Московский государственный университет
им. М.В. Ломоносова

В.Г. Чирский

ЛЕКЦИИ

ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ

ДЛЯ СТУДЕНТОВ ХИМИЧЕСКОГО ФАКУЛЬТЕТА

**ВТОРОЙ КУРС
3 СЕМЕСТР**

2005

Уважаемый читатель!

Основная цель этого издания – облегчить студентам общего потока подготовку к экзамену по математическому анализу. К сожалению, иногда в Интернет попадают материалы, созданные коллективами «доброжелателей». На них, бывает, поставлена и моя фамилия. Вынужден сообщить, что к изданиям, отличным от настоящего, я не имею отношения! Мало того, эти издания могут содержать ошибки, искажающие смысл излагаемого материала.

Поэтому я посчитал своим долгом дать проверенный мной материал. Он в точности соответствует экзаменационным требованиям и материалам прочитанных лекций. Разумеется, иногда на лекциях могли использоваться несколько другие обозначения и порядок изложения мог быть слегка изменён. Кроме того, на лекциях я часто рассказывал о вопросах, выходящих за рамки экзаменационных билетов, но полезных для лучшего понимания сути содержащегося в них материала и взаимосвязи между математикой и другими естественными науками. Имея собственные лекции и используя эту книгу, Вы сумеете быстрее и лучше подготовиться к экзамену.

Надеюсь также, что впоследствии, столкнувшись с необходимостью использования быстро развивающихся математических методов исследований, в том числе в химии, Вам будет проще найти правильный подход к задаче, вспомнив университетский курс математики.

В подготовке издания мне оказали помощь Ваши коллеги, студенты 2 курса химического факультета. Выражаю им свою признательность. Буду очень благодарен всем тем, кто возьмёт на себя труд отметить опечатки в этой книге. Кроме того, для меня будут очень важны любые Ваши замечания как о стиле изложения материала, так и о содержании книги. Они могут быть очень полезными для того, чтобы улучшить книгу в дальнейшем.

Успехов Вам!

Ваш лектор, профессор В.Г. Чирский

15 декабря 2005 г.

Прошу опубликовать на сайте химического ф-та лекции для студентов 2 курса

Ст. преподаватель

Левагов С.М.

Числовые ряды

1. Числовые ряды. Критерий Коши сходимости числового ряда. Свойства сходящихся рядов

Бесконечный ряд обозначается так:

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots ,$$

или

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n .$$

Прежде всего требуется дать точное определение этого понятия.
Для заданной последовательности чисел $\{a_n\}$ рассмотрим последовательность чисел

$$S_N = a_1 + \ldots + a_N ,$$

называемых *частичными суммами* ряда.

Определение. Если существует предел последовательности S_N при $N \to \infty$, то говорят, что *ряд сходится*. Величина

$$\lim_{N\to\infty} S_N = S$$

называется *суммой ряда*. Если же предел последовательности S_N при $N \to \infty$ не существует, или бесконечен, то говорят, что *ряд расходится*.

Пример. Рассмотрим *геометрическую прогрессию*

$$1 + q + q^2 + \ldots + q^n + \ldots .$$

Вычислим частичную сумму этого ряда при $q \neq 1$:

$$S_n = 1 + q + q^2 + \ldots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1-q} .$$

Если $|q| < 1$, то $\lim_{n\to\infty} q^{n+1} = 0$, следовательно

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{1-q}$$

и рассматриваемый ряд сходится. При остальных значениях q он расходится и мы докажем это немного позже.

Определение. Бесконечный ряд

$$R_N = a_{N+1} + a_{N+2} + \ldots$$

называется *остатком ряда с номером* N.

Примечание. Разумеется, сам ряд можно считать остатком с номером 0.

Утверждение. *Если ряд сходится, то для любого номера* N *остаток* R_N *тоже сходится.*
Если существует номер N *такой, что остаток* R_N *сходится, то сам ряд сходится.*

Доказательство. Обозначим , при произвольном N

$$S_n^{*} = a_{N+1} + \ldots + a_{N+n} .$$

Тогда

$$S_{N+n} = a_1 + \ldots + a_{N+n} = a_1 + \ldots + a_N + a_{N+1} + \ldots + a_{N+n} = S_N + S_n^{*} .$$

В этом равенстве величина S_N не зависит от n, значит $\lim\limits_{n\to\infty} S_N = S_N$, поэтому сходимость остатка R_N, т.е. существование предела $\lim\limits_{n\to\infty} S_n^*$, равносильна существованию предела $\lim\limits_{n\to\infty} S_{N+n} = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$, т.е. сходимости исходного ряда, по теореме о пределе суммы последовательностей.

При изучении предела числовой последовательности мы доказали критерий Коши существования предела последовательности. Напомним формулировку этого критерия.

Критерий Коши существования предела последовательности. *Пусть $\{S_n\}$ - последовательность чисел. Предел $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ существует тогда и только тогда, когда*

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists N(\varepsilon) \, \forall n > N(\varepsilon) \, \forall p \in \mathrm{N} \; |S_{n+p} - S_n| < \varepsilon .$$

Для последовательности частичных сумм $\{S_n\}$ имеем:

$$S_{n+p} - S_n = a_1 + \ldots + a_{n+p} - (a_1 + \ldots + a_n) = a_{n+1} + \ldots + a_{n+p},$$

поэтому приведённый выше критерий можно переформулировать следующим образом:

Критерий Коши сходимости ряда. *Ряд сходится тогда и только тогда, когда*

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists N(\varepsilon) \, \forall n > N(\varepsilon) \, \forall p \in \mathrm{N} \; |a_{n+1} + \ldots + a_{n+p}| < \varepsilon .$$

Из критерия Коши сразу следует очень важный

Необходимый признак сходимости ряда. *Если ряд сходится, то* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Доказательство. Используем критерий Коши и положим в нём $p = 1$. Мы получим, что

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists N(\varepsilon) \, \forall n > N(\varepsilon) \; |a_{n+1}| < \varepsilon .$$

Это означает, что $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. Утверждение доказано.

Вернёмся к исследованию геометрической прогрессии. Из необходимого признака сразу следует, что при $|q| \geq 1$ ряд $1 + q + q^2 + \ldots + q^n + \ldots$ расходится. Тем самым, мы установили, что этот ряд сходится тогда и только тогда, когда $|q| < 1$.

Необходимый признак сходимости **не является достаточным.** Рассмотрим важный пример *гармонического ряда* :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}.$$

Условие $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, очевидно, выполняется. Однако этот ряд расходится. Для доказательства этого утверждения воспользуемся критерием Коши сходимости ряда. Докажем, что этот критерий для рассматриваемого ряда **не выполняется.** Для этого установим, что

$$\exists \varepsilon > 0 \, \forall N \, \exists n > N \, \exists p \in \mathrm{N} \left| \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{n+p} \right| \geq \varepsilon .$$

В качестве ε возьмём число $\frac{1}{2}$. Для любого числа N можно взять также любое

$n > N$. Положим $p = n$. Тогда

$$\frac{1}{n+1}+\ldots+\frac{1}{2n} > \frac{1}{2n}+\ldots+\frac{1}{2n}=\frac{1}{2}.$$

(Последнее равенство получено потому, что сумма содержит n одинаковых слагаемых, каждое из которых равно $\frac{1}{2n}$). Тем самым, утверждение доказано. Следовательно, гармонический ряд расходится.

Перечислим и докажем простейшие свойства сходящихся рядов.

Теорема. *Пусть сходятся ряды* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$, *а* c -- *постоянная величина. Тогда сходятся ряды* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n-b_n)$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} ca_n$, *причём*

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n+\sum_{n=1}^{\infty}b_n,\ \sum_{n=1}^{\infty}(a_n-b_n)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n-\sum_{n=1}^{\infty}b_n,\ \sum_{n=1}^{\infty}ca_n=c\sum_{n=1}^{\infty}a_n.$$

Доказательство. Обозначим частичные суммы рядов $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$, соответственно $S_N = a_1+\ldots+a_N$ и $S_N^* = b_1+\ldots+b_N$. Тогда частичные суммы рядов $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n-b_n)$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} ca_n$ соответственно, равны $S_N+S_N^*$, $S_N-S_N^*$, cS_N. Осталось применить известную теорему об арифметических свойствах предела последовательностей:

если последовательности S_N, S_N^* *имеют пределы, то имеют пределы и последовательности* $S_N+S_N^*$, $S_N-S_N^*$, cS_N, *причём выполняются равенства* : $\lim\limits_{N\to\infty}(S_N+S_N^*)=\lim\limits_{N\to\infty}S_N+\lim\limits_{N\to\infty}S_N^*$, $\lim\limits_{N\to\infty}(S_N-S_N^*)=\lim\limits_{N\to\infty}S_N$ - $\lim\limits_{N\to\infty}S_N^*$, $\lim\limits_{N\to\infty}cS_N=c\lim\limits_{N\to\infty}S_N$.

Вспоминая определение сходящегося ряда и его суммы видим, что теорема доказана.

Теорема. *Пусть* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *- сходящийся ряд. Сгруппируем его члены, не меняя их порядка:*

$$a_1+a_2+\ldots=(a_1+\ldots+a_{k_1})+(a_{k_1+1}+\ldots+a_{k_2})+\ldots+(a_{k_n+1}+\ldots+a_{k_{n+1}})+\ldots$$

и рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$, *где*

$$b_1=a_1+\ldots+a_{k_1},\ b_2=a_{k_1+1}+\ldots+a_{k_2},\ldots,\ b_{n+1}=a_{k_n+1}+\ldots+a_{k_{n+1}},\ldots.$$

Тогда этот ряд сходится и его сумма равна сумме исходного ряда.

Доказательство. Последовательность частичных сумм ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ имеет вид

$$S_N^*=b_1+\ldots+b_N=\ (a_1+\ldots+a_{k_1})+(a_{k_1+1}+\ldots+a_{k_2})+\ldots+(a_{k_{N-1}+1}+\ldots+a_{k_N})=S_{k_N},$$

где $S_M = a_1+...+a_M$ - частичная сумма исходного ряда. Таким образом, последовательность частичных сумм для ряда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ представляет собой подпоследовательность последовательности частичных сумм для ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Так как этот ряд сходится, последовательность его частичных сумм сходится, значит сходится любая её подпоследовательность, причём к тому же самому числу. (Напомним теорему: *если последовательность имеет предел, то любая её подпоследовательность имеет тот же самый предел*). Таким образом, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится и его сумма равна сумме ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Теорема доказана.

Будьте внимательны! Следующее утверждение является неверным в общем случае:

Если , в использованных выше обозначениях, сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$,то сходится и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, причём суммы этих рядов равны.

Приведём контрпример, опровергающий это утверждение. Рассмотрим ряд, имеющий вид (1-1)+(1-1)+...+(1-1)+... . Он равен 0+0+...+0+... , т.е. сходится и его сумма равна 0, т.к. все частичные суммы равны 0. Однако, если убрать скобки, то получится расходящийся (по необходимому признаку сходимости) ряд 1-1+1-1+1-1+... .

2. Числовые ряды с неотрицательными членами. Теоремы сравнения. Признаки Даламбера, Коши. Гаусса

Если известно, что члены ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ начиная с некоторого номера, неотрицательны(или неположительны), то исследовать сходимость ряда проще, чем в общем случае. Это связано с наличием простого критерия сходимости для такого класса рядов. Для простоты будем далее рассматривать ряды, все члены которых удовлетворяют неравенству $a_n \geq 0$.

Замечание. Если это неравенство выполняется начиная с некоторого номера n_0, то будем рассматривать не ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, а его остаток R_{n_0}, который, согласно сказанному в предыдущем параграфе, сходится тогда и только тогда, когда сходится сам ряд. Все члены этого ряда R_{n_0} уже неотрицательны.

Поэтому предположение о неотрицательности всех членов ряда не ограничивает общности наших исследований.

Теорема (Критерий сходимости ряда с неотрицательными членами). *Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, все члены которого неотрицательны, сходится тогда и только тогда, когда существует постоянная C такая, что для любого N частичная сумма $S_N = a_1+...+a_N$ удовлетворяет неравенству $S_N \leq C$.*

Замечание. На всякий случай сформулируем критерий сходимости ряда, все члены которого неположительны: *Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, все члены которого* *неположительны, сходится тогда и только тогда, когда существует постоянная D такая, что для любого N частичная сумма $S_N = a_1 + ... + a_N$ удовлетворяет неравенству $S_N \geq D$.*

Разумеется, достаточно доказать первый критерий. Действительно, если все члены ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ неположительны, то рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-a_n) = -\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, который сходится (или расходится) одновременно с рядом $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Все члены этого ряда $\sum_{n=1}^{\infty}(-a_n)$ -- неотрицательные числа. Поэтому(согласно сформулированному первому критерию) он сходится тогда и только тогда, когда существует постоянная C такая, что для любого N частичная сумма $S_N^* = (-a_1) + ... + (-a_N) = -S_N$ удовлетворяет неравенству $-S_N \leq C$. Но это равносильно тому, что $S_N \geq -C$. В качестве D из формулировки можно взять число $-C$.

Доказательство теоремы. Из неравенства $a_{N+1} \geq 0$ следует, что $S_{N+1} = S_N + a_{N+1} \geq S_N$, т.е. последовательность частичных сумм ряда является неубывающей. Вспомним теорему Вейерштрасса: *если последовательность S_N является неубывающей, то она имеет предел тогда и только тогда, когда она ограничена сверху, т.е. существует постоянная C такая, что для любого N частичная сумма S_N удовлетворяет неравенству $S_N \leq C$.*

Применим эту теорему к последовательности частичных сумм ряда $S_N = a_1 + ... + a_N$. Критерий доказан.

Из этого критерия следуют очень полезные теоремы сравнения.

Теорема(Первая теорема сравнения). *Пусть для всех n выполняются неравенства $0 \leq a_n \leq b_n$ и пусть ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится. Тогда сходится и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.*

Доказательство. Обозначим $S_N = a_1 + ... + a_N$, $S_N^* = b_1 + ... + b_N$. Очевидно, что $S_N \leq S_N^*$. Применим к ряду $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ доказанный выше критерий. Он утверждает, что существует постоянная C такая, что для любого N частичная сумма S_N^* удовлетворяет неравенству $S_N^* \leq C$. Но тогда из неравенств $S_N \leq S_N^*$, $S_N^* \leq C$ следует, что для любого N частичная сумма S_N удовлетворяет неравенству $S_N \leq C$. Согласно критерию, это означает, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится.

Замечание. Ещё раз отметим, что заключение теоремы останется справедливым, если неравенства $0 \leq a_n \leq b_n$ выполняются при $n \geq n_0$.

Теорема (Вторая теорема сравнения). *Пусть $a_n \geq 0, b_n > 0$ для всех n и $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = k > 0$. Тогда либо оба ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходятся, либо они оба* *расходятся.(Т.е. не может быть так, что один из них сходится, а другой расходится).*

Доказательство. Утверждение о том, что $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=k$ равносильно тому, что $\forall\varepsilon>0\ \exists n_0\ \forall n>n_0\ \left|\frac{a_n}{b_n}-k\right|<\varepsilon$. Возьмём $\varepsilon=\frac{k}{2}>0$. Тогда

$$\exists n_0\ \forall n>n_0\quad -\frac{k}{2}<\frac{a_n}{b_n}-k<\frac{k}{2}.$$

Последние неравенства равносильны таким:

$$\frac{k}{2}<\frac{a_n}{b_n}<\frac{3k}{2}.$$

Поскольку $b_n>0$, из этих неравенств следует, что при $n>n_0$ выполняются неравенства:

$$\frac{kb_n}{2}<a_n<\frac{3kb_n}{2}.$$

Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ сходится, то сходится и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3k}{2}b_n$. Согласно замечанию к первой теореме сравнения, из этого следует, что сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$.

Обратно, если сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$, то по вышеупомянутому замечанию, сходится и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{k}{2}b_n$. Тогда, по теореме из §1 о свойствах сходящихся рядов, при $c=\frac{2}{k}$ получаем, что сходится и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}c\frac{k}{2}b_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$.

Итак, мы доказали, что из сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ следует сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ и наоборот, из сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ следует сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$. Но это, вместе с тем, означает, что из расходимости одного из этих рядов следует расходимость другого. Теорема полностью доказана.

Теорема (Признак сходимости Коши). *Пусть* $0<q<1$. *Если при* $n\ge n_0$ *выполняются неравенства* $0\le a_n, \sqrt[n]{a_n}\le q$, *то ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ *сходится. Если же при* $n\ge n_0$ *выполняются неравенства* $0\le a_n, \sqrt[n]{a_n}\ge 1$, *то этот ряд расходится.*

Доказательство. Если при $n\ge n_0$ выполняются неравенства $0\le a_n, \sqrt[n]{a_n}\le q$, то верны и неравенства $0\le a_n\le q^n$. Так как $0<q<1$,

Примечание. На лекциях признаки Даламбера и Коши были сформулированы и доказаны сразу в предельных формах.

прогрессия $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$ сходится. По первой теореме сравнения ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ также сходится.

Если же при $n \ge n_0$ имеем $0 \le a_n, \sqrt[n]{a_n} \ge 1$, то и $a_n \ge 1$. Тогда равенство $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ невозможно по теореме о предельном переходе в неравенствах.

Поэтому не выполнен необходимый признак сравнения и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится.

Теорема доказана.

Замечание. Часто признак Коши формулируют в *предельной форме* :

Пусть при $n \ge n_0$ *выполняется неравенство* $a_n \ge 0$ *и существует* $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q$. *Тогда если* $q < 1$, *то ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится, если* $q > 1$, *то расходится. При* $q = 1$ *признак неприменим.*

Доказательство. Пусть $q < 1$. Выберем число ε так, чтобы выполнялись неравенства $0 < \varepsilon < 1 - q$. Тогда $q + \varepsilon < 1$. При $n > n_0$ имеет место неравенство: $\left|\sqrt[n]{a_n} - q\right| < \varepsilon$, откуда $\sqrt[n]{a_n} < q + \varepsilon < 1$. По предыдущей теореме ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится.

Если же $q > 1$, то выберем ε удовлетворяющим условиям: $0 < \varepsilon < q - 1$. Тогда $q - \varepsilon > 1$. При $n > n_0$ имеет место неравенство: $\left|\sqrt[n]{a_n} - q\right| < \varepsilon$, откуда $\sqrt[n]{a_n} > q - \varepsilon > 1$. По предыдущей теореме ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится.

Теорема доказана.

Теорема. (Признак сходимости Даламбера). *Пусть при* $n > n_0$ *выполняются неравенства* $0 < a_{n+1} < q a_n$, где $0 < q < 1$. *Тогда ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится. Если при* $n > n_0$ *выполняются неравенства* $a_{n+1} \ge a_n > 0$, *то этот ряд расходится.*

Доказательство. В первом случае при $n > n_0$ выполняются неравенства:

$$0 < a_{n_0+1} < q a_{n_0}, 0 < a_{n_0+2} < q a_{n_0+1}, \ldots, 0 < a_{n-1} < q a_{n-2}, 0 < a_n < q a_{n-1}.$$

Последовательно(двигаясь справа налево) используем эти неравенства:

$0 < a_n < q a_{n-1} < q^2 a_{n-2} < \ldots < q^{n-n_0-1} a_{n_0+1} < q^{n-n_0} a_{n_0}$.

Из полученного следует, что при $n > n_0$

$$a_n < \frac{a_{n_0}}{q^{n_0}} q^n.$$

Сравнение со сходящейся прогрессией $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$ доказывает первую часть теоремы.

Если же при $n > n_0$ имеет место неравенство $a_{n+1} \ge a_n$, то для любого $n > n_0 + 1$ выполняется неравенство $a_n \ge a_{n_0+1}$ и не выполняется необходимый признак сходимости ряда.

Теорема доказана.

Замечание. В *предельной форме* этот признак выглядит так:

Если при $n > n_0$ выполняется неравенство $a_n > 0$ и существует $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$, то при $q < 1$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, при $q > 1$ - расходится, при $q = 1$ признак неприменим.

Доказательство. При $q < 1$ выберем число ε так, чтобы выполнялись неравенства $0 < \varepsilon < 1 - q$. Тогда $q + \varepsilon < 1$. При $n > n_0$

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} - q \right| < \varepsilon,$$

или $\frac{a_{n+1}}{a_n} < q + \varepsilon$, откуда $a_{n+1} < (q + \varepsilon) a_n$. По предыдущей теореме ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится.

Если же $q > 1$, то выберем ε удовлетворяющим условиям: $0 < \varepsilon < q - 1$. Тогда $q - \varepsilon > 1$. При $n > n_0$ имеет место неравенство:

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} - q \right| < \varepsilon,$$

или $\frac{a_{n+1}}{a_n} > q - \varepsilon$, откуда $a_{n+1} > (q - \varepsilon) a_n > a_n$. По предыдущей теореме ряд расходится.

Замечание. Признаки Даламбера и Коши просты в применении и удобны, но слабоваты. Например, для расходящегося гармонического ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ обе величины $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}}$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{n+1}$ равны 1 и признак неприменим. Аналогично, для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ обе величины

$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n(n+1)}}$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n(n+1)}{(n+1)(n+2+}$ также равны 1. Но этот ряд сходится. Чтобы в этом убедиться, рассмотрим частичную сумму

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(n+1)}$$

и используем тождество

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.$$

Тогда

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{N+1}$$

и $\lim\limits_{N\to\infty} S_N = 1$.

Значительно более сильным признаком сходимости является признак Гаусса. Сформулируем эту теорему.

Теорема. *Пусть при $n > n_0$ выполняется неравенство $a_n > 0$ и*

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \lambda + \frac{\mu}{n} + O\left(\frac{1}{n^{1+\varepsilon}}\right), n \to \infty.$$

Тогда если $\lambda > 1$, *то ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится, если* $\lambda < 1$, *то расходится, а при* $\lambda = 1$ *ряд сходится при* $\mu > 1$ *и расходится при* $\mu \le 1$.

Теорему приводим без доказательства.

Покажем, какой результат даст эта теорема при применении к рассмотренным выше рядам. Для $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ имеем:

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n} \text{ и } \lambda = 1, \mu = 1 \text{ -- ряд расходится.}$$

Для $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ находим

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{(n+1)(n+2)}{n(n+1)} = 1 + \frac{2}{n} \text{ и } \lambda = 1, \mu = 2 \text{ -- ряд сходится.}$$

3. Интегральный признак сходимости. Сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$

Теория рядов во многом подобна теории несобственных интегралов. Аналогия такова: частичной сумме S_N ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сопоставляем интеграл $F(B) = \int_a^B f(x)dx$. Тогда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \lim\limits_{N\to\infty} S_N$, $\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim\limits_{B\to+\infty} F(B)$. Таким образом, и бесконечный ряд и несобственный интеграл определяются с помощью предельного перехода. Родственность этих понятий особенно отчётливо видна в следующей теореме.

Теорема (Интегральный признак Маклорена -Коши сходимости ряда). *Пусть* $f(x)$ *-- неотрицательная, невозрастающая функция, определённая при* $x \ge 1$. *Тогда ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ *и несобственный интеграл* $\int\limits_1^{\infty} f(x)\,dx$ *либо оба сходятся, либо оба расходятся.*

Доказательство. Так как функция $f(x)$ невозрастающая, то она является интегрируемой на отрезке $[1; B]$ для любого B (вспомним, что монотонная на отрезке функция интегрируема на этом отрезке).
Кроме того, на любом отрезке $[n; n+1]$ выполняются неравенства:

$$f(n+1) \le f(x) \le f(n).$$

Как отмечалось выше, эти неравенства можно почленно проинтегрировать на $[n; n+1]$:

$$\int\limits_n^{n+1} f(n+1)dx \le \int\limits_n^{n+1} f(x)dx \le \int\limits_n^{n+1} f(n)dx \quad .$$

Далее, $\int\limits_n^{n+1} f(n+1)dx = f(n+1)$, $\int\limits_n^{n+1} f(n)dx = f(n)$, поскольку $f(n), f(n+1)$ не зависят от x, а длина отрезка интегрирования равна 1. Поэтому справедливы неравенства:

$$f(n+1) \le \int\limits_n^{n+1} f(x)dx \le f(n).$$

Просуммируем их по n начиная от $n = 1$ до $n = N-1$. Получим неравенства

$$f(2)+\ldots+f(N) \le \int\limits_1^2 f(x)dx + \ldots + \int\limits_{N-1}^N f(x)dx \le f(1)+\ldots+f(N-1).$$

По свойству аддитивности, сумма интегралов, входящая в эти неравенства, равна $\int\limits_1^N f(x)dx$. Используя для обозначения частичной суммы ряда символ S_N, получаем неравенства:

$$S_N - f(1) \le \int\limits_1^N f(x)dx \le S_{N-1},$$

верные для любого натурального N.

Из этих неравенств сразу следует, что $S_N \le f(1) + \int\limits_1^N f(x)dx$. Согласно критерию сходимости ряда с неотрицательными членами из этого следует, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ сходится.

Для доказательства второй части теоремы вспомним критерий сходимости интеграла от неотрицательной функции:

Если $f(x) \ge 0$, *то* $\int\limits_1^{+\infty} f(x)dx$ *сходится тогда и только тогда, когда существует постоянная* C *такая, что для любого* B *имеет место неравенство:* $\int\limits_1^B f(x)dx \le C$.

Теперь для произвольного числа B выберем число N так, чтобы выполнялись неравенства: $N \le B < N+1$ (т.е. N -- это так называемая *целая часть* числа B). Так как $f(x) \ge 0$, имеют место неравенства:

$$\int\limits_1^N f(x)dx \le \int\limits_1^B f(x)dx \le \int\limits_1^{N+1} f(x)dx.$$

Используем теперь неравенство $\int\limits_1^N f(x)dx \le S_{N-1}$ с заменой N на $N+1$, т.е.:

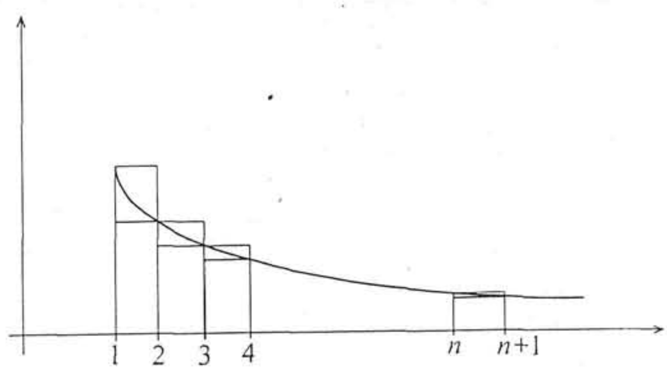
$$\int\limits_1^{N+1} f(x)dx \le S_N.$$

Напомним, что мы доказываем, что из сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ следует сходимость $\int_1^{+\infty} f(x)dx$. Но по критерию сходимости ряда с неотрицательными членами, существует постоянная C такая, что для любого N имеет место неравенство $S_N \le C$. Тогда , согласно доказанному выше, для произвольного числа B справедливы неравенства:

$$\int_1^{B} f(x)dx \le \int_1^{N+1} f(x)dx \le S_N \le C.$$

Применение сформулированного выше критерия сходимости несобственного интеграла от неотрицательной функции завершает доказательство теоремы.

Доказанная теорема имеет простую геометрическую интерпретацию.



На этом рисунке график функции $f(x)$ заключён между двумя графиками ступенчатых функций. Площадь каждой ступеньки "верхней" функции на отрезке $[n; n+1]$ равна $f(n)$, а "нижней" функции -- $f(n+1)$. Поэтому неравенства $S_N - f(1) \le \int_1^N f(x)dx \le S_{N-1}$ имеют простой геометрический смысл неравенств между соответствующими площадями.

Замечание. Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ расходится, неравенства $S_N - f(1) \le \int_1^N f(x)dx \le S_{N-1}$ могут дать представление о скорости стремления к ∞ его частичных сумм. Например, для гармонического ряда имеем:

$$\frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{N} \le \int_1^N \frac{dx}{x} \le 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{N-1},$$

или $S_N - 1 \le \ln N \le S_N - \frac{1}{N}$, откуда $\ln N + \frac{1}{N} \le S_N \le \ln N + 1$.

Теорема. *Ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ *сходится при* $p > 1$ *и расходится при остальных* p.

Доказательство. Рассмотрим $f(x)=\frac{1}{x^p}$. Эта функция удовлетворяет всем условиям доказанной выше теоремы. Напомним также, что $\int_1^\infty \frac{dx}{x^p}$ сходится при $p>1$ и расходится при остальных p. Теорема доказана.

4. Абсолютная сходимость. Свойства абсолютно сходящихся рядов

Перейдём к рассмотрению общего случая, когда члены ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ имеют произвольные знаки. Для удобства введём в рассмотрение связанные с исследуемым рядом новые ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$ и $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$, где $a_n^+=\max\{a_n,0\}$, $a_n^-=\min\{a_n,0\}$. Отметим очевидные равенства :

$$a_n=a_n^+ + a_n^-,\ |a_n|=a_n^+ - a_n^-,$$

$$a_n^+=\frac{a_n+|a_n|}{2},\ a_n^-=\frac{a_n-|a_n|}{2}.$$

Определение. Сходящийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ называется *абсолютно сходящимся*, если сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$.

Замечание. Требование сходимости в этом определении на самом делё излишнее. Сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ следует из сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$. Чтобы убедиться в этом, выпишем критерий Коши сходимости ряда сначала для ряда $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$:

$\forall\varepsilon>0\,\exists N\,\forall n>N\ \forall p\in\mathbf{N}\ \ |a_{n+1}|+\ldots+|a_{n+p}|<\varepsilon$,

а затем для ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$:

$\forall\varepsilon>0\,\exists N\,\forall n>N\ \forall p\in\mathbf{N}\ \ |a_{n+1}+\ldots+a_{n+p}|<\varepsilon$.

Так как $|a_{n+1}+\ldots+a_{n+p}|<|a_{n+1}|+\ldots+|a_{n+p}|$, из условия $|a_{n+1}|+\ldots+|a_{n+p}|<\varepsilon$ следует условие $|a_{n+1}+\ldots+a_{n+p}|<\varepsilon$.

Если ряд абсолютно сходится, то, по определению, сходятся ряды $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ и $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Ввиду равенств $a_n^+=\frac{a_n+|a_n|}{2}$, $a_n^-=\frac{a_n-|a_n|}{2}$ из этого следует, что сходятся и ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$ и $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$. Обратно, если эти два ряда сходятся, то из равенства $|a_n| = a_n^+ - a_n^-$ следует абсолютная сходимость исходного ряда. Таким образом, абсолютная сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ равносильна сходимости рядов $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$ и $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$. Но члены этих рядов имеют постоянные знаки и к ним применимы изученные в предыдущих параграфах признаки.

Важнейшим свойством абсолютно сходящихся рядов является их *безусловная сходимость*. Дадим определение этого понятия. Члены исходного ряда можно переставлять, т.е. менять их номера (при этом, разумеется, члены ряда не добавляются и не отбрасываются). В результате такой перестановки получается некоторый новый ряд. Какими будут свойства этого ряда? Казалось бы, напрашивается ответ, по аналогии с переместительным законом сложения: сумма ряда не изменится. Однако этот закон был доказан для **конечных** сумм, а не для **бесконечных** рядов. Более того, для рядов он верен не всегда!(См. теорему Римана в параграфе 5). Свойство ряда не менять свою сумму при любой перестановке его членов и называется его *безусловной сходимостью* . Итак,

Теорема (теорема Дирихле о безусловной сходимости). *Если ряд сходится абсолютно, то он сходится безусловно.*

Доказательство. (Примечание. Это - весьма изящное доказательство, дающее некоторое представление о красоте математических рассуждений!). Сначала рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, все члены которого неотрицательны.

Произведём некоторую перестановку членов ряда и получим ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. Для всякого члена b_n этого ряда существует номер k_n такой, что $b_n = a_{k_n}$. Поэтому частичная сумма $S_N^* = b_1 + \ldots + b_N$ может быть представлена в виде $a_{k_1} + \ldots + a_{k_N}$. Среди чисел $k_1, \ldots, k_N$ имеется наибольшее. Обозначим его M. Поскольку члены ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ неотрицательны, имеет место неравенство:

$$S_N^* = b_1 + \ldots + b_N = a_{k_1} + \ldots + a_{k_N} \le a_1 + \ldots + a_M .$$

Итак, мы доказали, что для всякого N найдётся номер M такой, что $S_N^* \le S_M$. Для суммы S исходного ряда и для любого M имеет место неравенство $S_M \le S$ (Так как члены ряда неотрицательны, его частичные суммы <u>возрастая</u> стремятся к сумме ряда) . Два последних неравенства означают, что для любого N справедливо неравенство $S_N^* \le S$. Переходя в этом неравенстве к пределу при $N \to \infty$, получаем, что сумма S^* ряда, полученного в результате перестановки членов исходного ряда, удовлетворяет неравенству $S^* \le S$. Т.е. при перестановке членов ряда его сумма не возрастает.

Но нам ничто не мешает рассматривать ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, как **исходный ряд** , а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ -- как ряд, полученный из ряда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ перестановкой его членов. По доказанному выше, ряд, полученный из исходного ряда в результате перестановки его членов, сходится и его сумма не возрастает. Это означает, что выполняется и противоположное неравенство $S^* \geq S$. Оба эти неравенства дают вместе равенство $S^* = S$, означающее, что при перестановке членов ряда с неотрицательными членами его сумма не меняется.

Перейдём к общему случаю теоремы и рассмотрим абсолютно сходящийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и соответствующие ему ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$ и $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$. Перестановка членов ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ приводит к соответствующим перестановкам членов рядов $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$ и $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$. Но члены этих рядов имеют постоянные знаки! Значит, по доказанному выше, их суммы не меняются при перестановке членов. Так как $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$, сумма исследуемого ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ также не меняется. Теорема полностью доказана.

5. Условная сходимость. Теорема Лейбница

В предыдущем параграфе мы увидели, что абсолютная сходимость означает и безусловную сходимость ряда. Однако если ряд сходится неабсолютно, перестановка членов ряда влияет на его сумму.

Теорема. (Риман) *Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится неабсолютно, то для любого заданного числа A (так же и для $\pm\infty$) существует такая перестановка членов этого ряда, в результате которой получится ряд, сумма которого будет равна числу A (так же и для $\pm\infty$).*

Схема доказательства. Приведём схему доказательства для случая $A>0$. Этот случай вполне аналогичен остальным. Так как ряд неабсолютно сходится, ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$ и $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$ расходятся. Рассмотрим последовательности $a_1^+, a_2^+, \dots, a_n^+, \dots$ и $a_1^-, a_2^-, \dots, a_n^-, \dots$. Так как ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$ расходится, его частичные суммы стремятся к $+\infty$. Поэтому, начиная с некоторого номера N_1, они становятся больше, чем число A. Так вот, сначала мы возьмём N_1 членов последовательности $a_1^+, a_2^+, \dots, a_n^+, \dots$, не меняя их порядка и не пропуская ни одного из них. Так как ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$ тоже расходится, а его члены неположительны, последовательность его частичных сумм стремится к $-\infty$. Поэтому существует наименьший номер N_2 такой, что прибавление к полученной на первом шаге частичной сумме N_2 последовательных членов из последовательности $a_1^-, a_2^-, \dots, a_n^-, \dots$, начиная с первого, даст сумму меньшую, чем A. Затем добавим минимальное возможное количество последовательных членов последовательности $a_1^+, a_2^+, \dots, a_n^+, \dots$, не меняя их порядка и не пропуская ни одного из них , начиная с номера N_1+1, так, чтобы общая сумма стала снова больше A. Потом снова будем добавлять члены последовательности $a_1^-, a_2^-, \dots, a_n^-, \dots$, начиная с номера N_2+1 и т.д. Частичные суммы полученного таким образом ряда колеблются около числа A. По построению, они отличаются от этого числа не больше, чем на модуль некоторого члена a_{N_k} ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.Но этот ряд сходится, поэтому, по необходимому признаку сходимости, $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, значит, и $\lim_{k\to\infty} a_{N_k} = 0$. Поэтому частичные суммы ряда, полученного в результате описанного процесса , стремятся к числу A.

Остальные случаи можно рассмотреть аналогично.

Опишем ряд признаков, предназначенных для исследования сходимости неабсолютно сходящихся рядов. Их также называют *условно сходящимися рядами* (поскольку, по предыдущей теореме, их сумма зависит от порядка членов ряда, в отличие от безусловно сходящихся рядов) .

Теорема Лейбница. *Пусть для ряда* $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} c_n$ *выполнены условия:*

1. Для любого номера n выполняется неравенство $0 \le c_{n+1} \le c_n$.

2. $\lim_{n\to\infty} c_n = 0$.

Тогда этот ряд сходится и его сумма S удовлетворяет неравенству $S \le c_1$.

Доказательство. Рассмотрим частичную сумму S_{2N}. Она имеет вид: $S_{2N} = c_1 - c_2 + c_3 - c_4 + \dots + c_{2N-1} - c_{2N}$. Заметим, что $S_{2N+2} = c_1 - c_2 + c_3 - c_4 + \dots + c_{2N+1} - c_{2N+2} = S_{2N} + c_{2N+1} - c_{2N+2} > S_{2N}$. Но $S_{2N} = c_1 - (c_2 - c_3) - \dots - (c_{2N-2} - c_{2N-1}) - c_{2N}$. По условию теоремы, все слагаемые в скобках, и число c_{2N}, неотрицательны. Поэтому $S_{2N} \le c_1$. Итак, частичные суммы ряда S_{2N} с чётными номерами образуют возрастающую и ограниченную сверху последовательность. По теореме Вейерштрасса(её формулировка напомнена в параграфе 2), существует $\lim_{N\to\infty} S_{2N}$. Обозначим его $\lim_{N\to\infty} S_{2N}$. По теореме о предельном переходе в неравенствах получаем: $S \le c_1$. Для подпоследовательности частичных сумм с нечётными номерами имеем: $S_{2N+1} = S_{2N} + c_{2N+1}$. Так как, по доказанному, $\lim_{N\to\infty} S_{2N} = S$, $\lim_{n\to\infty} c_n = 0$, по теореме о пределе суммы последовательностей получаем: $\lim_{N\to\infty} S_{2N+1} = S$. Кроме того, вновь по теореме о предельном переходе в неравенстве, $S \le c_1$. Теорема доказана.

Следствие. *Пусть выполнены условия теоремы. Тогда для любого n справедливо неравенство* $|R_n| \le c_{n+1}$.

Доказательство. Рассматриваемый остаток ряда имеет вид $R_n = (-1)^{n+1} c_{n+1} + \dots$ и также представляет собой знакочередующийся ряд. Если число n нечётное, то $R_n = c_{n+1} - c_{n+2} + c_{n+3} - \dots$ и, по предыдущей теореме, имеют место неравенства $0 \le R_n \le c_{n+1}$. Если же число n чётное, то

$-R_n = c_{n+1} - c_{n+2} + c_{n+3} - \ldots$ и, по предыдущей теореме, имеют место неравенства $0 \le -R_n \le c_{n+1}$. Таким образом, неравенство $|R_n| \le c_{n+1}$ доказано при всех n.

Пример. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ является сходящимся, так как $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$ при всех n, и $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

Сформулируем без доказательства ещё две полезные теоремы.

Теорема. (Признак Абеля). *Если ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *сходится, а числа* a_n *образуют монотонную и ограниченную последовательность, то ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ *также сходится.*

Теорема. (Признак Дирихле). *Если частичные суммы ряда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *ограничены, а числа* a_n *образуют монотонную и стремящуюся к нулю последовательность, то ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ *также сходится.*

Функциональные последовательности и ряды

1. Поточечная и равномерная сходимость

Пусть задана последовательность функций $f_n(x)$, определенных на множестве $X \subset R$.

Определение. $f_n(x)$ *поточечно сходится* к $f(x)$ на X, если $\forall x \in X$ $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$, т.е. $\forall x \in X$ $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N$ $\forall n > N$ $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

Пример. Пусть $f_n(x) = x^n$, $X = [0;1]$. Тогда при $0 \le x < 1$ имеем: $\lim_{n\to\infty} x^n = 0$. При $x = 1$ $x^n \equiv 1$ и $\lim_{n\to\infty} x^n = 1$. Таким образом, последовательность $f_n(x)$ поточечно сходится к функции $f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \le x < 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}$.

Если рассматривать функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$, составленный из определенных на множестве X функций, то под его *поточечной сходимостью* понимается поточечная сходимость последовательности его частичных сумм.

Выше мы видим, что поточечный предел последовательности непрерывных функций может оказаться разрывной функцией.

Чтобы избежать подобных неприятностей, рассмотрим более сильное понятие равномерной сходимости.

Определение. Последовательность $f_n(x)$ *равномерно сходится* к $f(x)$ при $n \to \infty$ на множестве X, если $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N(\varepsilon)$ $\forall n > N$ $\forall x \in X$ $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$. Это обозначается так: $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ на X при $n \to \infty$.

Равномерная сходимость функционального ряда – это равномерная сходимость последовательности его частичных сумм $S_N(x)$ к сумме ряда $S(x)$ на X. Это равносильно тому, что $S(x) - S_N(x) \rightrightarrows 0$ на X при $N \to \infty$, т.е. тому, что $R_N(x) \rightrightarrows 0$ на X.

Теорема. (Критерий Коши равномерной сходимости последовательности $f_n(x)$). $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ на множестве $X \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$ $\exists N(\varepsilon) > 0$ $\forall n > N$ $\forall p \in \mathbf{N}$ $\forall x \in X$ $|f_{n+p}(x) - f_n(x)| < \varepsilon$.

Без доказательства.

Из этой теоремы сразу следует критерий Коши равномерной сходимости функционального ряда: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x)$ равномерно сходится на $X \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$ $\exists N > 0$ $\forall n > N$ $\forall p \in \mathbf{N}$ $\forall x \in X$ $|a_{n+1}(x) + \ldots + a_{n+p}(x)| < \varepsilon$.

Следствие. (Необходимый признак равномерной сходимости ряда). Положим в критерии Коши $p=1$. Тогда получаем: $\forall\varepsilon>0\ \exists N\ \forall n>N\ \forall x\in X\ |a_{n+1}(x)|<\varepsilon$, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n(x)=0$.

Необходимый признак равномерной сходимости ряда вновь показывает, что прогрессия $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$ не сходится равномерно на $(-1;1)$.

Докажем, что $x^n \not\rightrightarrows 0$ на $(-1;1)$ Для этого достаточно доказать, что для, например, $\varepsilon=\frac{1}{2}$ и для любого N существует $n>N$ и существует x, $|x|<1$ такое, что $x^n>\frac{1}{2}$. Очевидно, что для любого N и любого $n>N$ достаточно взять число x из интервала $\sqrt[n]{\frac{1}{2}}<x<1$.

Сформулируем и докажем достаточный признак сходимости (мажорантный признак Вейерштрасса).

Теорема. Пусть $\forall x\in X$ выполняется неравенство $|a_n(x)|\le b_n$, $n=1,2,\dots$. Пусть, кроме того, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится. Тогда ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится на множестве X абсолютно и равномерно.

Доказательство. Достаточно проверить справедливость критерия Коши, т.е. доказать, что $\forall\varepsilon>0\ \exists N>0\ \forall n>N\ \forall p\in\mathbf{N}\ \forall x\in X\ \ |a_{n+1}(x)+\ldots+a_{n+p}(x)|<\varepsilon$. Но последнее неравенство следует из того, что

$|a_{n+1}(x)+\ldots+a_{n+p}(x)|\le|a_{n+1}(x)|+\ldots+|a_{n+p}(x)|\le b_{n+1}+\ldots+b_{n+p}$, а для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ выполняется критерий Коши, т.е. $\forall\varepsilon>0\ \ \exists N>0\ \forall n>N\ \ \forall p\in\mathbf{N}\ \ b_{n+1}+\ldots+b_{n+p}<\varepsilon$.

Примеры использования теоремы.

Пример 1. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2}$ равномерно (и абсолютно) сходится на $[-1;1]$.

Действительно, при $|x|\le 1$ выполнена оценка $\left|\frac{x^n}{n^2}\right|\le\frac{1}{n^2}$, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ сходится.

Пример 2. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{\cos nx}{2^n}$ равномерно и абсолютно сходится на всей числовой прямой, т.к. для всех x $\left|\frac{\cos nx}{2^n}\right|\le\frac{1}{2^n}$, а $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ - сходится.

2. Функциональные свойства равномерно сходящихся последовательностей и рядов

Теорема. Пусть $f_n(x)\rightrightarrows f(x)$ на X. Пусть $\forall n\ \ f_n\in C(X)$. Тогда $f\in C(X)$.

Доказательство. Требуется доказать, что $\forall x_0 \in X$ функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0, т.е. $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x : |x - x_0| < \delta\ \ |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Ввиду равномерной сходимости

$\exists N : \forall n > N\ \ \forall x \in X\ \ |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$. В частности, $|f_n(x_0) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$. По условию, при любом n функция $f_n(x)$ - непрерывная. Значит,

$\exists \delta > 0\ \forall x : |x - x_0| < \delta\ \ |f_n(x) - f_n(x_0)| < \varepsilon$. При выбранных n и δ имеем:

$|f(x) - f(x_0)| = |f(x) - f_n(x) + f_n(x) - f_n(x_0) + f_n(x_0) - f(x_0)| \le |f(x) - f_n(x)| +$

$+ |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$, что и требовалось доказать.

<u>**Следствие.**</u> Сумма равномерно сходящегося ряда, члены которого являются непрерывными функциями, есть непрерывная функция.

Доказательство. Применим предыдущую теорему к последовательности частичных сумм ряда.

<u>**Теорема.**</u> (почленное интегрирование ряда). Пусть ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ равномерно сходится к своей сумме $S(x)$ на отрезке $[a;b]$ и все $a_n(x) \in C[a;b]$. Тогда $\forall x \in [a;b]$

$\int\limits_a^x \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(t)dt = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \int\limits_a^x a_n(t)dt$.

Доказательство. Обозначим при произвольном N $S_N(x) = \sum\limits_{n=1}^{N} a_n(x)$,

$r_N(x) = S(x) - S_N(x)$. Тогда $S_N(x)$ - непрерывная функция и, т.к. по предыдущей теореме $S(x)$ - непрерывная функция, $r_N(x)$ - также непрерывная функция. Тогда

$\int\limits_a^x \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(t)dt = \int\limits_a^x S(t)dt = \int\limits_a^x (S_N(t) + r_N(t))dt = \int\limits_a^x S_N(t)dt + \int\limits_a^x r_N(t)dt = \int\limits_a^x \sum\limits_{n=1}^{N} a_n(t)dt +$

$+ \int\limits_a^x r_N(t)dt = \sum\limits_{n=1}^{N} \int\limits_a^x a_n(t)dt + \int\limits_a^x r_N(t)dt$. Для доказательства теоремы достаточно

доказать, что $\int\limits_a^x r_N(t)dt \to 0$ при $N \to \infty$, т.к., по определению, $\lim\limits_{N \to \infty} \sum\limits_{n=1}^{N} \int\limits_a^x a_n(t)d =$

$= \sum\limits_{n=1}^{\infty} \int\limits_a^x a_n(t)dt$. Но $\forall \varepsilon > 0\ \ \exists N_0\ \ \forall N > N_0\ \ \forall t \in [a;b]\ \ |r_N(t)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$. Поэтому при

$N > N_0\ \left|\int\limits_a^x r_N(t)dt\right| < \int\limits_a^x |r_N(t)|dt < \frac{\varepsilon}{b-a} \cdot (x-a) \le \varepsilon$ и требуемое утверждение доказано.

Замечание. Для функциональных последовательностей эта теорема формулируется следующим образом: Пусть $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ на $[a;b]$. Пусть $f_n(x) \in C[a;b]$. Тогда $\forall x \in [a;b]$ $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_a^x f_n(t)dt = \int\limits_a^x f(t)dt$.

Теорема. (о почленном дифференцировании ряда).

Пусть:

1. $\forall n \;\; a_n(x) \in C([a;b]), a_n'(x) \in C([a;b])$;
2. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ сходится на $[a;b]$ (и пусть его сумма обозначена $S(x)$);
3. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n'(x)$ равномерно сходится на $[a;b]$.

Тогда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n'(x) = S'(x)$ или, иными словами, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n'(x) = \left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)\right)'$.

Доказательство. Обозначим $\phi(x)$ - сумму ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n'(x)$. Тогда $\phi(x)$ - непрерывная на $[a;b]$ функция. Поэтому $\forall x \in [a;b]$ существует ее интеграл от a до x и он, по предыдущей теореме, равен $\int\limits_a^x \phi(t)dt = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \int\limits_a^x a_n'(t)dt = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n(x) - a_n(a))$

$= \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x) - \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(a) = S(x) - S(a)$. Значит, $S'(x) = \phi(x)$ или $\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)\right)' = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n'(x)$.

Замечание. Соответствующая теорема для последовательностей может быть сформулирована так: Пусть $f(x), f_n(x) \in C([a;b])$. Пусть $f_n(x) \to f(x), x \in [a;b]$, $n \to \infty$ и пусть $f_n'(x) \rightrightarrows \phi(x)$, $x \in [a;b], n \to \infty$. Тогда $\phi(x) = f'(x)$, или $\lim\limits_{n\to\infty} f_n'(x) = \left(\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)\right)'$.

3. Степенные ряды

Важный частный случай функциональных рядов представляют собой *степенные ряды*, т.е. ряды вида $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ или, в более общем случае, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$. Поскольку при замене $z - z_0 = x$ ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ переходит в ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, достаточно рассмотреть эти последние ряды.

<u>Теорема 1.</u> Если степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ сходится в точке $x = X$, то он сходится абсолютно для любого значения x такого, что $|x| < |X|$.

Доказательство. Поскольку $\sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n$ - сходится, $\lim_{n\to\infty} a_n X^n = 0$. Следовательно, $\exists C \ \forall n \ \left|a_n X^n\right| \le C$. (Действительно, взяв $\varepsilon = 1$, получим, что при $n > N$ $\left|a_n X^n\right| \le 1$. Тогда в качестве C можно взять наибольшее из конечного набора чисел $|a_0|, |a_1 X|, \left|a_2 X^2\right|, ..., \left|a_n X^n\right|, 1$). Тогда $\left|a_n x^n\right| = \left|a_n X^n\right| \left|\frac{x^n}{X^n}\right| \le C\left|\frac{x}{X}\right|^n$. Так как $\left|\frac{x}{X}\right| < 1$, прогрессия $C\sum_{n=0}^{\infty}\left|\frac{x}{X}\right|^n$ сходится. Значит, по первой теореме о сравнении, сходится ряд $\sum_{n=0}^{\infty}\left|a_n X^n\right|$, т.е. исходный ряд абсолютно сходится.

Эта теорема позволяет выяснить структуру множества, на котором сходится степенной ряд.

Во-первых, очевидно, что любой степенной ряд сходится в точке $x = 0$. Кроме того, есть ряды, которые сходятся <u>только</u> в этой точке, например, ряд $\sum_{n=0}^{\infty} n!\, x^n$.

Если же ряд сходится в точках, отличных от $x = 0$, то возможны два случая.

В первом из них множество чисел $|x|$ таких, что ряд сходится в точке x, неограничено сверху. Тогда ряд абсолютно сходится на всей числовой прямой, т.к. $\forall x \in \mathbf{R}$ выберем z так, чтобы, во-первых, $|z| > |x|$ и, во-вторых, ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ сходился. Тогда, по теореме 1, ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ абсолютно сходится.

Во втором случае множество чисел $|x|$ таких, что ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ сходится, ограничено сверху. Обозначим через R точную верхнюю грань этого множества. Число R называется *радиусом сходимости* ряда. Из определения R следует, что:

1. Если $|x| < R$, то ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ абсолютно сходится;
2. Если $|x| > R$, то ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ расходится.

В случае, когда ряд сходится на всей числовой прямой $\mathbf{R}$, полагают $R = \infty$.

В точках $x = \pm R$ общего утверждения о сходимости сделать нельзя (т.е. бывают ряды, сходящиеся в обеих этих точках, бывают – сходящиеся лишь в одной из них, бывают – расходящиеся в обеих точках. Примеры будут приведены ниже).

Найдем формулы, с помощью которых можно вычислить R - радиус сходимости степенного ряда. Рассмотрим ряд $\sum_{n=0}^{\infty}\left|a_n x^n\right|$. Применим к его исследованию признак Даламбера. $\frac{\left|a_{n+1}x^{n+1}\right|}{\left|a_n x^n\right|}=|x|\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$. Если существует $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=k$, и если $|x|k<1$, то ряд сходится. Если же $|x|k>1$, то, начиная с некоторого места, $\frac{\left|a_{n+1}x^{n+1}\right|}{\left|a_n x^n\right|}>1$ и общий член $\left|a_n x^n\right|$ ряда $\sum_{n=0}^{\infty}\left|a_n x^n\right|$ не стремится к 0, но тогда и общий член $a_n x^n$ ряда $\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ не стремится к 0 и ряд расходится.

Иными словами, ряд сходится при $|x|<\frac{1}{k}$ и расходится при $|x|>\frac{1}{k}$. Таким образом, число $R=\frac{1}{k}=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ представляет собой радиус сходимости степенного ряда. (Если $k=0$, то $|x|\cdot 0=0<1$ при всех x и ряд сходится на всей числовой прямой, что обозначается равенством $R=\infty$).

Дадим другую формулу для радиуса сходимости. Применим к рассматриваемому ряду $\sum_{n=0}^{\infty}\left|a_n x^n\right|$ признак Коши. $\sqrt[n]{\left|a_n x^n\right|}=|x|\sqrt[n]{|a_n|}$. Пусть существует $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=k$. Тогда, как и выше, при $|x|\cdot k<1$ ряд сходится, а при $|x|\cdot k>1$ - расходится. Поэтому $R=\frac{1}{k}=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}}$ (при $k=0$, разумеется, $R=\infty$).

Рассмотрим примеры.

<u>Пример 1.</u> $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$; $R=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{n!}=\lim\limits_{n\to\infty}(n+1)=\infty$. Ряд абсолютно сходится на всей числовой прямой.

<u>Пример 2.</u> $\sum_{n=0}^{\infty}x^n$. $R=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{1}=1$. В точках $x=\pm 1$ ряд, очевидно, расходится.

<u>Пример 3.</u> $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$. $R=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1$. В точке $x=-1$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ сходится по теореме Лейбница. В точке $x=1$ гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ расходится.

Пример 4. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n-1}}{2n-1}$. $R=1$. В точках $x=\pm 1$ получается условно сходящийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n-1}$.

Пример 5. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2}$. $R=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{n^2}=1$. В точках $x=\pm 1$ имеем ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$, который абсолютно сходится.

4. Непрерывность степенного ряда

Теорема. Степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ представляет собой функцию, непрерывную на $(-R;R)$, где R - радиус сходимости ряда.

Доказательство.

Лемма. Пусть $r<R$. Тогда $\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ сходится на множестве $|x|\le r$ абсолютно и равномерно.

Доказательство. Так как $r<R$, ряд $\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|r^n$ сходится. Так как $|a_n x^n|\le|a_n|r^n$, можно применить теорему Вейерштрасса, из которой и следует утверждение леммы.

Замечание. Лемма отнюдь не утверждает равномерной сходимости степенного ряда на $(-R;R)$. Да это, вообще говоря, и неверно. Например, прогрессия $\sum_{n=0}^{\infty}x^n$ сходится на $(-1;1)$ неравномерно. Однако этот ряд сходится равномерно на любом $[a;b]$, $[a;b]\subset(-1;1)$.

Пусть теперь $x\in(-R;R)$, т.е. $|x|<R$. Выберем r так, чтобы $|x|<r<R$. Тогда, по доказанной лемме, ряд сходится на $[-r;r]$ абсолютно и равномерно. Поскольку все функции $a_n x^n$ - непрерывные, сумма ряда есть непрерывная на $[-r;r]$ функция. Значит, эта функция непрерывна и в выбранной, произвольной точке x интервала $(-R;R)$.

Следствие. (Единственность степенного ряда). Пусть $f_1(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$, $f_2(x)=\sum_{n=0}^{\infty}b_n x^n$ и в некоторой окрестности $x=0$ $f_1(x)\equiv f_2(x)$. Тогда $a_n\equiv b_n$.

Доказательство. При $x=0$ получаем: $a_0+0=b_0+0$, $a_0=b_0$. Поэтому $a_1x+a_2x^2+\ldots=b_1x+b_2x^2+\ldots$. При $x\neq 0$ $a_1+a_2x+\ldots=b_1+b_2x+\ldots$. В правой и левой частях стоят степенные ряды, а они, по-доказанному, есть непрерывные функции, поэтому равенство сохраняется при $x=0$, откуда $a_1=b_1$ и т.д. (Отметим, что здесь существенно использована непрерывность ряда в точке $x=0$).

Сформулируем без доказательства еще одну важную теорему.

Теорема. (Абель). Если ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$, имеющий сумму $f(x)$, сходится (хотя бы неабсолютно) при $x=R$, то $\lim\limits_{x\to R-0}f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nR^n=f(R)$ (т.е. сумма ряда непрерывна слева).

5. Интегрирование и дифференцирование степенных рядов

Теорема. Для любого $x\in(-R;R)$ $\int\limits_0^x\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nt^n\right)dt=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{a_nx^{n+1}}{n+1}$.

Доказательство. Пусть r удовлетворяет неравенствам $|x|<r<R$. Тогда степенной ряд сходится равномерно на $[-r;r]$ и его можно почленно проинтегрировать. Кроме того, $\int\limits_0^x a_nt^ndt=a_n\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$. Теорема доказана.

Теорема. Для любого $x\in(-R;R)$ $\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n\right)'=\sum\limits_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}$.

Доказательство. Выберем r_0,r_1 так, чтобы $|x|<r_0<r_1<R$. По определению R, ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}|a_nr_1^n|$ сходится. Поэтому $\exists C>0$ (см. доказательство теоремы 1): $|a_nr_1^n|\le C$.

Рассмотрим величину $|na_nx^{n-1}|=n|a_n|r_0^{n-1}\left(\dfrac{x}{r_0}\right)^{n-1}\le n|a_n|r_0^{n-1}=n|a_n|r_1^{n-1}\left(\dfrac{r_0}{r_1}\right)^{n-1}\le$ $\le\dfrac{nC}{r_1}\cdot\left(\dfrac{r_0}{r_1}\right)^{n-1}$. По признаку Даламбера, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{nC}{r_1}\left(\dfrac{r_0}{r_1}\right)^{n-1}$ сходится, т.к.

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)C\cdot\left(\dfrac{r_0}{r_1}\right)^n\cdot r_1}{r_1\cdot n\cdot C\cdot\left(\dfrac{r_0}{r_1}\right)^{n-1}}=\dfrac{r_0}{r_1}<1$. Значит, мы оценили члены ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|na_nx^{n-1}|$ при

$|x| \le r_0$ членами сходящегося ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nC}{r_1} \left(\frac{r_0}{r_1} \right)^{n-1}$. Применяя теорему Вейерштрасса на $[-r_0; r_0]$, получаем, что этот ряд равномерно сходится. Следовательно, почленное дифференцирование обосновано на отрезке $[-r_0; r_0]$, а значит, и в точке x. Ввиду произвольности точки $x \in (-R; R)$, теорема доказана.

Важное замечание. Из доказанных теорем вытекает, что при интегрировании и дифференцировании радиус сходимости не уменьшается. Но увеличиться он также не может. Если бы, например, он увеличился и стал равен R_1, $R_1 > R$ при интегрировании, мы продифференцировали бы этот полученный при интегрировании ряд и получили бы с одной стороны, ряд, совпадающий с исходным, а с другой стороны, имеющий радиус сходимости не меньший, чем $R_1 > R$ (по доказанному).

Итак, радиус сходимости степенного ряда не меняется при почленном интегрировании и дифференцировании.

Однако поведение в концевых точках $\pm R$ может меняться. Например, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$ сходится на $[-1;1]$. При этом ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n}$, получающийся из исходного дифференцированием, сходится только на $[-1;1)$, а прогрессия $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$, получающаяся при дифференцировании ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ (сходящегося на $[-1;1)$), сходится на $(-1;1)$.

6. Ряды Тейлора

Рассмотрим теперь функцию $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, представляемую степенным рядом в области его сходимости. Очевидно, $a_0 = f(0)$. Далее, последовательно применяем теорему о почленном дифференцировании ряда.

$f'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \ldots + n a_n x^{n-1} + \ldots$, откуда $f'(0) = a_1$.

$f''(x) = 2a_2 + 3 \cdot 2 \cdot a_3 x + \ldots + n(n-1)x^{n-2} + \ldots$, откуда $f''(0) = 2a_2$, $a_2 = \frac{f''(0)}{2}$.

$f'''(x) = 3 \cdot 2 \cdot a_3 + 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot a_4 x + \ldots + n(n-1)(n-2)x^{n-3} + \ldots$, $f'''(0) = 6a_3$ и т.д.

...

$f^{(n)}(x) = n(n-1)(n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 + (n+1) \cdot n \cdot (n-1) \cdot \ldots 2 \cdot x + \ldots$, $f^{(n)}(0) = n!\, a_n$.

Следовательно, при всех n $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$. Таким образом, $f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \ldots$. Это можно сформулировать так: степенной ряд, сходящийся к $f(x)$, представляет собой *ряд Тейлора* для своей суммы $f(x)$.

Если $f(x)$ имеет производные произвольного порядка в точке $x = 0$, то можно образовать соответствующий ей ряд Тейлора:
$f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \ldots$.

Важное замечание. Не всегда этот ряд сходится к самой функции $f(x)$.

Например, нетрудно доказать, что функция $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, x \neq 0 \\ 0, x = 0 \end{cases}$ имеет производные произвольного порядка в точке $x = 0$ и все они равны 0, т.е. $0 = f(0) = f'(0) = \ldots = f^{(n)}(0) = \ldots$. Ряд Тейлора этой функции тождественно равен 0 и не совпадает с $f(x)$.

Необходимое и достаточное условие для того, чтобы ряд Тейлора функции $f(x)$ сходился к самой функции $f(x)$, можно сформулировать так: остаток $r_n(x) = f(x) - f(0) - f'(0)x - \frac{f''(0)}{2}x^2 - \ldots - \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$ должен стремиться к 0 при $n \to \infty$.

7. *Разложение основных элементарных функций*

Разложение $e^x, \sin x, \cos x$.

Лемма. Если для любого отрезка $[-H; H]$ при любом n $\max\limits_{x \in [-H;H]} \left| f^{(n+1)}(x) \right| \leq C(H)$, то $\forall x \in \mathbf{R}$ $r_n(x) \to 0$.

Доказательство. Для произвольного $x \in \mathbf{R}$ выберем H так, чтобы $x \in [-H; H]$. Применим к $f(x)$ формулу Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа: $f(x) = f(0) + f'(0)x + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + r_n(x)$, где $r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\Theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}$, $0 < \Theta < 1$. По условию, $\left| f^{(n+1)}(\Theta x) \right| \leq C(H)$ и $|r_n(x)| \leq \frac{C(H)}{(n+1)!}H^{n+1}$. По признаку Даламбера ряд с членами $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{C(H)H^{n+1}}{(n+1)!}$ сходится ($\lim\limits_{n \to \infty} \frac{C(H)H^{n+2}(n+1)!}{(n+2)!\,C(H)H^{n+1}} = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{H}{n+2} = 0$). Поэтому его общий член $\frac{C(H)}{(n+1)!}H^{n+1}$ стремится к 0, значит и $r_n(x)\to 0$ при $n\to\infty$. Ввиду произвольности $x\in\mathbf{R}$ получаем, что $\forall x\in\mathbf{R}\ f(x)=f(0)+f'(0)x+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\ldots$.

Для получения разложения e^x заметим, что $\left(e^x\right)^{(n)}=e^x$, и для любого отрезка $[-H;H]$ $\max\limits_{x\in[-H;H]}\left(e^x\right)^{(n)}=e^H$. Поэтому лемма применима с $C(H)=e^H$, и мы получаем: $e^x=1+x+\frac{x^2}{2}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots$.

Для нахождения разложения $\sin x$ и $\cos x$ учтем, что $\forall n,\forall x\in\mathbf{R}$ $\left|\cos^{(n)}(x)\right|\le 1$, $\left|\sin^{(n)}(x)\right|\le 1$ и в лемме можно положить $C(H)=1$. Поэтому $\forall x\in\mathbf{R}$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\ldots$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\ldots$$

Разложения для $e^x, \sin x, \cos x$ позволяет нам вывести очень важные для дальнейшего *формулы Эйлера*. Сначала дадим необходимые определения.

Если члены ряда $c_n=a_n+ib_n$ - комплексные числа ($a_n, b_n\in\mathbf{R}$), то *сходимость* ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n$ означает, что одновременно сходятся ряды $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n$ и $\sum\limits_{n=0}^{\infty}b_n$. *Абсолютная сходимость* ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n$, по определению, есть сходимость ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty}|c_n|$, т.е. ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\sqrt{a_n^2+b_n^2}$.

Очевидные неравенства $\max(|a_n|,|b_n|)\le\sqrt{a_n^2+b_n^2}\le|a_n|+|b_n|$ показывают, что абсолютная сходимость ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n$ равносильна одновременной абсолютной сходимости рядов $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty}b_n$ и абсолютно сходящиеся ряды с комплексными членами обладают всеми свойствами абсолютно сходящихся рядов с действительными членами.

Подставим в разложение для e^x вместо x величину ix. Тогда (пока формально) получим: $e^{ix}=1+ix-\frac{x^2}{2}-i\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24}+\ldots$. Группируя действительные и мнимые слагаемые, получаем: $e^{ix}=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+\ldots+i\left(x-\frac{x^3}{6}+\ldots\right)=\cos x+i\sin x$.

Для обоснования законности наших действий заметим, что ряд $e^z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$, как доказано выше, абсолютно сходится, поэтому в нем можно переставить слагаемые (в частности так, как это сделано выше), и сумма его сохранится. Упомянем, что и для $z_1,z_2\in\mathbf{C}$ $e^{z_1+z_2}=e^{z_1}\cdot e^{z_2}$.

Если в разложение для e^x подставить вместо x число $-ix$, то получим: $e^{-ix}=\cos(-x)+i\sin(-x)=\cos x-i\sin x$. Поэтому из двух полученных формул следует, что $\cos x=\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$, $\sin x=\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$. Кроме того, для любого комплексного числа $\alpha=a+bi$ $e^{\alpha x}=e^{(a+bi)x}=e^{ax}\cdot e^{ibx}=e^{ax}(\cos bx+i\sin bx)$.

Разложение $\ln(1+x)$.

Используем равенство: $(\ln(1+x))'=\frac{1}{1+x}$. Разложим $\frac{1}{1+x}$ в ряд как прогрессию при $|x|<1$. $\frac{1}{1+x}=\frac{1}{1-(-x)}=1-x+x^2-x^3+\ldots+(-1)^n x^n+\ldots$. Тогда, интегрируя это разложение, получим: $\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}+\ldots$. Это равенство справедливо при $|x|<1$. Кроме того, т.к. ряд $1-\frac{1}{2}+\ldots+\frac{(-1)^n}{n+1}+\ldots$ сходится по теореме Лейбница, равенство сохранится и при $x=1$.

Разложение $\arctan x$ (=arctgx)

Используем равенство: $(\arctan x)'=\frac{1}{1+x^2}$. Далее, как и выше, при $|x|<1$ $\frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4-x^6+\ldots+(-1)^n x^{2n}+\ldots$. Поэтому, при $|x|<1$ $\arctan x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\ldots$. Кроме того, ряд $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\ldots+\frac{(-1)^n}{2n+1}+\ldots$ сходится. Значит, написанное выше разложение имеет место и при $x=\pm1$.

Разложение $(1+x)^m$.

Если обозначить $f(x)=(1+x)^m$, то $f^{(n)}(0)=m\cdot(m-1)\cdot\ldots\cdot(m-n+1)$. Поэтому $(1+x)^m=1+mx+\frac{m(m-1)}{2}x^2+\ldots+\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n+\ldots$. Это разложение верно для всех $x\in(-R;R)$, где R - радиус сходимости. Для нахождения R используем формулу $R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)\cdot(n+1)!}{n!\,m(m-1)\ldots(m-n+1)(m-n)}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{n+1}{m-n}\right|=1$. Кроме того, без доказательства, отметим, что при $m>0$ разложение справедливо и при $x=-1$, а при $m>-1$ - для $x=1$.

В заключение приведем несколько полезных следствий из разложения $\ln(1+x)$.

Следствие 1. Легко видеть, $\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \ldots - (-1)^n \frac{x^n}{n} - \ldots$. Поэтому

$\ln\frac{1+x}{1-x} = \ln(1+x) - \ln(1-x) = 2x\left(1 + \frac{x^2}{3} + \frac{x^4}{5} + \ldots + \frac{x^{2m}}{2m+1} + \ldots\right)$ при $|x| < 1$. Полагая

$x = \frac{1}{2n+1}, n \in \mathbf{Z}$, получаем, что $\frac{1+x}{1-x} = \frac{1 + \frac{1}{2n+1}}{1 - \frac{1}{2n+1}} = \frac{(2n+2)(2n+1)}{(2n+1)2n} = \frac{n+1}{n}$ и

$\ln\frac{n+1}{n} = \frac{2}{2n+1}\left(1 + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{(2n+1)^2} + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{(2n+1)^4} + \ldots\right)$. Этим разложением можно воспользоваться при вычислении логарифмов и при доказательстве формулы Стирлинга.

Следствие 2. Формула Стирлинга.

Приведем эту формулу без доказательства. $n! = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n e^{\frac{\Theta}{12n}}$, $0 < \Theta < 1$.

8. Ряды Фурье. Понятие об ортогональных системах функций

Начнем с определения ортогональных функций. Функции $\phi(x)$ и $\psi(x)$ называются ортогональными на $[a;b]$, если $\int_a^b \phi(x)\psi(x)dx = 0$.

Термин "ортогональность" требует некоторых пояснений. Функции на отрезке $[a;b]$ образуют (бесконечномерное) векторное пространство (сумма функций и произведение функции на число – это снова функция). Рассмотрим для интегрируемых функций величину $\int_a^b \phi(x)\psi(x)dx$ (1)

и назовем нормой ϕ, $\|\phi\| = \sqrt{(\phi,\phi)}$. Разумеется, это билинейная симметричная функция:

1. $(\phi,\psi) = \int_a^b \phi(x)\psi(x)dx = \int_a^b \psi(x)\phi(x)dx = (\psi,\phi)$;
2. $(\phi_1 + \phi_2, \psi) = \int_a^b (\phi_1(x) + \phi_2(x))\psi(x)dx = \int_a^b \phi_1(x)\psi(x)dx + \int_a^b \phi_2(x)\psi(x)dx =$
   $= (\phi_1,\psi) + (\phi_2,\psi)$;

3. $(\lambda\phi,\psi)=\int\limits_a^b \lambda\phi(x)\psi(x)dx=\lambda\int\limits_a^b \phi(x)\psi(x)dx=\lambda(\phi,\psi)$.

4. Кроме того, если рассматривать только непрерывные функции, из равенства $(\phi,\phi)=0$ следует, что $\phi(x)=0$ на $[a;b]$.

Действительно, если бы существовала точка $x_0\in[a;b]$ такая, что $\phi(x_0)=c\neq 0$, то, ввиду непрерывности $\phi(x)$ на $[a;b]$ существовало бы δ такое, что при $x\in[x_0-\delta;x_0+\delta]$ для функции $\phi^2(x)$ было бы справедливо неравенство $\phi^2(x)>\frac{c^2}{2}$. Но тогда

$$\int\limits_a^b \phi^2(x)dx=\int\limits_a^{x_0-\delta}\phi^2(x)dx+\int\limits_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}\phi^2(x)dx+\int\limits_{x_0+\delta}^{b}\phi^2(x)dx\geq 0+2\delta\frac{c^2}{2}+0=\delta c^2>0.$$

Поэтому для непрерывных функций ϕ,ψ величина (1) представляет собой скалярное произведение.

Если рассмотреть более широкий класс, чем непрерывные функции, то свойство 4 уже не имеет места. Например, для отличной от тождественного нуля функции $\phi(x)=\begin{cases}1, x=0\\ 0, x\neq 0\end{cases}$ на $[a;b]=[-1;1]$ выполняется равенство $\int\limits_{-1}^{1}\phi^2(x)dx=0$.

Однако, если $\phi(x)$ - кусочная непрерывная функция, то можно доказать, что из равенства $\|\phi\|^2=\int\limits_a^b \phi^2(x)dx=0$ следует, что $\phi(x)$ равна 0 всюду, кроме конечного числа точек, где она имеет устранимый разрыв.

Таким образом, величина (1) по своим свойствам близка к скалярному произведению.

Система функций $\{\phi_n(x)\}$ - ортогональная на $[a;b]$, если $(\phi_n,\phi_m)=\int\limits_a^b \phi_n(x)\phi_m(x)dx=0$ при $n\neq m$. Система функций называется ортонормированной на $[a;b]$, если $(\phi_n,\phi_m)=\begin{cases}0, \text{при } n\neq m\\ 1, \text{при } n=m\end{cases}$.

Если рассмотреть символ Кронекера $\delta_{m,n}$, определяемый так: $\delta_{m,n}=\begin{cases}0, \text{при } n\neq m\\ 1, \text{при } n=m\end{cases}$, то условие ортонормированности можно записать так: $(\phi_n,\phi_m)=\delta_{n,m}$.

Если ортогональная система функций $\{\phi_n(x)\}$ на $[a;b]$ не содержит функций с нулевой нормой, то система $\left\{\frac{\phi_n(x)}{\|\phi_n(x)\|}\right\}$ - ортонормированная.

Действительно, $\left(\frac{\phi_n}{\|\phi_n\|},\frac{\phi_m}{\|\phi_m\|}\right)=\frac{1}{\|\phi_n\|\|\phi_m\|}(\phi_n,\phi_m)=\begin{cases}0, n\neq m\\ \frac{(\phi_n,\phi_n)}{\|\phi_n\|^2}=1, n=m\end{cases}$.

9. Обобщенные ряды Фурье

Пусть $\phi_n(x)$, $n=1,2,...$, $\|\phi_n\|\neq 0$ - ортогональная на $[a;b]$ система функций. Пусть $f(x)$ представляет собой равномерно сходящийся на $[a;b]$ ряд $f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}c_k\phi_k$.

Найдем коэффициенты c_k. Для этого вычислим $(f,\phi_n)=\int_a^b f(x)\phi_n(x)dx=$

$=\int_a^b\left(\sum_{k=1}^{\infty}c_k\phi_k(x)\right)\phi_n(x)dx=\int_a^b\sum_{k=1}^{\infty}c_k\phi_k(x)\phi_n(x)dx=$ (ввиду равномерной сходимости)

$=\sum_{k=1}^{\infty}c_k\int_a^b\phi_k(x)\phi_n(x)dx=c_n\int_a^b\phi_n(x)\phi_n(x)dx=$ (ввиду ортогональности) $=c_n\|\phi_n\|^2$.

Поэтому $c_n=\frac{(f,\phi_n)}{\|\phi_n\|^2}$.

Однако коэффициент c_n некоторой функции $f(x)$ можно вычислять по этой формуле и без предположения о сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty}c_n\phi_n(x)$. Этот коэффициент называется коэффициентом Фурье относительно системы $\{\phi_n(x)\}$, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty}c_n\phi_n(x)$ называется рядом Фурье функции $f(x)$. Мы пока не говорим о сходимости этого ряда к $f(x)$, а говорим лишь о том, что функции $f(x)$ можно поставить в соответствие ее ряд Фурье, и записываем это так: $f\propto\sum_{n=1}^{\infty}c_n\phi_n(x)$.

Мы вернемся к этому важнейшему вопросу о сходимости немного позднее.

10. Тригонометрические ряды Фурье

Пусть отрезок имеет длину $2l$. Для определенности, пусть это отрезок $[-l;l]$. Рассмотрим следующую систему функций: $1,\cos\frac{\pi x}{l},\sin\frac{\pi x}{l},...,\cos\frac{n\pi x}{l},\sin\frac{n\pi x}{l},...$.

Теорема. Рассматриваемая система функций является ортогональной.

Доказательство. Требуется доказать, что при $n \neq m,\ n,m = 0,1,...$

$\int\limits_{-l}^{l} \frac{\cos n\pi x}{l} \cdot \frac{\cos m\pi x}{l} dx = 0,\ \int\limits_{-l}^{l} \frac{\sin n\pi x}{l} \cdot \frac{\sin m\pi x}{l} = 0$ и что при всех

$n,m:\ n = 0,1,...;\ m = 1,2,...\ \int\limits_{-l}^{l} \frac{\cos n\pi x}{l} \cdot \frac{\sin m\pi x}{l} dx = 0$

Проверим первое из этих равенств. Остальные получаются совершенно аналогично. $\int\limits_{-l}^{l} \frac{\cos n\pi x}{l} \cdot \frac{\cos m\pi x}{l} dx = \int\limits_{-l}^{l} \frac{1}{2}\left(\cos\left(\frac{\pi x}{l}(m+n)\right) + \cos\left(\frac{\pi x}{l}(m-n)\right)\right)dx =$

$= \frac{1}{2}\left(\left(\frac{l}{\pi(m+n)}\sin\left(\frac{\pi x}{l}(m+n)\right)\right)\Bigg|_{-l}^{l} + \left(\frac{l}{\pi(m-n)}\sin\left(\frac{\pi x}{l}(m-n)\right)\right)\Bigg|_{-l}^{l}\right) = 0$ (т.к. $\sin \pi k = 0$ при $k \in \mathbf{Z}$.

Замечание. Легко вычислить, что на $(-l;l)$

$\|1\|^2 = 2l, \left\|\sin\frac{n\pi x}{l}\right\|^2 = l, \left\|\cos\frac{n\pi x}{l}\right\|^2 = l,\ n = 1,2,....$ Например,

$\left\|\sin\frac{n\pi x}{l}\right\|^2 = \int\limits_{-l}^{l} \sin^2\left(\frac{n\pi x}{l}\right)dx = \frac{1}{2}\int\limits_{-l}^{l}\left(1 - \cos\frac{2n\pi x}{l}\right)dx = \frac{1}{2}\left(2l - \frac{l}{2n\pi}\sin\frac{2n\pi x}{l}\Bigg|_{-l}^{l}\right) = l$.

Предположим теперь, что $f(x)$ определена на $(-l;l)$ и периодически продолжена на всю числовую ось. Сопоставим ей ряд Фурье по тригонометрической системе: $f(x) \propto \frac{a_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{l} + b_n \sin\frac{n\pi x}{l}\right)$, где

$a_n = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l},\ n = 0,1,2,...;\ b_n = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx,\ n = 1,2,....$

(Важнейший частный случай: $l = \pi$, тогда тригонометрическая система имеет вид $1, \cos x, \sin x, ..., \cos nx, \sin nx$. Коэффициенты Фурье вычисляются по формулам $a_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx,\ b_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx$ и ряд Фурье, соответствующий $f(x)$, есть $\frac{a_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$).

Вернемся к вопросу о сходимости ряда Фурье.

Теорема. Пусть $f(x)$ - периодическая функция (с периодом $2l$), $f(x), f'(x)$ - кусочно непрерывны на $(-l;l)$ (т.е. ограничены на этом промежутке и имеют не более чем конечное число точек разрыва, причем только первого рода). Тогда ее ряд Фурье: $S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{l} + b_n \sin\frac{n\pi x}{l}\right)$ сходится при любом x, причем

$S(x) = f(x)$, если x - точка, где $f(x)$ непрерывна. $S(x) = \dfrac{f(x+0) + f(x-0)}{2}$ в точке разрыва (символы $f(x+0), f(x-0)$ означают $\lim\limits_{t \to x+0} f(t)$ и $\lim\limits_{t \to x-0} f(t)$, соответственно).

Эта теорема приводится **без доказательства** ввиду его технической сложности (хотя это и одна из самых простых теорем о сходимости).

Рассмотрим особенности разложений в ряд Фурье, присущие четным и нечетным функциям.

Лемма. Если $f(x)$ - четная интегрируемая функция, то $\int\limits_{-l}^{l} f(x)dx = 2\int\limits_{0}^{l} f(x)dx$, а если $\phi(x)$ - нечетная интегрируемая функция, то $\int\limits_{-l}^{l} \phi(x)dx = 0$.

Доказательство. $\int\limits_{-l}^{l} f(x)dx = \int\limits_{0}^{l} f(x)dx + \int\limits_{-l}^{0} f(x)dx = \int\limits_{0}^{l} f(x)dx + \int\limits_{l}^{0} f(-t)dx =$ (замена $x = -t$) $= \int\limits_{0}^{l} f(x)dx + \int\limits_{0}^{l} f(-t)dt =$ (ввиду четности) $= \int\limits_{0}^{l} f(x)dx + \int\limits_{0}^{l} f(t)dt = 2\int\limits_{0}^{l} f(x)dx$.

Аналогично, $\int\limits_{-l}^{l} \phi(x)dx = \int\limits_{0}^{l} \phi(x)dx - \int\limits_{l}^{0} \phi(-t)dt = \int\limits_{0}^{l} \phi(x)dx - \int\limits_{0}^{l} \phi(t)dt = 0$ (ввиду нечетности).

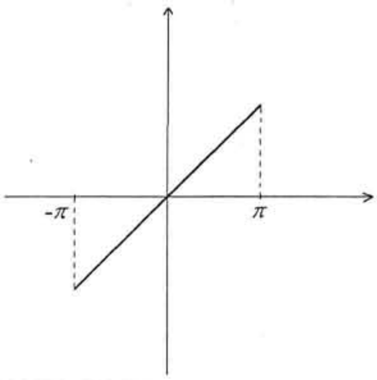
Теорема. Разложение в ряд Фурье четной функции $f(x)$ содержит только косинусы кратных дуг (т.е. все коэффициенты $b_n = 0$). Разложение в ряд Фурье нечетной функции $\phi(x)$ содержит только синусы кратных дуг (т.е. все $a_n = 0$).

Доказательство. Следует только заметить, что если $f(x)$ - четная, то $\forall n\ f(x)\cos nx$ - четная, а $f(x)\sin nx$ - нечетная функция и если $\phi(x)$ нечетная, то $\forall n\ \phi(x)\sin nx$ - четная, а $\phi(x)\cos nx$ - нечетная функция. Применение леммы доказывает теорему.

Приведем примеры разложения функций в ряды Фурье.

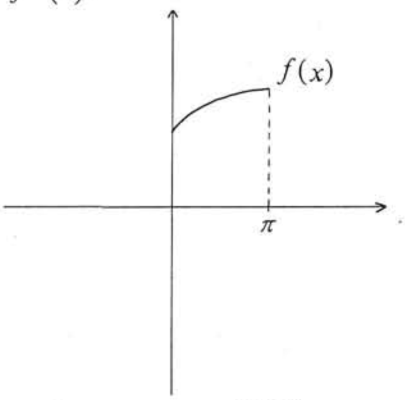
Пример. Разложим в ряд Фурье $y = x$ на интервале $(-\pi;\pi)$. Эта функция – нечетная, поэтому в разложении все $a_n = 0,\ n = 1,2,\ldots$. Интегрируя по частям, находим $b_n = \dfrac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi} x\sin nx dx = \dfrac{2}{\pi}\left(-\dfrac{x}{n}\cos nx\Big|_0^{\pi} + \dfrac{1}{n}\int\limits_{0}^{\pi}\cos nx dx\right) = \dfrac{2}{\pi}\left(-\dfrac{1}{n}\pi\cos n\pi + \dfrac{1}{n^2}\sin nx\Big|_0^{\pi}\right) = \dfrac{(-1)^{n+1}\cdot 2}{n}$ (здесь использовано то, что $\cos n\pi = (-1)^n$).

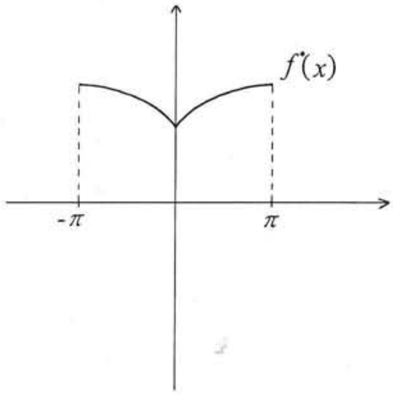
Итак, получаем ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n}(-1)^{n+1} \sin nx$, который сходится к функции x на $(-\pi;\pi)$ (и к 0 в точках $x=-\pi,\ x=\pi$).



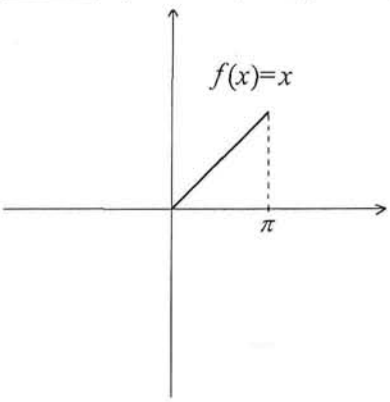
Обратим внимание на еще один часто встречающийся тип задач.

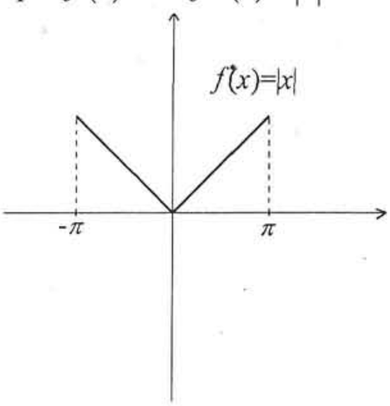
<u>Пример.</u> Разложить функцию $f(x)$ на интервале $(0;\pi)$ по косинусам кратных дуг. В качестве $f(x)$ рассмотрим x. Эту задачу не следует путать с разложением в ряд Фурье функции x на интервале $(0;\pi)$. При таком разложении тригонометрическая система имела бы вид $1, \cos 2nx, \sin 2nx,\ \ n=1,2,\ldots$, и разложение содержало бы как функции $\cos 2nx$, так и функции $\sin 2nx$. Не следует также видеть в этой задаче противоречие с разобранным выше примером. Там ведь функция была задана на $(-\pi;\pi)$, и была нечетной на этом интервале. В рассматриваемом случае мы должны сначала доопределить $f(x)$ на интервале $(-\pi;0)$ (в нашем случае это будет $-x$) так, чтобы получилась <u>четная</u> функция $f^*(x)$.





Разложение $f^*(x)$ содержит только <u>косинусы</u>. Рассматривая это разложение <u>только</u> при $x>0$, получаем решение исходной задачи. При $f(x)=x$ $f^*(x)=|x|$.





Разложим $|x|$ на $(-\pi;\pi)$. Это – четная функция. $a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x dx = \frac{\pi}{2}$,

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\cos nx dx = \frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{n}x\sin nx\Big|_0^\pi - \frac{1}{n}\int_0^\pi \sin nx dx\right) = \frac{2}{\pi}\left(0 + \frac{1}{n^2}\cos nx\Big|_0^\pi\right) =$$

$$= \frac{2}{\pi n^2}(\cos n\pi - 1) = \begin{cases} 0, \ n = 2k \\ -\dfrac{4}{\pi(2k+1)^2}, n = 2k+1 \end{cases}. \ |x| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos(2k+1)x}{(2k+1)^2}.$$ Поэтому при $x > 0$ получаем искомое разложение x по косинусам кратных дуг.

$$x = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos(2k+1)x}{(2k+1)^2}, x > 0.$$

Дифференциальные уравнения

1. Основные понятия

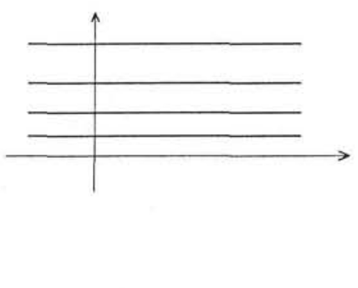
Дифференциальным уравнением называется уравнение вида $F\left(x, y, y', ..., y^{(n)}\right) = 0$, где $F(t_0, t_1, ..., t_{n+1})$ - функция, определенная в некоторой области D пространства $\mathbf{R}^{n+2}$, x - независимая переменная, y - функция от x, $y', ..., y^{(n)}$ - ее производные.

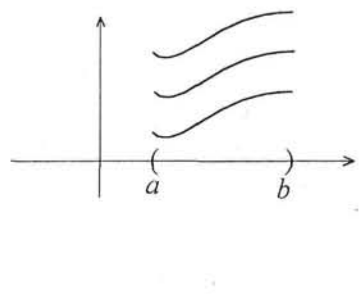
Порядком уравнения называется наивысший из порядков производных y, входящих в уравнение.

Функция $f(x)$ называется *решением* уравнения на промежутке $(a;b)$, если для всех x из $(a;b)$ выполняется равенство: $F\left(x, f(x), f'(x), ..., f^{(n)}(x)\right) = 0$.

Интегральная кривая – это график решения.

Пример 1. Решить уравнение $y' = 0$. Его решение: $f(x) = const$ определено на $(-\infty;\infty)$. Отметим, что эта постоянная – произвольная и решение – не единственное, а имеется бесконечное множество решений.





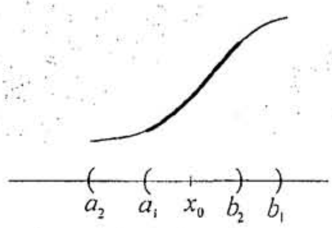
Пример 2. Решить уравнение $y' = \phi(x)$, $x \in (a;b)$, где $\phi(x)$ - непрерывная на $(a;b)$ функция. Пусть $F(x)$ - первообразная для $\phi(x)$. Тогда уравнение имеет бесконечное множество решений на $(a;b)$ и все они имеют вид $y = f(x) = F(x) + C$, где C - произвольная постоянная.

Есть прямой способ выбрать какое-то одно из этих решений, потребовав, например, чтобы для некоторой точки $x_0 \in (a;b)$ выполнялось условие $y(x_0) = y_0$. Тогда, подставив x_0 в решение, получаем условие $y_0 = F(x_0) + C$, определяющее $C = y_0 - F(x_0)$ и, тем самым, единственное решение $y = f(x)$ с указанным условием.

Рассмотрим значительно более общую ситуацию, чем была в примерах. Пусть исследуемое уравнение имеет вид: $y' = f(x, y)$. Это – уравнение первого порядка, *разрешенное* относительно y'. (Термин «разрешенное» означает, что y' выражается через остальные величины, в отличие от уравнения общего вида $F(x, y, y') = 0$, из которого выразить y' может быть и не удастся).

Сформулируем важнейшую теорему.

Теорема. (О существовании и единственности решения задачи Коши). Пусть $f(t_1, t_2)$ - непрерывная функция в области $D \subset \mathrm{R}^2$, причем $\frac{\partial f}{\partial t_2}(t_1, t_2)$ - также непрерыв~~ен~~на в D. Тогда для любой точки $(x_0, y_0) \in D$ *задача Коши*: $\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ имеет решение, причем единственное в том смысле, что если есть 2 ее решения y_1 и y_2, определенные на интервалах $(a_1; b_1)$ и $(a_2; b_2)$, содержащих точку x_0, то они совпадают на пересечении $(a; b)$ этих интервалов.

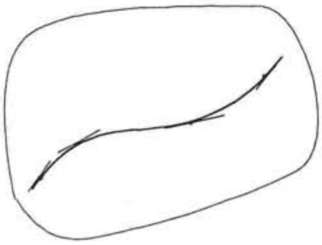


Теорему оставим **без доказательства**.

Замечание. Говорят, что решение $y_1(x)$ дифференциального уравнения, определённое на интервале $(a_1; b_1)$ есть *продолжение* решения $y_2(x)$, определенного на $(a_2; b_2)$, если $(a_2; b_2) \subset (a_1; b_1)$ и $y_1(x) \equiv y_2(x)$ на $(a_2; b_2)$. Также говорят, что решение $y(x)$ - *максимальное* или *непродолжаемое относительно* D, если $y(x)$ не обладает продолжениями, целиком лежащими в D.

На основании этого замечания можно сказать, что при условиях теоремы существует единственное максимальное (непродолжаемое) решение задачи Коши.

Геометрический смысл сформулированной теоремы состоит в следующем. Левая часть уравнения $y' = f(x, y)$ представляет собой y' - тангенс угла наклона касательной к графику искомой функции в точке (x, y), а правая часть $f(x, y)$ задает его численное значение $f(x, y)$ в этой точке. Поэтому можно считать, что уравнение задает *поле направлений* на области D, т.е. к каждой точке $(x, y) \in D$ прикреплен вектор, указывающий направление касательной к искомой интегральной кривой.



Поэтому сформулированная выше теорема означает, что при выполнении ее условий через каждую точку $(x, y) \in D$ проходит единственная непродолжаемая интегральная кривая.

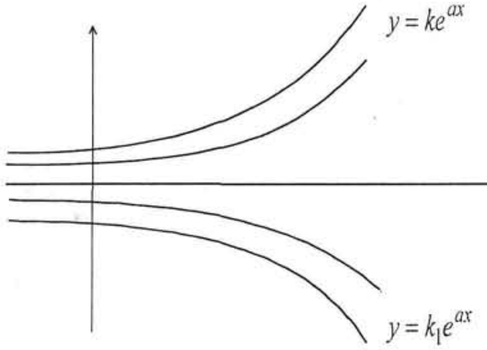
Перейдем к простейшим типам дифференциальных уравнений, для которых можно в явном виде получить их решения.

2. Уравнения с разделяющимися переменными

Уравнениями с разделяющимися переменными называются уравнения вида $y' = f(x) \cdot g(y)$, где $f(x)$ - непрерывна на некотором $(a; b)$, а $g(y)$ непрерывна на $(c; d)$, причем $g(y) \neq 0$ на $(c; d)$. $\frac{dy}{dx} = f(x)g(y) \Leftrightarrow \frac{dy}{g(y)} = f(x)dx$. Интегрируя обе части, получаем $\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx$. Обозначая $G(y)$ любую первообразную для $\frac{1}{g(y)}$, а $F(x)$ - любую первообразную для $f(x)$, перепишем это уравнение в виде $G(y) = F(x) + C$. Это – искомая интегральная кривая.

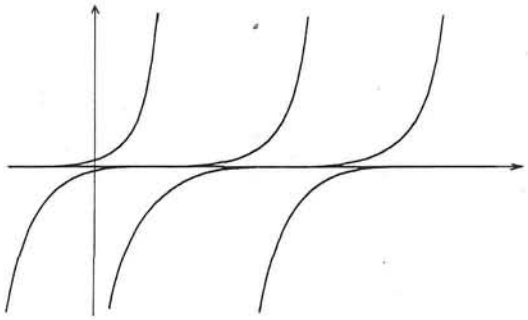
Рассмотрим некоторые примеры таких уравнений.

Пример 1. $y' = ay,\ a \neq 0$. Очевидно решение $y \equiv 0$. Если же $y \neq 0$, то уравнение можно заменить таким: $\int \frac{dy}{y} = \int a dx$, откуда $\ln|y| = ax + C$. Если считать, что $y > 0$, то $\ln y = x + C$, откуда $y = e^C e^{ax}$ или $y = ke^{ax}, k = e^C > 0$. Аналогично, при $y < 0$ получаем $y = k_1 e^{ax}$, $k_1 < 0$.



<u>Пример 2.</u> $y' = 2\sqrt{|y|}$. $y(x) \equiv 0$ - решение уравнения. При $y > 0$ имеем: $\frac{dy}{dx} = 2\sqrt{y}$, $\frac{dy}{2\sqrt{y}} = dx$, $\int \frac{dy}{2\sqrt{y}} = \int dx$, $\sqrt{y} = x - C \Rightarrow x \ge C$, и $y = (x - C)^2$.

Аналогично, при $y < 0$ $y = -(x - C)^2, x \le C$.



В точках $(C,0)$ единственность решения нарушается. Отметим, что это не противоречит теореме единственности: $f(x, y) = 2\sqrt{|y|}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ - не непрерывен в 0.

3. *Однородные уравнения*

Под *однородными* уравнениями понимаются уравнения вида $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$. Для их решения требуется сделать замену $y = tx$, после чего получится уравнение с разделяющимися переменными.

Пример. $xdy = (x+y)dx$. Оно имеет решение $x \equiv 0$. Пусть теперь $x \neq 0$. Преобразуем уравнение так: $y' = \frac{x+y}{x}$ (правая часть имеет вид $1 + \frac{y}{x}$ - это однородное уравнение). Полагаем $y = tx$. При этом $y' = t' \cdot x + t$ и получаем уравнение $t'x + t = 1 + t$, $t'x = 1$, $t' = \frac{1}{x}$, $t = \ln|x| + C$. Значит, $y = x\ln|x| + Cx$.

Уравнения вида $y' = f\left(\frac{a_1 x + b_1 y + c_1}{ax + by + c}\right)$. Такие уравнения сводятся к однородным заменой переменных. В случае, если прямые $a_1 x + b_1 y + c_1 = 0$ и $ax + by + c = 0$ пересекаются в точке (x_0, y_0), то замена $X = x - x_0$, $Y = y - y_0$ приведет уравнение к однородному. Если же эти прямые не пересекаются, то $a_1 x + b_1 y = k(ax + by)$ и замена $z = ax + by$ приведет к уравнению с разделяющимися переменными.

4. Линейные уравнения первого порядка

Пример. Разберем пример: $y' = x + y$.

Решим сначала вспомогательное уравнение $y' = y$. Это – уже знакомое уравнение с разделяющимися переменными, имеющее решение $y = Ce^x$. Для нахождения решения исходного уравнения используем метод *вариации постоянной.* Он состоит в следующем. Ищем решение нашего уравнения в виде: $y = C(x)e^x$, где $C(x)$ - некоторая дифференцируемая функция. Тогда $y' = C'(x) \cdot e^x + C(x)e^x$ и, подставляя в уравнение, получаем: $C'(x) \cdot e^x + C(x)e^x = x + C(x)e^x$ или $C'(x)e^x = x$, $C'(x) = xe^{-x}$. Интегрируя, находим: $C(x) = \int xe^{-x}dx = -xe^{-x} + \int e^{-x}dx = -xe^{-x} - e^{-x} + C_1$. Тогда $y = (-xe^{-x} - e^{-x} + C_1)e^x = -x - 1 + C_1 e^x$. Итак, мы нашли решение исходного уравнения. Других решений у него нет, поскольку выполнены все условия теоремы о существовании и единственности решения задачи Коши ($x + y$ - непрерывная функция от x, y, а ее производная по y, равная 1, тоже).

В общем случае уравнения $y' + p(x)y = q(x)$, где $p(x), q(x)$ - непрерывные на $(a;b)$ функции мы поступаем вполне аналогично. Сначала решаем вспомогательное однородное уравнение: $y' + p(x)y = 0$, $y' = -p(x)y$, $\frac{dy}{y} = -p(x)dx$ (мы не рассматриваем решение $y = 0$), откуда, обозначая $P(x)$ любую первообразную для функции $-p(x)$, находим, ограничиваясь случаем $y > 0$, для определенности, $\ln y = P(x) + \ln C$, $C > 0$, или $y = Ce^{P(x)}$. Далее используем метод вариации постоянных: ищем решение неоднородного уравнения в виде

$y = C(x)e^{P(x)}$. При этом $y' = C'(x)e^{P(x)} + C(x)e^{P(x)} \cdot P'(x) = C'(x)e^{P(x)} - C(x)p(x)e^{P(x)}$. Подстановка в уравнение дает $C'(x)e^{P(x)} - C(x)p(x)e^{P(x)} + C(x)p(x)e^{P(x)} = q(x)$ или $C'(x) = q(x)e^{-P(x)}$. Интегрируем и, обозначая $Q(x)$ первообразную для $q(x)e^{-P(x)}$, получаем $C(x) = Q(x) + C_1$. Тогда $y = (Q(x) + C_1)e^{P(x)}$. Эту формулу иногда записывают в виде $y = \left(\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + C_1\right)e^{-\int p(x)dx}$, понимая под знаком интеграла не все множество первообразных, а одну произвольно выбранную первообразную.

5. Уравнения, не разрешенные относительно производной

Общее уравнение первого порядка $F(x, y, y') = 0$ можно пытаться решать разными методами.

Во-первых, можно попытаться все-таки его решить и свести исходное уравнение к одному или нескольким уравнениям вида $y' = f(x, y)$.

Например, $(y')^2 - y^2 = 0$. Уравнение, после преобразования к виду $(y' - y)(y' + y) = 0$ даст равносильную ему совокупность $\left[\begin{array}{l} y' = y \\ y' = -y \end{array}\right.$, откуда $\left[\begin{array}{l} y = Ce^{x} \\ y = Ce^{-x} \end{array}\right.$.

Другой способ – введение параметра.

Например, уравнение $y = x + y' - \ln y'$ можно решить так: введем параметр $p = y'$. Тогда $y = x + p - \ln p$, откуда $dy = dx + dp - \dfrac{dp}{p}$. Но $dy = y'dx = pdx$ и мы приходим к уравнению $pdx = dx + dp - \dfrac{dp}{p}$ или $(p-1)dx = \dfrac{p-1}{p}dp$. При $p \neq 1$ из этого уравнения получаем $dx = \dfrac{dp}{p}$, $x = \ln p + C$. Тогда $y = x + p - \ln p = \ln p + C + {}$ ${}+ p - \ln p = p + C$ и мы получаем параметрические уравнения: $\begin{cases} x = \ln p + C \\ y = p + C \end{cases}$. В этом случае параметр p удается исключить: $\ln p = x - C$, $p = e^{x-C}$ и $y = e^{x-C} + C$ - явное решение. В случае $p = 1$ из $y = x + p - \ln p$ получаем $y = x + 1$.

Указанный прием применим к уравнениям Лагранжа и Клеро.

Уравнение Лагранжа имеет вид $y = \phi(y')x + \psi(y')$, где $\phi(p), \psi(p)$ - дифференцируемые функции. Полагая $y' = p$, получаем $y = \phi(p)x + \psi(p)$. Дифференцируя, получаем: $dy = x\phi'(p)dp + \phi(p)dx + \psi'(p)dp$ или $pdx = x\phi'(p)dp + \phi(p)dx + \psi'(p)dp$, откуда $(\phi(p) - p)dx + x\phi'(p)dp = -\psi'(p)dp$.

Предполагая, что $\phi(p)\neq p$, получаем уравнение $dx + x\dfrac{\phi'(p)}{\phi(p)-p}dp = -\dfrac{\psi'(p)}{\phi(p)-p}dp$, линейное относительно x: $\dfrac{dx}{dp}+\dfrac{\phi'(p)}{\phi(p)-p}\cdot x = -\dfrac{\psi'(p)}{\phi(p)-p}$. Решаем его указанным выше методом и получаем выражение для x через p и произвольную постоянную C, $x = x(p,C)$. Тогда $y=\phi(p)x(p,C)+\psi(p)$.

Уравнение Клеро – это частный случай уравнения Лагранжа: $y = xy' + \psi(y')$. Вводя параметр $y' = p$, получаем $y = xp + \psi(p)$ (т.е. $\phi(p) = p$, как раз оставшийся случай), $dy = pdx = xdp + pdx + \psi'(p)dp$ или $(\psi'(p)+x)dp = 0$. Тогда, если $dp = 0$, то $p = C$ и $y = Cx + \psi(C)$ - это общее решение уравнения Клеро. Если же $\psi'(p)+x = 0$, то $p = \omega(x)$. Тогда $y = x\omega(x)+\psi(\omega(x))$.

6. Теорема существования и единственности решения для уравнения n-ного порядка

Теорема. Пусть функция $f(x,t_0,t_1,...,t_{n-1})$ определена и непрерывна в области $D\subset \mathbf{R}^{n+1}$. Пусть $\dfrac{\partial f}{\partial t_0},...,\dfrac{\partial f}{\partial t_{n-1}}$ непрерывны в D. Тогда *задача Коши*, состоящая в нахождении решения уравнения $y^{(n)} = f(x,y,y',...,y^{(n-1)})$ с начальными условиями $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_0^{(1)},...,y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$ (где точки $(x_0,y_0,y_0^{(1)},...,y_0^{(n-1)})$ принадлежат области D) имеет, притом единственное, непродолжаемое (максимальное) решение.

Теорема сформулирована **без доказательства.**

7. Методы понижения порядка уравнения

Существуют разные методы снижения порядка (и, тем самым, некоторого упрощения) уравнения. Мы изложим здесь самые простые.

Если уравнение имеет вид $F(x,y^{(k)},...,y^{(n)}) = 0$ (т.е. не содержит $y, y',..., y^{(k-1)}$, то введение новой переменной $z = y^{(k)}$ уменьшит порядок уравнения, которое примет вид $F(x,z,...,z^{(n-k)}) = 0$. Если удастся решить это уравнение, то y затем можно получить последовательным интегрированием z k раз.

Если уравнение не содержит x, т.е. имеет вид $F(y,y',...,y^{(n)}) = 0$, то его порядок можно понизить, взяв y за независимую переменную и считая производную y' функцией от y. Поясним это на примере.

43

Пример. Решить уравнение $2yy'' = (y')^2 + 1$. Пусть $y' = p(y)$. Тогда
$y'' = \frac{d(y')}{dx} = \frac{d(p(y))}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = p'(y) \cdot p(y)$, откуда $2ypp' = p^2 + 1$;
$\frac{2pdp}{p^2+1} = \frac{dy}{y}, y \neq 0$ (пусть $y > 0$); $\ln(p^2+1) = \ln y + \ln C, C > 0$; $p^2 + 1 = Cy$;
$p^2 = Cy - 1$; $p = \pm\sqrt{Cy-1}$. Таким образом, $y' = \pm\sqrt{Cy-1}$. Далее находим:
$\frac{dy}{\pm\sqrt{Cy-1}} = dx$; $\int \frac{dy}{\pm\sqrt{C-1}} = x + C_1$; $\int \frac{d(Cy-1)}{\pm\sqrt{Cy-1}} = C(x+C_1)$; $\pm 2\sqrt{Cy-1} = C(x+C_1)$;
$y(Cy-1) = (C(x+C_1))^2$.

8. Линейные дифференциальные уравнения. Простейшие свойства

Рассмотрим дифференциальное уравнение
$y^{(n)} + p_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_1(x)y' + p_0(x)y = q(x)$ (1),
где $p_0(x), \ldots, p_{n-1}(x), q(x)$ - функции, непрерывные на некотором интервале $(a;b)$.

Это уравнение называется *линейным*, поскольку все величины $y, y', \ldots, y^{(n-1)}, y^{(n)}$ входят в него в первой степени, т.е. линейным образом. Если $q(x) \equiv 0$, то это уравнение называется *линейным однородным*
$y^{(n)} + p_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_1(x)y' + p_0(x)y = 0$ (2).

Если же $q(x) \neq 0$, то (1) – *линейное неоднородное уравнение.*

Удобно записывать уравнения (1) и (2) в операторной форме: $L(y) = q(x)$ и $L(y) = 0$, соответственно, где величину
$L(y) = y^{(n)} + p_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_1(x)y' + p_0(x)y$ можно рассматривать как результат действия линейного дифференциального оператора L на функцию $y = y(x)$.

Теорема 1. Для любого $x_0 \in (a;b)$ и любых $y_0, y_0^{(1)}, \ldots, y_0^{(n-1)}$ задача Коши

$$\begin{aligned} &L(y) = q(x) \\ &y(x_0) = y_0 \\ &y'(x_0) = y_0^{(1)} \\ &\vdots \\ &y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} \end{aligned}$$

имеет единственное решение $y(x)$, определенное на $(a;b)$.

Доказательство. Применим общую теорему существования и единственности. Уравнение $L(y) = q(x)$ перепишем в виде
$y^{(n)} = -p_{n-1}(x)y^{(n-1)} - \ldots - p_1(x)y' - p_0(x)y + q(x)$. Соответствующая функция $f(x, t_0, t_1, \ldots, t_{n-1})$ имеет вид $f = q(x) - p_0(x)t_0 - p_1(x)t_1 - \ldots - p_{n-1}(x)t_{n-1}$. Ее частные

производные по $t_0,...,t_{n-1}$ равны, соответственно $\dfrac{\partial f}{\partial t_0}=-p_0(x), \dfrac{\partial f}{\partial t_1}=-p_1(x),...,$

$\dfrac{\partial f}{\partial t_{n-1}}=-p_{n-1}(x)$. Поскольку $q(x), p_0(x),..., p_{n-1}(x)$, по условию, непрерывны на $(a;b)$, все условия общей теоремы выполнены. Применяя ее, получаем требуемое.

9. *Свойства линейных однородных дифференциальных уравнений*

Лемма 1. Для любых y_1, y_2, имеющиъ производные до порядка n включительно, и любых постоянных c_1, c_2 $L(c_1y_1+c_2y_2)=c_1L(y_1)+c_2L(y_2)$.

Замечание 1. Иными словами, L - линейный оператор.

Замечание 2. Утверждение леммы равносильно тому, что $L(y_1+y_2)=L(y_1)+L(y_2)$ и $L(cy)=cL(y)$.

Доказательство. Для любого $0\le k\le n$ $(c_1y_1+c_2y_2)^{(k)}=c_1y_1^{(k)}+c_2y_2^{(k)}$ в силу известных свойств производной (при $k=0$ под $y^{(k)}=y^{(0)}$ понимается сама функция y).

Следовательно, $L(c_1y_1+c_2y_2)=(c_1y_1+c_2y_2)^{(n)}+p_{n-1}(x)(c_1y_1+c_2y_2)^{(n-1)}+...+$
$+p_1(x)(c_1y_1+c_2y_2)'+p_0(x)(c_1y_1+c_2y_2)=c_1y_1^{(n)}+c_2y_2^{(n)}+p_{n-1}(x)\left(c_1y_1^{(n-1)}+c_2y_2^{(n-1)}\right)+$
$+p_1(x)\left(c_1y_1'+c_2y_2'\right)+p_0(x)(c_1y_1+c_2y_2)=c_1\left(y_1^{(n)}+p_{n-1}(x)y_1^{(n-1)}+...+p_1(x)y_1'+\right.$
$\left.+p_0(x)y_1\right)+c_2\left(y_2^{(n)}+p_{n-1}(x)y_2^{(n-1)}+...+p_1(x)y_2'+p_0(x)y_2\right)=c_1L(y_1)+c_2L(y_2)$.

Следствие. Если $y_1,..., y_m$ имеют производные до n-го порядка включительно, а $c_1,...,c_m$ - постоянные, то $L(c_1y_1+...+c_my_m)=c_1L(y_1)+...+c_mL(y_m)$.

Доказательство. Воспользуемся индукцией по m. При $m=1$ $L(c_1y_1)=c_1L(y_1)$ по лемме 1 (при $c_2=0$). Если утверждение доказано при $m-1$, то, по лемме 1, $L(c_1y_1+...+c_{m-1}y_{m-1}+c_my_m)=L(c_1y_1+...+c_{m-1}y_{m-1})+c_mL(y_m)=$ (по индуктивному предположению) $=c_1L(y_1)+...+c_{m-1}L(y_{m-1})+c_mL(y_m)$.

Теорема 2. Множество решений линейного однородного дифференциального уравнения (2) представляет собой векторное пространство.

Доказательство. Следует доказать, что если y_1, y_2 - решения уравнения, то y_1+y_2 - тоже решение, и если y - решение, а c - постоянная, то cy - тоже решение, т.е. $L(y_1)=0, L(y_2=0)\Rightarrow L(y_1+y_2)=0;\ L(y)=0\Rightarrow L(cy)=0$.

По замечанию 2 к лемме 1,
$L(y_1+y_2)=L(y_1)+L(y_2)=0+0=0;\ L(cy)=cL(y)=c\cdot 0=0$.

Теорема 2 доказана.

Перейдем теперь к неоднородному уравнению.

10. Свойства решений линейного неоднородного дифференциального уравнения

Теорема 3. Пусть $y_0(x)$ - решение уравнения (1). Тогда любое другое решение этого уравнения $y(x)$ имеет вид $y(x) = y(x_0) + Y(x)$, где $Y(x)$ - решение уравнения (2), т.е. $L(Y) = 0$.

Доказательство. Пусть $L(y) = q(x),\ L(y_0) = q(x)$. Тогда, по лемме 1, $L(y - y_0) = L(y) - L(y_0) = q(x) - q(x) = 0$. Таким образом, $y - y_0$ есть некоторое решение Y однородного уравнения (2).

Обратно, если $L(y_0) = q(x)$ и $L(Y) = 0$, то $L(y_0 + Y) = q(x)$ и, следовательно, $y = y_0 + Y$ удовлетворяет уравнению (1).

Теорема 3 доказана.

Теорема 4. (Принцип суперпозиции решений). Пусть $y_i = y_i(x), i = 1,...,m$ являются решениями уравнений $L(y_i) = q_i(x), i = 1,...,m$. Тогда функция $y = y_1 + ... + y_m$ удовлетворяет уравнению $L(y) = q_1(x) + ... + q_m(x)$.

Доказательство. По следствию леммы 1, $L(y_1 + ... + y_m) = L(y_1) + ... + L(y_m) = = q_1(x) + ... + q_m(x)$.

Теорема 4 доказана.

Замечание. Эта теорема служит для нахождения решения уравнения $L(y) = q(x)$ в случае, когда функцию $q(x)$ удается представить в виде $q(x) = q_1(x) + ... + q_m(x)$, где $q_i(x), i = 1,...,m$ - такие функции, что нам известны решения уравнений $L(y_i) = q_i(x), i = 1,...,m$.

11. Линейная зависимость функций. Определитель Вронского

Перейдем к более глубокому изучению свойств векторного пространства решений уравнения (2). Мы установим ниже, что оно имеет размерность n.

Определение. Пусть $y_1,..., y_n$ - функции, имеющие все производные до $(n-1)$-го порядка включительно. *Определителем Вронского* $W = W(x)$ функций $y_1,..., y_n$ называется величина $W = \begin{vmatrix} y_1 & \dots & y_n \\ y_1' & \dots & y_n' \\ \vdots & & \\ y_1^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$ (3).

Определение. Пусть $y_1,..., y_m$ определены ны интервале $(a;b)$. Мы назовем их *линейно зависимыми*, если существуют постоянные $c_1,..., c_m$, не все равные 0, такие, что для всех $x \in (a;b)$ $c_1 y_1 + ... + c_m y_m = 0$ (4).

Функции, которые не являются линейно зависимыми, называются *линейно независимыми.* Линейная независимость означает, что из равенства (4) следует, что $c_1 = c_2 = ... = c_m = 0$.

Теорема 5. Если $y_1,..., y_n$ - линейно зависимы и имеют производные до $(n-1)$-го порядка включительно, то $W(x) \equiv 0,\ x \in (a;b)$.

Доказательство. По условию, существуют не все равные 0 числа $c_1,..., c_n$ такие, что на $(a;b)$ выполняется тождество $c_1 y_1 + ... + c_n y_n \equiv 0$ (5).

Взяв производную от обеих частей, получим: $c_1 y_1' + ... + c_n y_n' \equiv 0$ (6).

Аналогично,

$c_1 y_1'' + ... + c_n y_n'' \equiv 0$, (7)

...

$c_1 y_1^{(n-1)} + ... + c_n y_n^{(n-1)} \equiv 0$ (8).

Рассмотрим произвольное $x \in (a;b)$. Равенства (5) – (8) можно рассматривать как систему линейных однородных уравнений относительно неизвестных $c_1,..., c_n$. Поскольку эта система имеет нетривиальное решение $c_1,..., c_n$ (это означает, что не все $c_1,..., c_n$ равны 0), ее определитель $W(x)$ должен быть равен 0, т.е. $W(x) \equiv 0,\ x \in (a;b)$.

Обратная теорема в общем случае неверна. Рассмотрим, например, функции $y_1 = \begin{cases} x^2, x \ge 0 \\ 0, x < 0 \end{cases}$, $y_2 = \begin{cases} 0, x \ge 0 \\ x^2, x < 0 \end{cases}$, для которых $y_1' = \begin{cases} 2x, x \ge 0 \\ 0, x < 0 \end{cases}$, $y_2' = \begin{cases} 0, x \ge 0 \\ 2x, x < 0 \end{cases}$ и их определитель Вронского $\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1 y_2' - y_2 y_1' = \begin{cases} x^2 \cdot 0 - 0 \cdot 2x, x \ge 0 \\ 0 \cdot 2x - x^2 \cdot 0, x < 0 \end{cases}$ тождественно равен 0.

Однако если $c_1 y_1 + c_2 y_2 \equiv 0$, то при любом $x > 0$ получаем $c_1 x^2 = 0$, откуда $c_1 = 0$, а при любом $x < 0$ получаем $c_2 x^2 = 0$, откуда $c_2 = 0$. Поэтому функции y_1 и y_2 линейно независимы.

Тем не менее, верна следующая важная теорема.

Теорема 6. Если $y_1,...,y_n$ являются решением уравнения (2) и в некоторой точке $x_0 \in (a;b)$ $W(x_0)=0$, то $y_1,...,y_n$ линейно зависимы на $(a;b)$ (и, следовательно, $W(x)\equiv 0,\ x\in(a;b)$).

Доказательство. Рассмотрим систему линейных уравнений относительно неизвестных $c_1,...,c_n$:

$$\begin{cases} c_1y_1(x_0)+...+c_ny_n(x_0)=0 \\ c_1y_1'(x_0)+...+c_ny_n'(x_0)=0 \\ ... \\ c_1y_1^{(n-1)}(x_0)+...+c_ny_n^{(n-1)}(x_0)=0 \end{cases} \quad (9).$$

Ее определитель равен $W(x_0)$. По условию, $W(x_0)=0$. Значит, система (9) имеет нетривиальное решение $c_1,...,c_n$. Рассмотрим функцию $y=c_1y_1+...+c_ny_n$. По теореме 1, y является решением уравнения (2). Равенства (9) можно рассматривать как условия задачи Коши,

$$\begin{cases} y(x_0)=0 \\ y'(x_0)=0 \\ ... \\ y^{(n-1)}(x_0)=0 \end{cases}$$

, которая, по теореме 1, имеет единственное решение. Вместе с тем, функция $Y\equiv 0$ также удовлетворяет уравнению (2) и условиям (10). Ввиду единственности, $y=Y=0$. Таким образом, существуют не все равные 0 постоянные $c_1,...,c_n$ такие, что $c_1y_1+...+c_ny_n\equiv 0$. Поэтому $y_1,...,y_n$ - линейно зависимы на $(a;b)$. Следовательно, по теореме 5, $W(x)\equiv 0$ на $(a;b)$.

Определение. Любые n линейно независимых решений линейного однородного дифференциального уравнения n-ного порядка называется *фундаментальной системой решений* этого уравнения.

Из предыдущих теорем сразу следует еще одна важная теорема.

Теорема 7. Решения $y_1,...,y_n$ уравнения (2) образуют фундаментальную систему решений этого уравнения тогда и только тогда, когда их определитель Вронского $W(x)$ отличен от 0 хотя бы в одной точке $x_0\in(a;b)$.

Доказательство. Равносильная переформулировка утверждения теоремы – решения $y_1,...,y_n$ линейно зависимы тогда и только тогда, когда $W(x)\equiv 0$ на $(a;b)$. Но это утверждение сразу следует из теорем 5 и 6.

Теорема 8. Для любого линейного однородного дифференциального уравнения (2) существует фундаментальная система его решений.

Доказательство. Построим такую фундаментальную систему решений. Для этого возьмем произвольную точку $x_0 \in (a;b)$ и поставим n различных задач

Коши:
$$\begin{array}{llll} L(y)=0 & L(y)=0 & \cdots & L(y)=0 \\ y(x_0)=1 & y(x_0)=0 & & y(x_0)=0 \\ y'(x_0)=0 & y'(x_0)=1 & & y'(x_0)=0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y^{(n-1)}(x_0)=0 & y^{(n-1)}(x_0)=0 & & y^{(n-2)}(x_0)=0 \\ & & & y^{(n-1)}(x_0)=1 \end{array}.$$

По теореме 1 о существовании и единственности у каждой из этих задач имеется решение, и мы обозначим y_1 - решение 1-й задачи, y_2 - решение 2-й задачи, …, y_n - решение n-ной задачи. Мы получили $y_1,...,y_n$ - решения уравнения (2). Найдем $W(x_0)$ для этих функций: $W(x_0)=\begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}=1$.

Следовательно, по теореме 7, функции $y_1,...,y_n$ образуют искомую фундаментальную систему решений уравнения (2).

<u>**Теорема 9.**</u> Пусть $y_1,...,y_n$ - фундаментальная система решений уравнения (2). Тогда для любого решения y этого уравнения существуют постоянные $c_1,...,c_n$ такие, что $y=c_1y_1+...+c_ny_n$.

Доказательство. Возьмем произвольную точку $x_0 \in (a;b)$ и рассмотрим систему уравнений относительно неизвестных $c_1,...,c_n$:

$$\begin{cases} c_1y_1(x_0)+...+c_ny_n(x_0)=y(x_0) \\ c_1y_1'(x_0)+...+c_ny_n'(x_0)=y'(x_0) \\ ... \\ c_1y_1^{(n-1)}(x_0)+...+c_ny_n^{(n-1)}(x_0)=y^{(n-1)}(x_0) \end{cases} \qquad (11).$$

Определитель этой системы $W(x_0)$ не равен 0, т.к. $y_1,...,y_n$ - фундаментальная система решений. Поэтому у нее существует (и притом единственное) решение $c_1,...,c_n$. Рассмотрим теперь функцию $c_1y_1+...+c_ny_n$. По теореме 2 она является решением уравнения (2). Ввиду равенств (11) значения этой функции и ее производных до порядка $(n-1)$ включительно в точке x_0 совпадают со значениями y и ее последовательных производных в точке x_0. По теореме 1 о <u>единственности</u> решения задачи Коши $y=c_1y_1+...+c_ny_n$, $x \in (a;b)$.

Замечание. Теоремы 8 и 9 означают, что размерность векторного пространства решений уравнения (2) равна n, а любая фундаментальная система решений представляет собой базис этого пространства.

12. Метод вариации постоянных

Вернемся к неоднородному уравнению (1). Предположим, что мы можем найти фундаментальную систему решений $y_1,...,y_n$ уравнения (2). Тогда, по теореме 9, любое решение Y этого уравнения имеет вид: $Y = c_1y_1 + ... + c_ny_n$ (12). Предположим также, что нам удалось найти некоторое решение y_0 уравнения (1). По теореме 3, любое решение y этого уравнения имеет вид: $y = y_0 + Y = y_0 + c_1y_1 + ... + c_ny_n$, согласно (12). Итак, для нахождения всех решений уравнения (1) требуется найти какое-то одно его решение y_0. Для этого можно использовать *метод вариации постоянных*, который состоит в том, что решение уравнения (1) ищется в виде $c_1(x)y_1(x) + ... + c_n(x)y_n(x)$, (13) где $y_1,...,y_n$ - фундаментальная система решений уравнения (2). Отметим, что (13) напоминает (12), но имеет существенное отличие от этого равенства состоящее в том, что в (12) все c_i - постоянные, а в (13) это – неизвестные функции от x. Потребуем, чтобы кроме равенства (13) выполнялись такие равенства:

$$\begin{cases} c_1'y_1 + ... + c_n'y_n \equiv 0 \\ c_1'y_1' + ... + c_n'y_n' \equiv 0 \\ \vdots \\ c_1'y_1^{(n-2)} + ... + c_n'y_n^{(n-2)} \equiv 0 \\ c_1'y_1^{(n-1)} + ... + c_n'y_n^{(n-1)} \equiv q(x) \end{cases} \qquad (14).$$

Из (13) и (14) следует, что $(c_1y_1 + ... + c_ny_n)' = c_1y_1' + c_1'y_1 + ... + c_ny_n' + c_n'y_n =$
$= \left(c_1y_1' + ... + c_ny_n'\right) + \left(c_1'y_1 + ... + c_n'y_n\right) = c_1y_1' + ... + c_ny_n'$;

$(c_1y_1 + ... + c_ny_n)'' = \left(c_1y_1' + ... + c_ny_n'\right)' = c_1y_1'' + ... + c_ny_n'' + \left(c_1'y_1' + ... + c_n'y_n'\right) =$

$= c_1y_1'' + ... + c_ny_n''$ и т.д., $(c_1y_1 + ... + c_ny_n)^{(n-1)} = \left(c_1y_1^{(n-2)} + ... + c_ny_n^{(n-2)}\right)' =$
$= c_1y_1^{(n-1)} + ... + c_ny_n^{(n-1)} + \left(c_1'y_1^{(n-2)} + ... + c_n'y_n^{(n-2)}\right) = c_1y_1^{(n-1)} + ... + c_ny_n^{(n-1)}$ и, наконец,

$(c_1y_1 + ... + c_ny_n)^{(n)} = \left(c_1y_1^{(n-1)} + ... + c_ny_n^{(n-1)}\right)' = c_1y_1^{(n)} + ... + c_ny_n^{(n)} +$

$+\left(c_1^{'}y_1^{(n-1)}+...+c_n^{'}y_n^{(n-1)}\right)=c_1y_1^{(n)}+...+c_ny_n^{(n)}+q(x)$. Поэтому подстановка $c_1y_1+...+c_ny_n$ в левую часть уравнения (1) дает $\left(c_1y_1^{(n)}+...+c_ny_n^{(n)}+q(x)\right)+$

$$+p_{n-1}(x)\left(c_1y_1^{(n-1)}+...+c_ny_n^{(n-1)}\right)+...+p_1(x)\left(c_1y_1^{'}+...+c_ny_n^{'}\right)+p_0(x)(c_1y_1+...+c_ny_n)=$$

$$=c_1\left(y_1^{(n)}+p_{n-1}(x)y_1^{(n-1)}+...+p_1(x)y_1^{'}+p_0(x)y_1\right)+...+c_n\left(y_n^{(n)}+p_{n-1}(x)y_n^{(n-1)}+...+\right.$$

$+\left.p_1(x)y_n^{'}+p_0(x)y_n\right)+q(x)=q(x)$, т.е. обращает уравнение в верное равенство. Поэтому y, определяемое равенством (13) и системой условий (14) является решением уравнения (1). По теореме 1 это решение – единственное.

Для того, чтобы отыскать $c_1,...,c_n$ следует воспользоваться системой (14), рассматривая ее как систему линейных уравнений относительно неизвестных $c_1^{'},...,c_n^{'}$ с определителем $W(x)\neq 0$. Решая систему, находим $c_1^{'},...,c_n^{'}$ а затем, интегрированием, находим $c_1,...,c_n$.

13. *Линейные однородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами*

Для уравнений $L(y)=0$ (1),

у которых $L(y)=y^{(n)}+a_{n-1}y^{(n-1)}+...+a_1y'+a_0y$ (2),

где $a_{n-1},...,a_0$ - постоянные величины, существует способ, с помощью которого задачу нахождения фундаментальной системы решений можно свести к задаче нахождения корней некоторого вспомогательного алгебраического уравнения.

Для этого будем искать решения уравнения $L(y)=0$ в виде $y=e^{\lambda x}$. При этом $y'=\lambda e^{\lambda x}, y''=\lambda^2e^{\lambda x},...,y^{(n-1)}=\lambda^{n-1}e^{\lambda x}, y^{(n)}=\lambda^n e^{\lambda x}$ (3).

Подставим полученные величины в уравнение (1): $\lambda^n e^{\lambda x}+a_{n-1}\lambda^{n-1}e^{\lambda x}+...+$ $+a_1\lambda e^{\lambda x}+a_0e^{\lambda x}=0$, или $e^{\lambda x}\left(\lambda^n+a_{n-1}\lambda^{n-1}+...+a_1\lambda+a_0\right)=0$. Поскольку $e^{\lambda x}\neq 0$ при всех x, из этого уравнения следует, что $\lambda^n+a_{n-1}\lambda^{n-1}+...+a_1\lambda+a_0=0$ (4).

Таким образом, функция $y=e^{\lambda x}$ удовлетворяет уравнению (1) тогда и только тогда, когда λ удовлетворяет уравнению (4). Уравнение (4) называется *характеристическим уравнением* уравнения (1).

Далее мы установим вид фундаментальной системы решений уравнения (1) в зависимости от свойств корней уравнения (4).

Случай 1. Пусть все корни уравнения (4) действительные и различные. Обозначим их $\lambda_1,...,\lambda_n$ и рассмотрим функции $y_1=e^{\lambda_1 x},...,y_n=e^{\lambda_n x}$, являющиеся решениями уравнения (1) по доказанному выше. Докажем линейную независимость. Это будет означать, что $y_1,...,y_n$ - фундаментальная система решений (1). Определитель Вронского этой системы функций равен, с учетом (2)

$$W(x)=\begin{vmatrix} y_1 & \dots & y_n \\ y_1' & \dots & y_n' \\ \dots & & \\ y_1^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} e^{\lambda_1 x} & \dots & e^{\lambda_n x} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 x} & \dots & \lambda_n e^{\lambda_n x} \\ \dots & & \\ \lambda_1^{n-1} e^{\lambda_1 x} & \dots & \lambda_n^{(n-1)} e^{\lambda_n x} \end{vmatrix}$$ или, после вынесения из столбцов

множителей $e^{\lambda_1 x},...,e^{\lambda_n x}$ $W(x)=e^{\lambda_1 x}\cdot...\cdot e^{\lambda_n x}\begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \dots & \lambda_n \\ \dots & & \\ \lambda_1^{n-1} & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix}$. Определитель $\begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \dots & \lambda_n \\ \dots & & \\ \lambda_1^{n-1} & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix}$

представляет собой известный определитель Вандермонда. Он равен $\prod\limits_{1\le k<i\le n}(\lambda_i-\lambda_k)$. Поэтому если все числа λ_i,λ_k попарно различны, этот определитель не равен 0. Следовательно, как доказано выше (теорема 7 предыдущего параграфа), функции $y_1=e^{\lambda_1 x},...,y_n=e^{\lambda_n x}$ линейно независимы и составляют искомую фундаментальную систему решений.

2 случай. Все корни $\lambda_1,...,\lambda_n$ - различные, но среди них есть комплексные числа. Формально $e^{\lambda_1 x},...,e^{\lambda_n x}$ - это снова фундаментальная система решений уравнения, т.к. эти функции линейно независимы (их определитель Вронского, как и в случае 1, отличен от 0). Однако мы рассматриваем уравнение с действительными коэффициентами и нам было бы желательно построить фундаментальную систему решений, состоящую из действительных функций. Для этого мы сначала установим следующую важную лемму.

Лемма. Пусть $L(y)=0$ - линейное однородное дифференциальное уравнение (1) такое, что все постоянные $a_0,...,a_{n-1}$ - действительные числа. Пусть комплексная функция $u(x)+iv(x)$ удовлетворяет этому уравнению. Тогда ему удовлетворяют и функции $u(x),v(x)$.

Доказательство. Равенство $L(u+iv)=0$ означает:
$u^{(n)}+iv^{(n)}+a_{n-1}\left(u^{(n-1)}+iv^{(n-1)}\right)+...+a_1(u'+iv')+a_0(u+iv)=0$, откуда
$u^{(n)}+a_{n-1}u^{(n-1)}+...+a_1u'+a_0u+i\left(v^{(n)}+a_{n-1}v^{(n-1)}+...+a_1v'+a_0v\right)=0$, или
$L(u)+iL(v)=0$. Комплексная величина $L(u)+iL(v)$ равна 0 тогда и только тогда, когда ее действительная часть $L(u)$ и мнимая часть $iL(v)$ равны 0, откуда $L(u)=0, L(v)=0$, т.е. u и v - решения уравнения (1), что и требовалость доказать.

Пусть теперь $\lambda=\alpha+\beta i$ - любой комплексный корень уравнения (4). Поскольку (4) имеет действительные коэффициенты, число $\bar{\lambda}=\alpha-\beta i$ также является его корнем. Значит, $e^{\bar{\lambda}x}$ - тоже решение уравнения (1).

Далее, $e^{\lambda x} = e^{(\alpha+\beta i)x} = e^{\alpha x+i\beta x} = e^{\alpha x}\cdot e^{i\beta x} = e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x) = e^{\alpha x}\cos\beta x +$ $+ ie^{\alpha x}\sin\beta x$. По лемме, $e^{\alpha x}\cos\beta x$ и $e^{\alpha x}\sin\beta x$ также являются решениями уравнения (1). Легко видеть, $e^{\bar\lambda x} = e^{\alpha x}\cos\beta x - ie^{\alpha x}\sin\beta x$, т.е. $e^{\lambda x}, e^{\bar\lambda x}$ являются линейными комбинациями $e^{\alpha x}\cos\beta x$ и $e^{\alpha x}\sin\beta x$. Разумеется, $e^{\alpha x}\cos\beta x$ и $e^{\alpha x}\sin\beta x$ также можно линейно выразить через $e^{\lambda x}$ и $e^{\bar\lambda x}$. Поэтому линейная независимость решений $e^{\lambda x}$ и $e^{\bar\lambda x}$ с остальными решениями уравнения (1) равносильна линейной независимости $e^{\alpha x}\cos\beta x$ и $e^{\alpha x}\sin\beta x$ с остальными решениями.

Подведем итоги. В случае, когда все $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ - различные, причем $\lambda_1,\dots,\lambda_r$ - действительные, а $\lambda_{r+1},\bar\lambda_{r+1},\lambda_{r+2},\bar\lambda_{r+2},\dots,\lambda_{r+s},\bar\lambda_{r+s}$ - пара комплексно сопряженных чисел ($r+2s=n$), причем $\lambda_{r+k}=\alpha_k+i\beta_k,\ k=1,\dots,s$, то фундаментальная система решений уравнения (1) имеет вид: $e^{\lambda_1 x},\dots,e^{\lambda_r x}, e^{\alpha_1 x}\cos\beta_1 x, e^{\alpha_1 x}\sin\beta_1 x,\dots,$ $e^{\alpha_s x}\cos\beta_s x, e^{\alpha_s x}\sin\beta_s x$.

Случай 3. Корни характеристического уравнения действительные, но среди них есть кратные. Напомним, что число λ называется *корнем многочлена* $P(x)$ *кратности* k, если $P(x)=(x-\lambda)^k P_1(x)$, где $P_1(x)$ - многочлен, причем $P_1(\lambda)\neq 0$.

Пусть корни $\lambda_1,\dots,\lambda_t$ имеют, соответственно, кратности $k_1,\dots,k_t$. Тогда можно доказать (но мы оставим это без доказательства), что функции

$e^{\lambda_1 x}, xe^{\lambda_1 x},\dots,x^{k_1-1}e^{\lambda_1 x},$

$e^{\lambda_2 x}, xe^{\lambda_2 x},\dots,x^{k_2-1}e^{\lambda_2 x},$

...

$e^{\lambda_t x}, xe^{\lambda_t x},\dots,x^{k_t-1}e^{\lambda_t x}$

составляют фундаментальную систему решений уравнения (1).

Пример. Приведем пример, подтверждающий это утверждение. Уравнению $y''-2y'+y=0$ соответствует характеристическое уравнение $\lambda^2-2\lambda+1=0$, $(\lambda-1)^2=0$. Оно имеет корень $\lambda=1$ с кратностью 2. Рассмотрим функции e^x и xe^x. $(e^x)'=e^x$, $(e^x)''=e^x$ и подставляя e^x в исходное уравнение, получаем $e^x-2e^x+e^x=0$, т.е. верное равенство. Далее, $(xe^x)'=e^x+xe^x, (xe^x)''=2e^x+xe^x$ и подстановка функции xe^x в уравнение дает верное равенство: $2e^x+xe^x-2e^x-2xe^x+xe^x=0$. Итак, e^x и xe^x - действительно решения уравнения $y''-2y'+y=0$. Эти функции линейно независимы, т.к. из равенства $c_1e^x+c_2xe^x\equiv 0$ при $x=0$ следует $c_1e^0=0, c_1=0$. Значит, $c_2xe^x\equiv 0$. Тогда при $x=1$ $c_2e=0, c_2=0$.

В **случае 4**, когда действительные корни $\lambda_1,\dots,\lambda_r$ уравнения (4) имеют кратности $k_1,\dots,k_r$, а комплексные корни $\lambda_{r+1},\bar\lambda_{r+1},\lambda_{r+2},\bar\lambda_{r+2},\dots,\lambda_{r+s},\bar\lambda_{r+s}$ имеют кратности $l_1,\dots,l_s$ можно доказать, что функции

$e^{\lambda_1 x}, xe^{\lambda_1 x}, ..., x^{k_1 - 1} e^{\lambda_1 x},$

$...$

$e^{\lambda_r x}, xe^{\lambda_r x}, ..., x^{k_r - 1} e^{\lambda_r x},$

$e^{\alpha_1 x} \cos \beta_1 x, xe^{\alpha_1 x} \cos \beta_1 x, ..., x^{l_1 - 1} e^{\alpha_1 x} \cos \beta_1 x,$

$e^{\alpha_1 x} \sin \beta_1 x, xe^{\alpha_1 x} \sin \beta_1 x, ..., x^{l_1 - 1} e^{\alpha_1 x} \sin \beta_1 x,$

$...$

$e^{\alpha_s x} \cos \beta_s x, xe^{\alpha_s x} \cos \beta_s x, ..., x^{l_s - 1} e^{\alpha_s x} \cos \beta_s x,$

$e^{\alpha_s x} \sin \beta_s x, xe^{\alpha_s x} \sin \beta_s x, ..., x^{l_s - 1} e^{\alpha_s x} \sin \beta_s x,$

образуют фундаментальную систему решений уравнения (1).

Осталось напомнить, что согласно теореме 9 предыдущего параграфа, произвольное решение уравнения (1) имеет вид: $y = c_1 f_1 + ... + c_n f_n$, где в качестве $f_1, ..., f_n$ можно в каждом из рассмотренных случаев выбрать построенные элементы фундаментальной системы решений.

14. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами

Согласно общей теории линейных дифференциальных уравнений, для решения уравнения $L(y) = q(x)$ (1)

достаточно знать фундаментальную систему решений $y_1, ..., y_n$ однородного уравнения $L(y) = 0$ (2)

и найти хотя бы одно решение $y_0(x)$ неоднородного уравнения. Тогда любое решение y неоднородного уравнения имеет вид: $y = y_0 + c_1 y_1 + ... + c_n y_n$, где $c_1, ..., c_n$ - произвольные постоянные.

В случае уравнения с постоянными коэффициентами мы в предыдущем параграфе указали способы нахождения его фундаментальной системы решений. Используя метод вариации постоянных, можно теперь найти решение и неоднородного уравнения. Однако есть важные частные случаи, когда решение неоднородного уравнения можно отыскать значительно проще.

Пусть $L(y) = \sum_{r=1}^{k} P_r(x) e^{\gamma_r x}$ (3),

где $P_r(x)$ - многочлены, γ_r - действительные числа. Согласно принципу суперпозиции (теорема **4**), достаточно уметь решать уравнение вида

$L(y) = P(x) e^{\gamma x}$ (4).

Тогда, решив каждое из уравнений $L(y) = P_r(x) e^{\gamma_r x}$ и просуммировав полученные решения, мы получим решение исходного уравнения (3).

Решения уравнения (4) имеют различный вид в зависимости от того, является или нет число γ корнем характеристического уравнения для однородного уравнения (2).

В первом случае γ не является корнем характеристического уравнения. Тогда решение уравнения (4) можно искать в виде $Q(x)e^{\gamma x}$, где $Q(x)$ - многочлен той же степени, что и многочлен $P(x)$.

Во втором случае, если γ является корнем характеристического уравнения (2) кратности r, решение уравнения (4) следует искать в виде $x^r Q(x)e^{\gamma x}$, где $Q(x)$ - многочлен той же степени, что и $P(x)$.

Эти два случая можно объединить в один, если считать, что γ, не являющееся корнем характеристического уравнения, имеет нулевую кратность. Тогда решение уравнения (4) следует искать в виде $x^r Q(x)e^{\gamma x}$, $r \geq 0$, где r - кратность γ в характеристическом уравнении.

Если в правую часть $q(x)$ уравнения (1) входят слагаемые вида

$$P_1(x)e^{\alpha x}\cos\beta x + P_2(x)e^{\alpha x}\sin\beta x \qquad (5),$$

где $P_1(x)$, $P_2(x)$ - многочлены, то можно искать решение уравнений

$$L(y) = P_1(x)e^{\alpha a}\cos\beta x + P_2(x)e^{\alpha x}\sin\beta x \qquad (6)$$

в виде $x^r\left(Q_1(x)e^{\alpha x}\cos\beta x + Q_2(x)e^{\alpha x}\sin\beta x\right)$, где r - кратность корня $\alpha + \beta i$ в характеристическом многочлене однородного уравнения ($r = 0$, если $\alpha + \beta i$ - не корень характеристического уравнения), а степень каждого из многочленов $Q_1(x)$, $Q_2(x)$ равна наивысшей из степеней многочленов $P_1(x)$, $P_2(x)$.

Когда слагаемых вида (5) несколько, то мы решаем соответствующие им уравнения (6) и применяем затем принцип суперпозиции.

Рассмотрим важный пример.

Пример. Уравнение упругих колебаний без сопротивления при наличии возмущающей периодической силы: $\frac{d^2x}{dt^2} + a^2x = p\sin\omega t$, a, p, ω - постоянные.

Корни характеристического уравнения $\lambda^2 + a^2 = 0$ равны $\pm ai$. Поэтому фундаментальная система решений однородного уравнения $\frac{d^2x}{dt^2} + a^2x = 0$ состоит из функций $\cos at$ и $\sin at$.

Если $\omega \neq \pm a$, то решение исходного уравнения ищем в виде $x = \alpha\cos\omega t + \beta\sin\omega t$. Подставляем его в уравнение: $\frac{dx}{dt} = -\alpha\omega\sin\omega t + \beta\omega\cos\omega t$,

$\frac{d^2x}{dt^2} = -\alpha\omega^2\cos\omega t - \beta\omega^2\sin\omega t$, откуда $-\alpha\omega^2\cos\omega t - \beta\omega^2\sin\omega t + a^2\alpha\cos\omega t +$ $+ a^2\beta\sin\omega t = p\sin\omega t$, или $\left(a^2 - \omega^2\right)\alpha\cos\omega t + \left(a^2 - \omega^2\right)\beta\sin\omega t = p\sin\omega t$, откуда $\alpha = 0, \beta = \frac{p}{a^2 - \omega^2}$. Тем самым, общее решение уравнения имеет вид

$c_1 \cos at + c_2 \sin at + \frac{p}{a^2 - \omega^2} \sin \omega t = A \sin(at + \delta) + \frac{p}{a^2 - \omega^2} \sin \omega t$. Здесь A - амплитуда свободных колебаний, a - частота свободных колебаний, $\frac{p}{a^2 - \omega^2}$ - амплитуда вынужденных колебаний с частотой ω. Чем ближе величина ω^2 к a^2, тем больше амплитуда вынужденных колебаний.

Если же $\omega = \pm a$, то решение, согласно указанным выше правилам, следует искать в виде $x = t(\alpha \cos at + \beta \sin at)$. Тогда $\frac{d^2 x}{dt^2} = -a^2 t(\alpha \cos at + \beta \sin at) - 2\alpha a \sin at + 2\beta a \cos at$. Подставим в уравнение: $-a^2 t(\alpha \cos at + \beta \sin at) - 2\alpha a \sin at + 2\beta a \cos at + a^2 t(\alpha \cos at + \beta \sin at) = p \sin at$, или $\beta = 0, \alpha = -\frac{p}{2a}$. Итак, общее решение уравнения имеет вид: $x = A \sin(at + \delta) - \frac{p}{2a} t \cos at$. При $t \to \infty$ амплитуда колебаний возрастает неограниченно. Это – явление резонанса.

Заключительные замечания. Методы, подобные приведенным выше, можно применить и в случае, когда уравнение имеет вид $L(y) = v(x)$, где $v(x)$ - периодическая функция с периодом, например, равным 2π.

Разлагаем функцию $v(x)$ в ряд Фурье: $v(x) \approx \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ и ищем частное решение уравнения $y(x)$ в виде: $y = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos nx + B_n \sin nx)$. После подстановки этого решения в левую часть уравнения остается приравнять коэффициенты при $\cos nx, \sin nx$.

Отметим еще один важный способ отыскания частного решения линейного дифференциального уравнения, не обязательно с постоянными коэффициентами. Рассмотрим пример уравнения $xy'' + y' + xy = 0$ (это – простейший пример уравнения Бесселя, часто встречающегося в приложениях математической физики). Будем искать его решение в виде ряда $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Считаем, что ряд всюду сходится и находим его производные: $y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$, $y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$.

Поэтому $xy'' + y' + xy = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1} = a_1 + \sum_{m=2}^{\infty} x^{m-1}(a_{m-2} + m a_m + m(m-1) a_m) = a_1 + \sum_{m=2}^{\infty} (a_{m-2} + m^2 a_m) x^{m-1} = 0$. Следовательно, ввиду единственности разложения функции в степенной ряд, $a_1 = 0,\ m^2 a_m + a_{m-2} = 0,\ m = 2,3,\ldots$, откуда, прежде всего, $a_{2k-1} = 0,\ k = 1,2,\ldots$ и $a_{2k} = -\frac{1}{4k^2} a_{2k-2}$, откуда $a_{2k} = (-1)^k \frac{1}{(k!)^2 2^{2k}} a_0$. Поэтому, с точностью до произвольного множителя получаем ряд $\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m \frac{x^{2m}}{(m!)^2 2^{2m}} = I_0(x)$ ($I_0(x)$ - стандартное обозначение для бесселевой функции с параметром 0).

<u>Пример.</u> Рассмотрим пример системы дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = k_1(a-x) & (1) \\ \frac{dy}{dt} = k_2(x-y) & (2) \end{cases}$$

Эта система описывает две последовательные односторонние химические реакции $A \xrightarrow[k_1]{} B \xrightarrow[k_2]{} C$ при обозначениях: t - время, k_1, k_2 - постоянные, a - начальная концентрация вещества A при $t=0$, $a-x, x-y, y$ - концентрации веществ, соответственно A, B, C в момент времени t. Начальные концентрации B и C при $t=0$ равны 0.

Решим эту систему. По условию задачи, $a-x>0, y>0, x-y>0, a>0$. Из первого дифференциального уравнения (1) $\int \frac{dx}{a-x} = k_1 \int dt$ и $a-x = ae^{-k_1 t}$ (т.к. $x=0$ при $t=0$). Подставим во второе уравнение (2) $x = a - ae^{-k_1 t}$ и получим уравнение $\frac{dy}{dt} + k_2 y = k_2 a\left(1-e^{-k_1 t}\right)$ (3).

Общее решение однородного уравнения $\frac{dy}{dt} + k_2 y = 0$ имеет вид $y = Ce^{-k_2 t}$.

Используем метод вариации постоянных: ищем решение (3) в виде: $y = C(t)e^{-k_2 t}$.

Тогда подстановка в (3) дает: $\frac{dC}{dt} = k_2 a e^{k_2 t} - k_2 a e^{k_2 t - k_1 t}$, откуда

$C(t) = ae^{k_2 t} - \frac{k_2 a}{k_2 - k_1} e^{k_2 t - k_1 t} + C_1$. Тогда $y = a - \frac{k_2 a}{k_2 - k_1} e^{-k_1 t} + C_1 e^{-k_2 t}$. Начальные условия дают: $C_1 = \frac{k_1 a}{k_2 - k_1}$, откуда:

$$y = a\left(1 - \frac{k_2}{k_2 - k_1} e^{-k_1 t} + \frac{k_1}{k_2 - k_1} e^{-k_2 t}\right)$$

$$x - y = a\frac{k_1}{k_2 - k_1}\left(e^{-k_1 t} - e^{-k_2 t}\right)$$

$$a - x = ae^{-k_1 t}$$