint\limits_S \overline{F} \cdot \overline{n} \cdot dS = \iiint\limits_V \operatorname{div} \overline{F} dxdydz = 0$, в случае соленоидального поля. Итак, $\iint\limits_{S_1} \overline{F} \cdot \overline{n} dS + \iint\limits_{S_2} \overline{F} \cdot \overline{n} dS + \iint\limits_{S_3} \overline{F} \cdot \overline{n} dS = 0$. На S_3 по определению векторной линии $\overline{F} \cdot \overline{n} = 0$, поэтому $\iint\limits_{S_2} \overline{F} \cdot \overline{n} dS + \iint\limits_{S_1} \overline{F} \cdot \overline{n} dS = 0$ или $-\iint\limits_{S_1} \overline{F} \cdot \overline{n} dS = \iint\limits_{S_2} \overline{F} \cdot \overline{n} dS$. Изменяя направление нормали на S_1 на противоположное получаем, что поток соленоидального поля через поперечные сечения векторных трубок постоянен.



5. Циркуляция, ротор. Векторная формулировка теоремы Стокса

Пусть L - контур с заданным направлением обхода, $\overline{F}$ - векторное поле, $\bar{l}$ - единичный вектор касательной к кривой. Определим *циркуляцию* как интеграл $\oint\limits_L \left(\overline{F} \cdot \bar{l}\right) dl$ (смысл – работа силы $\overline{F}$ вдоль контура L).

Введем систему координат. Пусть $(\cos\alpha_0, \cos\beta_0, \cos\gamma_0)$ - направляющие косинусы $\bar{l}$, (P,Q,R) - координаты $\overline{F}$.

Тогда $(\overline{F}\cdot\bar{l})dl = (P\cos\alpha_0 + Q\cos\beta_0 + R\cos\gamma_0)dl = Pdx + Qdy + Rdz = \overline{F}d\bar{r}$ и циркуляция представляет собой интеграл $\oint\limits_L Pdx + Qdy + Rdz$.

Для заданного непрерывно-дифференцируемого поля $\overline{F}(P,Q,R)$ определим *ротор* (или *вихрь*) этого поля: $\mathrm{rot}\overline{F} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)$.

Легко проверить свойства ротора.

1. $\mathrm{rot}(\bar{a} + \bar{b}) = \mathrm{rot}\bar{a} + \mathrm{rot}\bar{b}$
2. $\mathrm{rot}(U\bar{a}) = U\mathrm{rot}\bar{a} + \mathrm{grad}U \times \bar{a}$, где под $\mathrm{grad}U \times \bar{a}$ понимаем векторное произведение.

Вспомним теперь теорему Стокса:

$$\oint\limits_L Pdx + Qdy + Rdz = \iint\limits_S \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)dy \wedge dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)dz \wedge dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dx \wedge dy$$

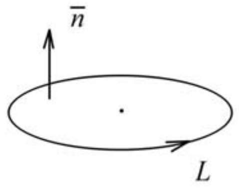
, где P, Q, R - непрерывно дифференцируемые функции, S - кусочно-гладкая поверхность, L - ее край, причем направление обхода L относительно выбранной стороны S является положительным.

Вспомним, что $dy \wedge dz = \cos\alpha dS$, $dz \wedge dx = \cos\beta dS$, $dxdy = \cos\gamma dS$, где $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ - направляющие косинусы к выбранной стороне.

При этом правая часть формулы Стокса принимает вид $\iint\limits_S \left(\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\cos\alpha + \right.$

$\left. + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\cos\beta + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\cos\gamma\right)dS$ или $\iint\limits_S (\mathrm{rot}\overline{F}\cdot\bar{n})dS$. Итак, в сделанных выше предположениях теорема Стокса выглядит так: $\oint\limits_L \overline{F}d\bar{r} = \iint\limits_S (\mathrm{rot}\overline{F}\cdot\bar{n})dS$.

Получим определение $\mathrm{rot}\overline{F}$ без использования системы координат. Пусть M_0 - точка, S_ε - плоскость, в которой лежит окружность L_ε радиуса ε с центром в M_0.



Тогда $\iint\limits_{(S_\varepsilon)} \left(\mathrm{rot}\overline{F} \cdot \overline{n}\right) dS = \mathrm{rot}\overline{F}(M_1) \cdot \overline{n}(M_1) \cdot \pi\varepsilon^2$ по теореме о среднем ввиду непрерывности подынтегральной функции. Здесь точка M_1 близка к M_0. По теореме Стокса, $\oint\limits_{L_\varepsilon} \left(\overline{F} \cdot \overline{l}\right) dl = \left(\mathrm{rot}\overline{F}(M_1) \cdot \overline{n}(M_1)\right) \cdot \pi\varepsilon^2$ или

$$\mathrm{rot}\overline{F}(M_0) \cdot \overline{n}(M_0) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\oint\limits_{L_\varepsilon} \left(\overline{F} \cdot \overline{l}\right) dl}{\pi\varepsilon^2}.$$

Ввиду произвольности выбора плоскости, получаем проекцию $\mathrm{rot}\overline{F}(M_0)$ на произвольную ось $\overline{n}(M_0)$. Это определяет и сам вектор.

Легко вычислить, что $\mathrm{rot}\,\mathrm{grad} U = \overline{0}$.

Можно доказать и обратное. Если область односвязная и векторное поле $\overline{F}$ удовлетворяет условию $\mathrm{rot}\overline{F} = 0$, то $\overline{F}$ - потенциальное, т.е. существует функция U такая, что $\overline{F} = \mathrm{grad} U$.

Отметим, что выводы о независимости интеграла от формы пути интегрирования, сделанные для двумерного случая, полностью переносятся и на трехмерный. Полученное там условие $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$ и $\mathrm{rot}\overline{F} = 0$ вполне аналогичны.