МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им. М.В. ЛОМОНОСОВА
ХИМИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

ПОСОБИЕ ДЛЯ ПОДГОТОВКИ К ЭКЗАМЕНУ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ ДЛЯ СТУДЕНТОВ ОБЩЕГО ПОТОКА ПЕРВЫЙ СЕМЕСТР

ЛЕКТОР – ПРОФ. ЧИРСКИЙ В.Г.

МОСКВА -2008

Уважаемый читатель!

Это пособие написано на основе тех лекций, которые я прочитал в первом семестре 2008 года студентам первого курса. Цель его написания – облегчить процесс подготовки к экзамену, оно поможет привести в систему Ваши знания. Поэтому в пособие включён не весь лекционный материал, а лишь та его часть, которая вошла в экзаменационные билеты и, следовательно, оно не является полной заменой Вашему собственному конспекту.

Обращу Ваше внимание на то, что предыдущие версии якобы «конспекта моих лекций» содержат вопиющие ошибки. Таких «лекций» я не читал. «Конспектов» тем более не писал. Те, кто рискнут по ним готовиться к экзамену – смелые, но безответственные люди.

Конечно, этот текст тоже может содержать опечатки. Я буду благодарен всем, кто отметит их, или выскажет другие замечания.

В заключение выражаю искреннюю благодарность Вашим коллегам, студентам 1 курса 2006г О. Степановой, П. Рудаковской, Е. Гаранину, А. Климову,
В. Пичужкину, А. Плеханову, которые помогли в подготовке этого пособия.

Также выражаю благодарность старосте первого курса 2008г. Каменеву Е.И. и студентам первого курса 2008г. Денисову С.С. и Яско И.С. за редакцию и внесение изменений в работу предшественников.

С наилучшими пожеланиями

Ваш лектор В.Г. Чирский

Билет 1. Множества и операции над ними

1.1. Понятие множества

Понятия множества и его элемента относятся к числу первичных, неопределяемых понятий математики. К таким же понятиям относятся точка, прямая линия и др. Вместо определения такого понятия приходится обходиться его описанием. Создатель теории множеств Георг Кантор в 1872 году описал понятие множества, как «объединения в одно целое объектов, хорошо различаемых нашей интуицией или нашей мыслью».

Мы будем говорить, что определено некоторое множество M объектов, если указан признак, который позволяет относительно каждого предмета x сказать, принадлежит ли этот предмет множеству M, или нет.

Элементы множеств в дальнейшем будем записывать строчными латинскими буквами, сами множества – прописными. Обозначение $a \in A$ используется, как краткая запись утверждения: a есть элемент множества A, или: a принадлежит A. Аналогично, обозначение $a \notin A$ используется, как краткая запись утверждения: a не является элементом множества A, или: a не принадлежит A. Множество, не имеющее элементов, называется пустым и обозначается $\varnothing$.

Укажем ряд способов задания множеств. Во-первых, можно просто перечислить все элементы множества, если этих элементов – конечное число, т.е. если множество конечное. Например, множество, состоящее из двух чисел, 0 и 1. В этом случае используется обозначение $\{0,1\}$. Для произвольного конечного множества, например, состоящего из различных элементов $\{a_1,\dots a_m\}$, используется обозначение $\{a_1,\dots a_m\}$,. Подчеркнём, что в этом обозначении множества элементы $a_1,\dots a_m$, должны быть различными, однако они могут быть перечислены в произвольном порядке, например, $\{1,2,3,4\}$ и $\{2,1,4,3\}$ - различные обозначения одного и того же множества.

Можно также указать свойство, которому удовлетворяют элементы рассматриваемого множества. Например, множество действительных чисел, больших 5. Обозначим его $\{x|x > 5\}$.

Некоторые множества определяются с помощью указания способа последовательного построения его элементов. Например,
$x_1=1$, $x_n=nx_{n-1}$, $n=2,3,\ldots$

Новые множества можно получать и в результате операций над заданными множествами.

Наиболее часто у нас будут рассматриваться множество R действительных чисел, множество N натуральных чисел, множество Z целых чисел, множество Q рациональных чисел.

1.2. Подмножества

Важный способ задания множества – выделение его, как части некоторого ***основного*** множества. Основное множество образуется всеми элементами какого-нибудь определённого типа. Например, множество целых чисел, множество простых чисел и т.п.

В качестве примера рассмотрим основное множество целых чисел и выберем в нём те числа, которые делятся на 2, т.е. чётные числа. Мы получили множество чётных чисел, которое является подмножеством основного множества целых чисел.

В общем случае, если все элементы множества A являются также элементами множества B, то мы говорим, что A есть *подмножество* B, или A включено в B, и обозначаем это так: $A \subset B$.

Если оказалось, что одновременно $A \subset B$ и $B \subset A$, то эти множества называются ***равными***, что обозначается $A = B$. Проще говоря, равные множества состоят из одних и тех же элементов.

Из того, что $A \subset B$ и $B \subset C$ следует, что $B \subset C$ (т.е. отношение включения множеств является ***транзитивным***. Понятие отношения и его свойства будут подробнее описаны в билете 2).

1.3. Операции над множествами

Пусть задано некоторое основное множество M и его подмножества A и B.

Определение 1.1. Объединение $A \cup B$ этих множеств определяется, как подмножество множества M, состоящее из элементов, входящих хотя бы в одно из множеств A и B.

Определение 1.2. Пересечение $A \cap B$ этих множеств определяется, как подмножество множества M, состоящее из элементов, одновременно входящих как в множество A, так и в множество B.

Определение 1.3. Дополнение ${}^{C}A$ множества A определяется, как подмножество множества M, не содержащее элементов множества A.

Перечислим некоторые свойства операций над множествами.

$$A \cup B = B \cup A,\ A \cap B = B \cap A,$$
$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C), (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C),$$
$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C), A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C),$$
$${}^{C}(A \cup B) = {}^{C}A \cap {}^{C}B, {}^{C}(A \cap B) = {}^{C}A \cup {}^{C}B,$$
$$A \cup A = A, A \cap A = A, A \cup M = M, A \cap M = A,$$
$$A \cup \varnothing = A, A \cap \varnothing = \varnothing,\ {}^{C}\varnothing = M,\ {}^{C}M = \varnothing,\ {}^{C}({}^{C}A) = A,$$
$$.A \cup {}^{C}A = M, A \cap {}^{C}A = \varnothing, .$$

В качестве примера докажем свойство ${}^{C}(A \cup B) = {}^{C}A \cap {}^{C}B$. Для этого заметим, что условие $x \in {}^{C}(A \cup B)$ равносильно тому, что $x \notin A \cup B$. Это, в свою очередь, равносильно тому, что $x \notin A$ и $x \notin B$, т.е. $x \in {}^{C}A \cap {}^{C}B$. Свойство доказано.

Это утверждение, вместе с утверждением ${}^{C}(A \cap B) = {}^{C}A \cup {}^{C}B$, называют ***теоремами де Моргана***. Доказательства остальных свойств ещё проще и мы их опускаем.

Билет 2. Декартово произведение множеств. Бинарные отношения.

2.1. Декартово произведение множеств

Определение 2.1. Пусть даны два множества , A и B . Образуем множество упорядоченных пар элементов, у которых первый элемент принадлежит A , а второй - B . Полученное множество называется декартовым произведением множеств A и B и обозначается $A \times B$.

Перечислим некоторые простейшие свойства декартова произведения.

- Если $A \subset C, B \subset D$, то $(A \times B) \subset (C \times D)$;
- $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$.

Отметим, что $A \times B = B \times A$ тогда и только тогда, когда $A = B$.

2.2. Бинарные отношения

Определение 2.2. Любое подмножество R множества $A \times B$ называется бинарным отношением**.**

Изучим понятие бинарного отношения более подробно, так как оно является важным не только для математического анализа, но и для компьютерной математики.

Задавать бинарные соотношения конечных множеств можно, например, с помощью таблиц. Например, пусть $A = \{1,2,3\}, B = \{1,2,3,4,5,6\}$. Зададим отношение $R \subset A \times B$ свойством: пара $(x, y), x \in A, y \in B$ принадлежит отношению R тогда и только тогда, когда x есть делитель y . Отношение R , таким образом, состоит из пар: $(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),(2,2),(2,4),(2,6),(3,6)$. Изобразим это отношение следующим образом. Проведём три прямые, соответствующие трём элементам множества A . Проведём шесть перпендикулярных им прямых, соответствующих элементам множества B . Отметим жирной точкой те точки пересечения этих прямых, которые соответствуют отношению R .(рис.1)

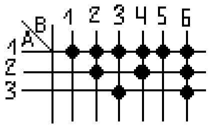


Рис.1

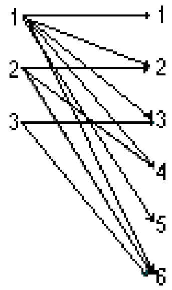


Рис.2

$$\begin{pmatrix} 111111 \\ 010101 \\ 001001 \end{pmatrix}$$

Рис.3

Другой способ задания бинарного отношения – использование стрелок. Элементы A и B изображаются в виде точек плоскости. Стрелками соединены те, и только те элементы $x \in A, y \in B$, для которых $(x, y) \in R$.(рис.2)

Это же бинарное отношение можно задать матрицей, состоящей из 0 и 1. Её строки соответствуют элементам множества A, столбцы – элементам множества B. Элемент этой матрицы равен 1 тогда и только тогда, когда он стоит на пересечении строки и столбца, соответствующих паре $x \in A, y \in B$, для которой $(x, y) \in R$.

<u>Определение 2.3</u>. Элемент a называется проекцией элемента $\underline{a} = (a,b) \in A \times B$ на множество A. Для произвольного подмножества $E \subset A \times B$ его проекцией на A называется множество, состоящее из проекций на A всех элементов множества E.

<u>Определение 2.4</u>. Сечением $x = a$ множества E называется множество $E(a)$ элементов $y \in B$, для которых $(a, y) \in E$. Множество сечений отношения E называется фактормножеством B по отношению E и обозначается $B|E$.

Так как отношения представляют собой множества, к ним можно применить операции, определённые в предыдущем параграфе. Но кроме этих операций есть ещё важные операции композиции и симметризации.

Пусть даны множества A, B, C и отношения $E \subset A \times B, G \subset B \times C$.

<u>Определение 2.5</u>. Композиция отношений E,G - это отношение GE между элементами множеств A и C такое, что для всех $x \in A$ сечение множества GE по x совпадает с сечением множества G по подмножеству $E(x) \subset B$, т.е. $(GE)(x) = G(E(x))$.

Если даны две пары отношений $E \subset A \times B$, $D \subset A \times B$ и $G \subset B \times C, F \subset B \times C$, причём $E \subset D$ и $G \subset F$, то операция композиции обладает следующим свойством: $EG \subset DF$.

<u>Определение 2.6</u>. Отношение, симметричное к некоторому отношению $E \subset A \times B$ и обозначаемое E^{-1}, представляет собой подмножество множества $B \times A$, образованное теми парами $(y,x) \in B \times A$, для которых $(x,y) \in E$. Если $E \subset A \times B$ и $G \subset B \times C$, то $(EG)^{-1} = G^{-1}E^{-1}$.

Предположим, что задано некоторое основное множество M. Отношение $E \subset M \times M$ называется отношением эквивалентности, если оно обладает такими свойствами:

1. Рефлексивностью: всякий элемент a эквивалентен самому себе. Иными словами, для любого $a \in M$ пара $(a,a) \in E$.

2. Симметричностью: для любых двух элементов $a,b \in M$ из того, что a эквивалентен b следует, что b эквивалентен a. Другими словами, если $(a,b) \in E$, то $(b,a) \in E$. Это означает, что отношение E совпадает со своим обратным, E^{-1}.

3. Транзитивностью: если a эквивалентен b, а b эквивалентен c, то a эквивалентен c. Иначе говоря, если $(a,b) \in E$ и $(b,c) \in E$, то $(a,c) \in E$.

Очень часто отношение эквивалентности элементов $a,b \in M$ обозначается так: $a \sim b$.

Важным понятием является понятие класса эквивалентности. ***Класс эквивалентности элемента*** $a \in M$ состоит из всех элементов $b \in M$, эквивалентных элементу a. Для неэквивалентных элементов их классы эквивалентности не пересекаются. Множество классов эквивалентности называется ***фактормножеством*** множества M по отношению E и обозначается M / E. Если взять ровно по одному элементу из каждого класса эквивалентности, получим *систему представителей*.

В качестве примера рассмотрим множество Z целых чисел. Зафиксируем произвольное целое число $m \neq 0$ и назовём два целых числа a, b ***сравнимыми по модулю*** m (что обозначается $a \equiv b (\mathrm{mod}\, m)$), если разность $a - b$ делится на m. Легко видеть, определённое таким образом отношение обладает всеми свойствами отношения эквивалентности. Классы эквивалентности называются классами вычетов по модулю m, в качестве системы представителей можно взять всевозможные остатки от деления на m, т.е. числа $0, 1, \ldots, m - 1$. Это множество обозначается Z_m. На нём можно определить операции сложения и умножения естественным образом. Имеется в виду, что следует просуммировать вычеты, как обычные целые числа, разделить сумму на m с остатком и этот остаток назвать суммой вычетов. Аналогично определим произведение вычетов.

Билет 3. Отображения и их свойства.

Определение 3.1. Назовём бинарное отношение $E \subset A \times B$ функциональным, если для каждого $x \in A$ сечение $E(x)$ содержит не более одного элемента.

Определение 3.2. Если отношение E^{-1}, симметричное к отношению $E \subset A \times B$, также является функциональным, то отношение E называется взаимно однозначным.

Определение 3.3. Если для каждого $x \in A$ сечение $E(x)$ содержит ровно один элемент, то функциональное отношение всюду определено.

С функциональным отношением непосредственно связано понятие отображения.

Определение 3.4. Отображение, обозначим его f, сопоставляет каждому элементу, называемому аргументом отображения, для которого сечение $E(x)$ - непустое множество, единственный элемент $f(x)$ подмножества $E(x)$ множества B. Этот элемент $f(x)$ называется образом элемента $x \in A$ при отображении f.

Множество тех элементов $x \in A$, для которых существует $f(x)$, называется областью определения отображения f.

Определение 3.5. Если отображение f определено на всём множестве A, то говорят, что задано отображение A *в* B.

Определение 3.6. Множество образов элементов $x \in A$ при отображении f называется образом отображения. Если $C \subset A$, то образ $f(C)$ определяется, как множество образов элементов $f(x), x \in C$.

Определение 3.7. Если образ совпадает со всем множеством B, то говорят, что задано отображение A на B, или что f - сюръективное отображение, или сюръекция. (При этом требование всюду определённости не является обязательным).

Определение 3.8. Если $D \subset B$, то $f^{-1}(D)$ обозначает прообраз множества $D \subset B$, т.е. множество тех элементов $x \in A$, для которых $f(x) \in D$.

Отметим очевидные свойства образа и прообраза:

$$f(f^{-1}(D)) = D, f^{-1}(f(C)) \supset C.$$

Определение 3.9. Если отношение E является взаимно однозначным, то отображение, соответствующее E^{-1}, называется обратным к f и обозначается f^{-1}. Если при этом отношение E всюду определено, то f называется инъективным отображением, или инъекцией. Если, кроме того, отображение ещё и сюръективно, то оно называется биективным или биекцией.

Отметим, что выше мы использовали обозначение прообраза $f^{-1}(D)$ и в случаях, когда обратное к f отображение f^{-1} не существует. Если же обратное отображение существует, то прообраз $f^{-1}(D)$ можно рассматривать, как образ множества D при отображении f^{-1}.

Наиболее часто встречающимся функциональным отношением является обычная функция $y = f(x)$, определённая на некотором подмножестве X числовой прямой, значения которой образуют множество Y. Действительно, эту функциональную зависимость можно трактовать, как задание подмножества в множестве $X \times Y$, в которое входят те пары (x, y), для которых выполнено равенство $y = f(x)$. Изображение этого множества пар на плоскости носит название графика функции.

Билет 4. Множество действительных чисел. Аксиома отделимости.

Предварительные сведения о натуральных, целых, рациональных числах. На экзамене содержание пунктов 4.1, 4.2, 4.3 следует знать, но можно не рассказывать. (Содержание пункта 1´ можно и не знать, сведения об аксиоматике Пеано приведены исключительно для общего развития.)

4.1. Натуральные числа

Натуральное число можно также отнести к тем понятиям, которые интуитивно ясны каждому человеку и, разумеется, свойства этих чисел известны из курса средней школы. В этом параграфе мы напомним эти свойства

Сложение натуральных чисел обладает следующими свойствами:

1. $a+(b+c)=(a+b)+c$ (ассоциативность, или сочетательный закон).
2. $a+b=b+a$ (коммутативность, или переместительный закон).

Для натуральных чисел a,b естественно вводится отношение порядка меньше или равно, обозначаемое $\le$, и для любых чисел a,b выполняется либо соотношение $a\le b$, либо $b\le a$.

Отношение порядка обладает такими свойствами:

1. Если одновременно $a\le b$ и $b\le a$, то $a=b$.
2. Если $a\le b$ и $b\le c$, то $a\le c$.
3. Если $a\le b$, то для всех c выполняется: $a+c\le b+c$.

Умножение натуральных чисел обладает следующими свойствами:

1. $a(bc)=(ab)c$ (ассоциативность, или сочетательный закон).
2. $ab=ba$ (коммутативность, или переместительный закон).
3. Если $a\le b$, то для всех натуральных c выполняется: $ac\le bc$.
4. $a(b+c)=ab+ac$ (дистрибутивность умножения относительно сложения, или распределительный закон).

Множество натуральных чисел обозначается N.

Мы не будем подробно останавливаться на позиционных системах счисления, как средствах для изображения чисел. В школе, да и в большинстве вычислений, используется привычная десятичная система счисления. Отметим, однако, что в ряде задач более удобны, например, двоичная или троичная системы. Также в качестве примера изобразим число 100 в двоичной системе: 1100100 (так как 100=1·64+1·32+0·16+ 0·8+1·4+0·2+0·1).

4.1´. Аксиомы Пеано

Более глубокое представление о натуральных числах, даёт предложенная в 1889 году Дж. Пеано система аксиом:

1. Единица – натуральное число. Она обозначается символом 1.

2. Для любого натурального числа n существует единственное натуральное число, за ним следующее. Оно обозначается символом n^*.
3. Единица не является числом, следующим за каким-нибудь натуральным числом.
4. Если число n^*, следующее за натуральным числом n, равно числу m^*, следующему за натуральным числом m, то $m = n$.
5. Пусть множество A натуральных чисел обладает следующими свойствами: $1 \in A$ и из того, что $n \in A$ следует, что $n^* \in A$. Тогда множество A совпадает с множеством натуральных чисел.

Пятая аксиома является основой метода математической индукции.

С помощью аксиом можно строго определить операцию сложения. Всякой паре a, b натуральных чисел ставится в соответствие третье натуральное число, называемое их суммой и обозначаемое $a+b$, по следующим правилам: $a+1 = a^*$, $a+b^* = (a+b)^*$.

С помощью аксиом можно определить также операцию умножения. Всякой паре a, b натуральных чисел ставится в соответствие третье натуральное число, называемое их произведением и обозначаемое $a \cdot b$, либо просто ab, по следующим правилам: $a \cdot 1 = a$, $ab^* = ab + a$.

Для заинтересованного читателя (мы верим, такие есть!) приведём пример доказательства одного из свойств натуральных чисел, например, равенства $a(b+c) = ab + ac$.

По определению умножения, $1(b+c) = 1 \cdot b + 1 \cdot c = b + c$. Предположив, что равенство выполнено для чисел a, b, c докажем его для чисел a, b, c^*. Действительно,

$$a(b+c^*) = a(b+c)^* = a(b+c) + a = ab + ac + a = ab + (ac + a) = ab + ac^*,$$

что и требовалось доказать.

4.2. <u>**Целые числа**</u>

Потребности в вычислениях не позволяют ограничиться только натуральными числами. Естественно дополнить натуральные числа числом 0 и отрицательными числами. Число 0 , по определению, обладает следующими свойствами: для любого натурального числа a выполняются равенства $a + 0 = a, a \cdot 0 = 0$.

Нетрудно доказать, что 0 определяется этими свойствами единственным образом. В самом деле, если мы предположим, что есть два элемента, обладающих указанными свойствами, например, $0_1, 0_2$, то получим, что $0_1 = 0_1 + 0_2 = 0_2$.

Точно также, для произвольного натурального числа a определим противоположное ему число $-a$ как такое, что выполняется равенство $a + (-a) = 0$, т.е. как решение уравнения $x + a = 0$ Натуральные числа, им противоположные числа и число 0 образуют новое множество, называемое множеством целых чисел. Множество целых чисел обозначается Z.

Мы не будем подробно останавливаться на том, как операции сложения и умножения и отношение неравенства переносятся с множества натуральных чисел на множество целых чисел, считая это известным, а просто перечислим свойства целых чисел. Сложение целых чисел обладает следующими свойствами:

1. $a+(b+c)=(a+b)+c$ (ассоциативность, или сочетательный закон).
2. $a+b=b+a$ (коммутативность, или переместительный закон).
3. Существует нейтральный элемент по сложению, называемый 0, такой, что для любого целого числа a выполняются равенства $a+0=a$.
4. Для произвольного целого числа a существует противоположное ему число $-a$ такое, что выполняется равенство $a+(-a)=0$.

Свойство 4 позволяет определить на множестве целых чисел операцию вычитания с помощью равенства $a-b=a+(-b)$.

С алгебраической точки зрения эти свойства означают, что множество целых чисел с введённой на нём операцией сложения образует коммутативную группу.

Умножение целых чисел обладает следующими свойствами:

1. $a(bc)=(ab)c$ (ассоциативность, или сочетательный закон).
2. $ab=ba$ (коммутативность, или переместительный закон).
3. $a(b+c)=ab+ac$ (дистрибутивность умножения относительно сложения, или распределительный закон).
4. Существует нейтральный элемент по умножению такой, что $a\cdot 1=a$ для любого a.

С алгебраической точки зрения эти свойства означают, что множество целых чисел с введёнными на нём операциями сложения умножения образует кольцо.

Для целых чисел a,b естественно вводится отношение порядка меньше или равно, обозначаемое ≤, и для любых чисел a,b либо $a\le b$, либо $b\le a$.

Отношение порядка обладает такими свойствами:

1. Если одновременно $a\le b$ и $b\le a$, то $a=b$.
2. Если $a\le b$ и $b\le c$, то $a\le c$.
3. Если $a\le b$, то для всех c выполняется: $a+c\le b+c$.
4. Если $a\le b$, то для всех натуральных c выполняется: $ac\le bc$, а для всех отрицательных целых чисел c - противоположное неравенство $ac\ge bc$.

Для целых чисел можно определить понятие делимости. Говорят, что целое число a делится на целое число m без остатка, если существует целое число c такое, что $a=mc$. (Обычно это обозначают следующим образом: $m|a$.) Число a называется делимым, число m – делителем, число c – частным от деления. Если же a не делится на число m без остатка, то его можно единственным образом представить в виде $a=mc+r$, где $1\le r\le m-1$. Тем самым, мы получили равенство $a=mc+r$, верное при $0\le r\le m-1$.

Зафиксируем произвольное целое число $m \neq 0$ и назовём два целых числа a,b сравнимыми по модулю m (что обозначается $a \equiv b(\mathrm{mod}\, m)$), если разность $a-b$ делится на m. Легко видеть, определённое таким образом отношение обладает всеми свойствами отношения эквивалентности. Классы эквивалентности называются классами вычетов по модулю m, в качестве системы представителей можно взять всевозможные остатки от деления на m, т.е. числа $0,1,\ldots,m-1$. Это множество обозначается Z_m.

Сумму вычетов a и b определяем, как остаток от деления на m числа $a+b$, произведение вычетов a и b определяем, как остаток от деления на m числа ab. Операции над вычетами обладают теми же свойствами, что и операции над целыми числами.

4.3. <u>**Рациональные числа**</u>

Как отмечено выше, уравнение $ax=b$, где a,b-целые числа имеет целочисленное решение только в том случае, когда число b делится на число a без остатка. Для того, чтобы это уравнение можно было решать при всех a,b с условием $a \neq 0$, следует расширить множество рассматриваемых чисел, введя дроби и, тем самым, образовав множество рациональных чисел.
Это множество состоит из множеств равных дробей (напомним, что дроби $\frac{a}{b},\frac{c}{d}$ называются равными, если $ad=bc$).

Иногда это определение вызывает недоумение. Что же это такое, рациональное число? Всё-таки, это число или множество? Ответ прост – это число, которое можно изобразить с помощью любой из бесконечного множества равных дробей. При этом целые числа, разумеется, тоже являются рациональными, т.к., например, $2=\frac{2}{1}=\frac{4}{2}=\frac{6}{3}=\ldots$

Операции над дробями определяются так: $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}, \frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$.
Для операции сложения дробей это определение означает, что мы сначала приводим дроби к общему знаменателю, т.е. заменяем каждую из них равной ей дробью, имеющей знаменатель bd, затем складываем числители получившихся дробей.

Нетрудно проверить, что определение операций корректно, т.е. что если заменить дроби $\frac{a}{b},\frac{c}{d}$ равными им дробями, то их суммой будет дробь, равная $\frac{ad+bc}{bd}$, а произведением – дробь, равная $\frac{ac}{bd}$.
Свойства 1-4 для сложения и свойства 1-4 для умножения, имевшие место для целых чисел, разумеется, сохранятся и для рациональных чисел. Это можно проверить с помощью простых, но громоздких выкладок, которые мы опускаем.

Наконец, для любого отличного от нуля рационального числа a существует единственное, обратное по умножению число a^{-1}, т.е. такое, что $aa^{-1} = a^{-1}a = 1$. Оно определяется так: если $a = \frac{p}{q},\ p \neq 0,\ p \in Z,\ q \in N$, то $a^{-1} = \frac{q}{p}$. Операция деления определяется так: для любых рациональных чисел $a, b, b \neq 0$ полагаем $a : b = a^{-1}b$.

С алгебраической точки зрения множество рациональных чисел с ведёнными в нём операциями сложения и умножения образует поле.
На множестве рациональных чисел отношение порядка вводится так. Считаем рациональное число положительным, если его можно представить дробью
$a = \frac{p}{q},\ p \in N,\ q \in N$. Рациональное число $a = \frac{p}{q},\ p \in Z,\ q \in N$ считаем отрицательным, если число p - отрицательное. По определению $a > b$, если разность $a - b$ – положительное число и $a < b$, если разность $a - b$ – отрицательное число. Из этого определения сразу следует, что положительное число a удовлетворяет неравенству $a > 0$, отрицательное число a удовлетворяет неравенству $a < 0$.

Отношение порядка обладает такими свойствами:

1. Если одновременно $a \leq b$ и $b \leq a$, то $a = b$.
2. Если $a \leq b$ и $b \leq c$, то $a \leq c$.
3. Если $a \leq b$, то для всех c выполняется: $a + c \leq b + c$.
4. Если $a \leq b$, то для всех неотрицательных чисел c выполняется: $ac \leq bc$, а для всех отрицательных чисел c - противоположное неравенство $ac \geq bc$.

Сформулируем ещё одну важную аксиому – «аксиому Архимеда»:
Для любого числа a существует натуральное число n такое, что выполняется неравенство $a \leq n$.

Из курса средней школы известно, что рациональное число изображается либо конечной, либо бесконечной периодической десятичной дробью. Это представление единственное за исключением тех случаев, когда число можно представить конечной десятичной дробью

4.4. Действительные числа

Одной из важнейших задач является задача измерения различных величин.

Рассмотрим подробнее задачу измерения отрезков. Выберем прямую на плоскости, введем на ней точку отсчёта, обозначаемую О, и отрезок единичной длины, то получим, что любому рациональному числу можно сопоставить единственную точку М этой прямой, потребовав, чтобы длина отрезка ОМ равнялась абсолютной величине этого числа и чтобы точка М лежала справа от точки О для положительного числа и слева от точки О - для отрицательного числа. На первый взгляд кажется, что рациональные точки заполняют собой всю прямую. Однако это вовсе не так. Длина

диагонали квадрата со стороной единичной длины не может быть выражена никаким рациональным числом.
Докажем это утверждение, использовав метод от противного. Для этого предположим, что эта длина выражается числом вида $\frac{m}{n}$, где натуральные числа m,n не имеют общих делителей, кроме числа 1. Тогда, по теореме Пифагора, $\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 2, m^2 = 2n^2$. Из последнего равенства следует, что m - чётное число (иначе квадрат этого числа был бы нечётным числом вопреки этому равенству), т.е. $m = 2m_1$. Следовательно, $4m_1^2 = 2n^2$, $2m_1^2 = n^2$. Значит, n также чётное число. Получено противоречие с предположением, состоящее в том, что оба числа m,n - чётные.

Таким образом, для решения задачи об измерении длин любых отрезков множества рациональных чисел недостаточно. Придётся расширить множество рассматриваемых чисел, дополнив его новыми объектами, иррациональными числами. Нашей целью сейчас будет построение множества R действительных чисел (также называемых вещественными числами), которое будет объединением множества рациональных чисел и множества иррациональных чисел, причём элементы множества действительных чисел будут находиться во взаимно-однозначном соответствии с точками прямой. Для этого нам потребуется дополнительная аксиома о непрерывности множества действительных чисел. Непрерывность множества R состоит в том, что в R нет "пустот". А именно, справедливо следующее утверждение, которое мы примем за аксиому.

4.5. **<u>Аксиома отделимости</u>**

Для любых двух непустых множеств A и B в R, таких, что для любых $a \in A, b \in B$ выполнено неравенство $a \le b$, существует хотя бы одно такое число c, что для любых $a \in A, b \in B$ выполнено неравенство $a \le c \le b$.

Впервые точный смысл утверждению, что прямая "непрерывна", дал в 1872 году немецкий математик Ю. В. Р. Дедекинд. Отметив, что каждая точка прямой разбивает прямую на две части так, что каждая точка одной части расположена влево от каждой точки другой части прямой, Дедекинд пишет: "Я усматриваю теперь сущность непрерывности в обратном принципе, то есть в следующем: если все точки прямой распадаются на два класса такого рода, что каждая точка первого класса лежит влево от каждой точки второго класса, то существует одна и только одна точка, которая производит это разбиение прямой на два класса". И далее: "… я решительно не в состоянии привести какое бы то ни было доказательство справедливости этого принципа, и никто не в состоянии этого сделать. Принятие этого свойства прямой лишь есть не что иное, как аксиома, посредством которой мы только и признаём за прямой её непрерывность".

Итак, действительные числа представляют собой множество чисел с введёнными в нём операциями сложения, умножения, вычитания и деления, и отношением порядка, обладающими обычными законами (теми же, что для рациональных чисел). Кроме того, в нём справедлива аксиома отделимости. Как отмечено выше, если ограничиться множеством рациональных чисел, то аксиома отделимости окажется неверна. Если $A-$множество рациональных чисел, меньших, чем $\sqrt{2}$, а $B-$ множество рациональных чисел больших, чем $\sqrt{2}$, то эти множества отделяет друг от друга именно число $\sqrt{2}$, которое не является рациональным.

Как отмечалось выше, десятичные представления рациональных чисел являются либо конечными, либо бесконечными периодическими десятичными дробями. Естественно рассмотреть и все остальные, т.е. бесконечные непериодические десятичные дроби, которые представляют иррациональные числа. Таким образом, действительные числа можно представить в виде бесконечных десятичных дробей.

Вернемся к задаче об измерении отрезков. Процесс измерения длины отрезка можно задать следующим алгоритмом. Расположим отрезок так, чтобы его начало совпадало с точкой O, а конец с точкой x. Начнём откладывать от точки O единичный отрезок. Пусть точка x окажется между точками с координатами a_0 и a_0+1. Разобьём отрезок $[a_0, a_0+1]$ на десять равных частей. Точка x либо совпадёт с одной из точек деления, либо окажется между двумя из них. В первом случае процесс измерения закончен, во втором мы снова разобьём отрезок на 10 частей и продолжим аналогично. Если на каком-то шаге точка x совпала с одной из точек деления, то она будет изображена конечной десятичной дробью. В противном случае будет получена бесконечная десятичная дробь. И в том, и в другом случае точке прямой поставлена в соответствие бесконечная десятичная дробь. Задача об измерении отрезка получила своё решение.

Разумеется, выбор числа 10 в качестве основания системы счисления не является единственным, как уже отмечалось в конце первого параграфа, широко используются двоичная, троичная системы счисления. Мы на этом вопросе останавливаться не будем.

Билет 5. Верхняя и нижняя грани. Стягивающиеся отрезки.

5.1. Верхняя и нижняя грани

Определение 5.1. Множество А ограничено сверху, если существует такое число М, что $\forall a \in A\; a \le M$. При этом число М называется верхней границей или гранью множества А. Множество А ограничено снизу, если существует такое число m, что $\forall a \in A\; a \ge M$. При этом число m называется нижней границей или гранью множества А.

Легко видеть, что если множество A ограничено сверху (снизу), то любое число, большее M (меньшее m) тоже будет его верхней (нижней) границей.

Определение 5.2. Если множество А ограничено сверху, то наименьшая из его верхних граней называется точной верхней гранью А и обозначается sup A.

Теорема 5.1. Если множество А ограничено сверху, то существует точная верхняя грань этого множества.

Доказательство. Выберем множество *B* таким, что $\forall a \in A\, \forall b \in B\; a \le b$ (т.е. *B* – это множество всех верхних граней *A*). Докажем, что множество *B* имеет наименьший элемент. По аксиоме отделимости (см. билет 4) существует такое $c \in R$, что $\forall a \in A\, \forall b \in B\; a \le c \le b$. Так как для всех $a \in A$ имеем $a \le c$, число c является верхней гранью *A*. Так как для всех $\forall b \in B\; c \le b$, число c – наименьшее среди элементов множества *B.* Таким образом, $c = \sup A$, что и требовалось доказать.

Определение 5.3. Если множество А ограничено снизу, то наибольшая из нижних граней называется точной нижней гранью А и обозначается inf A.

Теорема 5.2. Если множество А ограничено снизу, то существует точная нижняя грань этого множества.

Доказательство. Доказательство можно провести двумя способами.

1 способ. По аналогии с теоремой 5.1. рассмотреть множество D нижних граней множества A. Применить аксиому отделимости к D и A. По аксиоме отделимости (см. билет 4) существует такое $d \in R$, что для всех $b \in D$, для всех $a \in A$ имеет место неравенство $b \le d \le a$. Так как для всех $a \in A$ выполняется неравенство $d \le a$, d является нижней гранью A. Так как для всех $b \in D$ имеем $b \le d$, d – наибольшая среди нижних граней множества A, т.е. $d = \inf A$.

2 способ. Определим множество $-A$ так: $-A = \{-a, a \in A\}$. Если A ограничено снизу, то $-A$ ограничено сверху, поэтому $\exists \sup(-A)$, кроме того, $\inf A = \sup(-A)$.

5.2. Стягивающиеся отрезки

Определение 5.4. Система отрезков $\{[a_k, b_k], k \in N\}$ называется ***вложенной,*** если $\forall k [a_k, b_k] \supset [a_{k+1}, b_{k+1}]$.

Теорема 5.3. Любая вложенная система отрезков имеет хотя бы одну общую для всех отрезков точку, т.е. $\exists a \in R$: $\forall k \;\; a \in [a_k, b_k]$. Иными словами, $\exists a$: $a \in \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} [a_k, b_k]$ или $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} [a_k, b_k] \ne$ O.

Доказательство. Выберем множества A и B так, что

$A = [a_1, a_2 \dots a_k]$, $B = [b_1, b_2 \dots b_k]$. Для того чтобы применить аксиому отделимости, необходимо доказать, что $\forall k, l$ выполняются неравенства $a_k \le b_l$.

Выберем m так, что $m \ge max(k,l)$. Тогда $a_k \le a_m, b_m \le b_l$. Значит, $\exists \; c \in R$: $\forall k,l \;\; a_k \le c \le b_l$, полагая $l = k$, получим: $\forall k \;\; a_k \le c \le b_k$. Таким образом, c - общая для всех отрезков точка. Теорема доказана.

Определение 5.5. Система отрезков $\{[a_n, b_n], n = 1,2,3... \}$ называется ***стягивающейся*** системой отрезков, если длины этих отрезков стремятся к 0 при $n \to \infty$, т.е. $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists N(\varepsilon) \;\; \forall n > N(\varepsilon) \;\; b_n - a_n < \varepsilon$.

<u>Теорема 5.4.</u> Общая точка стягивающейся системы отрезков единственна.

Доказательство. Допустим, что есть 2 общие точки $c_1 \neq c_2 \quad c_1 < c_2$.

Тогда $\forall k\ [a_k b_k] \supset [c_1 c_2]$. Возьмем $\varepsilon = \frac{c_2 - c_1}{2}$. Найдется такое $N(\varepsilon)$, что для любого $n > N(\varepsilon)\ \ b_n - a_n < \varepsilon$.

Одновременно получаем, что

$$\left.\begin{array}{l} b_n - a_n < \varepsilon \\ [a_n, b_n] \supset [c_1, c_2] \\ \qquad\Downarrow \\ b_n - a_n > c_2 - c_1 \end{array}\right\} c_2 - c_1 < \frac{c_2 - c_1}{2} \text{ откуда } \frac{c_2 - c_1}{2} < 0. \text{ Но } \varepsilon = \frac{c_2 - c_1}{2} > 0.$$

Тем самым, мы пришли к противоречию. Теорема доказана.

Замечания:

- точка с является точной верхней гранью множества левых отрезков и точной нижней гранью множества правых концов этих отрезков;
- вложенная система <u>интервалов</u> может не иметь общую точку, как показывает

Пример. Рассмотрим $(a_n, b_n) = (0, 1/n), n = 1,2,...$ У этих интервалов нет общей точки – докажем это от противного. Если бы общая точка α была, то она принадлежала бы первому интервалу, т.е. $\alpha \in (0,1)$, $0 < \alpha < 1$. Выберем число $n \in N$ так, чтобы $\frac{1}{n} < \alpha$, т.е. $n > \frac{1}{\alpha}$. Тогда $\alpha \notin (0, \frac{1}{n})$ вопреки предположению.

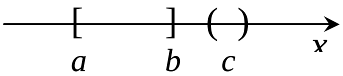
Билет 6. Предельные точки

Определение 6.1. Окрестностью $U(a)$ точки a называется любой интервал, содержащий точку a. Чаще всего рассматривают симметричную окрестность радиуса δ, $U_\delta(a)$ $(a-\delta, a+\delta)$. Проколотой окрестностью точки a называется окрестность точки a, из которой исключена сама точка a, т.е. $.\dot U(a) = U(a) - a$

Определение 6.2. a - предельная точка множества A, если в любой проколотой окрестности точки а есть точки из множества А: $\forall \dot U(a)\, \dot U(a) \cap \varnothing$

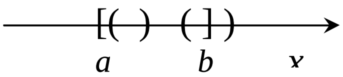
В определении не сказано, что $a \in A$. В приведенных ниже примерах встретятся ситуации, и когда предельная точка a множества A принадлежит самому множеству A, и когда она не принадлежит множеству A.

Пример 1. Пусть $A = [a,b]$. Любая точка с, не принадлежащая этому отрезку, не является предельной точкой (рис. 1).



(*рис.* 1)

Для любой $c \notin [a,b]$можно указать окрестность точки с, не пересекающуюся с $[a,b]$.



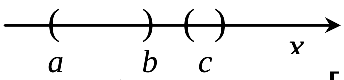
(*рис.* 2)

Любая окрестность любой точки $c \in [a,b]$ имеет непустое пересечение с $[a,b]$ (рис. 2).

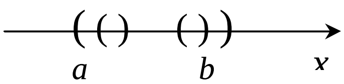
Множество предельных точек отрезка - сам отрезок.

Определение 6.3. Множество, содержащее все свои предельные точки, называется замкнутым.

Пример 2. Пусть $A = (a,b)$. Как и выше, если $c \notin [a,b]$, то с не является предельной точкой А.



Но любая окрестность любой точки $c \in [a,b]$имеет непустое пересечение с (a,b),



(*рис.* 4)

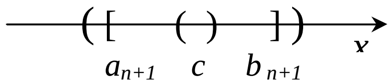
Поэтому множеством предельных точек интервала (a,b) является отрезок $[a,b]$. В этом случае концы a, b этого отрезка – предельные точки (a,b), не принадлежащие (a,b).

Теорема 6.1. Если А - бесконечное ограниченное множество, то существует предельная точка множества А.

(<u>Примечание</u> к формулировке теоремы: множество А ограниченное - это означает, что $\exists c,d \ \ \forall a \in A \ c \le a \le d$ *; бесконечное, т.е. содержит бесконечно много точек.)*

Доказательство. Рассмотрим отрезок $[c_1, d_1] = [c, d]$. Разделим его на 2 равные части. Хотя бы в одну из половин отрезка входит бесконечное множество точек *A*. Возьмем полученный отрезок $[c_2, d_2]$и тоже разделим его на 2 равные части. Хотя бы один из полученных отрезков $[c_3, d_3]$тоже содержит бесконечное множество точек из *A*. Продолжим процесс деления отрезков. В итоге имеем систему стягивающихся отрезков. По теоремам (**5.3**, **5.4**) эта система имеет единую для всех отрезков точку *c*. Утверждаем, что точка *c* - предельная точка множества *A*. Выберем произвольную окрестность $\dot{U}(a)$ и в ней окрестность $\dot{U}_\delta(c)$. После этого возьмем *n* такое, чтобы длина отрезка $[a_{n+1}, b_{n+1}]$, равная $\frac{d_1 - c_1}{2^n}$, оказалась меньше δ, т.е. $\frac{d_1 - c_1}{2^n} < \delta$

$$\Leftrightarrow \ 2^n > \frac{d_1 - c_1}{\delta} \ \ \Leftrightarrow \ \ n > \log_2 \frac{d_1 - c_1}{\delta}.$$



(*рис.* 5)

Так как, очевидно, $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset U_\delta(c)$ (*см. рис. 5*), и так как $[a_{n+1}, b_{n+1}]$ содержит, по построению, бесконечное множество точек из *A*, проколотая окрестность $\dot{U}_\delta(c)$, также содержит бесконечное множество точек из *A*. Итак, доказано, что произвольная окрестность $\dot{U}(c)$ содержит точки из *A*. Следовательно, *c* – предельная точка множества *A*.

В дополнение сформулируем и докажем еще одно важное свойство предельных точек.

Теорема 6.2. Если а – предельная точка А, то в любой проколотой окрестности точки а, содержится бесконечное множество точек из А.

Доказательство. Рассмотрим произвольную окрестность $\dot{U}(a)$ и в ней также произвольную $\dot{U}_{\delta}(a) \subset \dot{U}(a)$. Обозначаем $\delta_1 = \delta$. В $\dot{U}_{\delta}(a)$ существует точка $a_1 \in A$, по определению предельной точки. Пусть $\delta_2 < \min(\delta_1, |a - a_1|)$. В $\dot{U}_{\delta_2}(a)$ существует точка $a_2 \in A$. Точка a_2 не может совпасть с a_1, т.к. $|a_2 - a| < \delta_2 < |a - a_1|$. Далее полагаем $\delta_3 < \min(\delta_2, |a_2 - a|)$. В $\dot{U}_{\delta_3}(a)$ существует точка $a_3 \in A$, причем $a_3 \neq a_1$, $a_3 \neq a_2$, т.к. $|a_3 - a| < \delta_3 < |a_2 - a| < |a_1 - a|$ и т.д.

В итоге получаем бесконечное множество точек из *A*, входящих в $\dot{U}(a)$, что и утверждалось.

Следствие. Конечное множество не имеет предельных точек.

Билет 7. Приближенные вычисления

7.1. **Погрешность**

Результаты измерений и расчётов редко бывают совершенно точными. Сама математическая модель, описывающая изучаемое явление, в определённой степени идеализирована, она изображает процесс лишь с некоторой точностью. Параметры процесса так же, как правило, вычислены лишь приблизительно; в частности, источниками ошибок могут быть ошибки измерительных приборов. Наконец, сами вычисления содержат округления и т.п. Поэтому часто приходится использовать в вычислениях не само действительное число, а лишь некоторое его приближённое значение.

Обычно приближённым значением a действительного числа A называется число, незначительно отличающееся от числа A и заменяющее это число A в вычислениях. Но для того, чтобы сделать результаты приближённых вычислений надёжными, следует уточнить понятие приближённого значения и соблюдать правила приближённых вычислений.

Поэтому этот и следующие разделы первого параграфа будут посвящены правилам приближённых вычислений, часто используемым на практике.

Определение 7.1. Под ошибкой или погрешностью Δa приближённого числа a обычно понимают разность между соответствующим точным числом A и числом a, т.е. $\Delta a = A - a$. Погрешность может быть положительной, тогда приближение называется приближением по избытку. Если погрешность отрицательная, то приближение называется приближением по недостатку. Удобно рассматривать абсолютную погрешность Δ приближённого числа a, равную абсолютной величине погрешности Δa, т.е. $\Delta = |\Delta a|$.

Часто бывает так, что точное значение числа A нам неизвестно. В этом случае абсолютная погрешность нам также неизвестна, и следует попытаться найти оценку сверху для этой погрешности, т.е. такое число Δ_a, про которое известно, что оно не меньше, чем Δ. Тогда неравенство $\Delta \le \Delta_a$ означает, что $|A - a| \le \Delta_a$, или, что то же самое, что $a - \Delta_a \le A \le a + \Delta_a$. Таким образом, число $a - \Delta_a$ будет являться приближением для числа A по недостатку, а число $a + \Delta_a$ будет являться приближением для числа A по избытку. Неравенства $a - \Delta_a \le A \le a + \Delta_a$ часто кратко записывают так: $A = a \pm \Delta_a$. Они означают, что число A находится на интервале длины $2\Delta_a$ с центром в точке a.

Разумеется, если $\Delta \ge \Delta_a$, то из приближённого равенства $A = a \pm \Delta_a$ следует менее точное приближённое равенство $A = a \pm \Delta$.

Число Δ_a, т.е. точность приближения, выбирается, в основном, исходя из потребностей решаемой задачи. Это означает, что одно и то же число может быть приближено с различной точностью (примеры будут даны ниже). Таким образом, часто вместо точного значения действительного числа A мы рассматриваем совокупность его различных приближённых значений с различными заданными точностями.

<u>Определение 7.2.</u> Ещё одна важная характеристика качества приближения – относительная погрешность δ приближённого числа a. По определению, эта величина равна $\delta = \dfrac{|A-a|}{|A|}$.

В тех случаях, когда точное значение числа A нам неизвестно, невозможно дать и точное значение числа δ. Тогда, как и выше, следует получить оценку сверху для относительной погрешности, исходя из оценки сверху для абсолютной погрешности. Например, при условиях $A > 0, a > o, a > \Delta_a$ справедлива такая оценка: $\delta \le \delta_a = \dfrac{\Delta_a}{a - \Delta_a}$.

7.2. <u>Десятичная запись приближенных чисел</u>

Из курса средней школы известно, что всякое рациональное число можно представить в виде конечной или периодической бесконечной десятичной дроби. Остальные действительные числа (т.е. иррациональные числа) изображаются бесконечными непериодическими десятичными дробями.

Однако на практике действия с бесконечными дробями приходится заменять действиями с конечными десятичными дробями, служащими приближениями для рассматриваемых чисел, т.е. с числами вида a или $-a$, где
$a = a_m 10^m + a_{m-1} 10^{m-1} + \ldots + a_{m-n+1} 10^{m-n+1}, a_m \ne 0$ и $a_i, i = m-n+1, \ldots, m$ - десятичные цифры.

<u>Определение 7.3.</u> В этом представлении числа a значащими цифрами называются все отличные от нуля цифры, все те равные нулю цифры, которые содержатся между отличными от нуля значащими цифрами, а также равные нулю цифры, необходимые для обозначения десятичных разрядов целого числа. Говорят, что n значащих цифр приближённого числа являются верными, если абсолютная погрешность этого приближённого числа a не превышает половины единицы разряда, выражаемого n-ой значащей цифрой, считая слева направо.

Таким образом, если для приближённого числа a, заменяющего точное число A, известно, что выполняется неравенство $|A-a| \le \frac{1}{2}10^{m-n+1}$, то, по определению, первые n значащих цифр этого числа являются верными.

Здесь будут уместно следующее замечание. Во многих случаях верные знаки приближающего числа совпадают с соответствующими цифрами точного числа, например, для точного числа $A = 411,23$ приближённое число $a = 411,20$ имеет четыре верных знака, так как $|A-a| = 0,03 < \frac{1}{2}0,1$, причём эти знаки совпадают со знаками точного числа, но для точного числа $A = 37,28$ приближённое число $a = 37,30$ имеет три верных знака, так как $|A-a| = 0,02 < \frac{1}{2}0,1$, а совпадают только две цифры. В примере $A = 100,\ a = 99,9,\ |A-a| = 0,1 < \frac{1}{2}$ у приближённого числа имеется два верных знака, ни один из которых не совпадает со знаками исходного числа.

Рассмотрим такой интересный пример. Первым приближением, известным ещё Архимеду в III веке до н.э. для числа π, равного отношению длины окружности к её диаметру, служит число $\frac{22}{7} = 3,142857\ldots$. Зная разложение числа $\pi = 3,1415926\ldots$, получаем, что $\left|\pi - \frac{22}{7}\right| < 0,0013 < 0,5 \times 10^{-2}$, что означает, по определению, что три значащих цифры этого приближённого значения числа π являются верными.

Адриан Меций, голландский геометр XVI века, предложил для приближения π число $\frac{355}{113}$; это число легко запомнить по правилу: написав по два раза нечётные цифры 1,1,3,3,5,5, следует последние три взять цифрами числителя, а первые три - знаменателя. Так как $\frac{355}{113} = 3,1415929\ldots$, а, как отмечалось выше, $\pi = 3,1415926\ldots$, то $\left|\pi - \frac{355}{113}\right| < 5 \cdot 10^{-7}$ и приближённое значение $\frac{355}{113}$ для числа π имеет 7 верных знаков.

Важным направлением развития современной вычислительной математики являются разработка и реализация алгоритмов, дающих огромные количества верных знаков в десятичном разложении числа π. В 2002 году их было известно уже $1,24 \times 10^{12}$! Разумеется, такие вычисления не являются самоцелью или демонстрацией вычислительных возможностей современных компьютеров. Знание такого большого количества десятичных знаков числа π предоставляет, огромный выбор псевдослучайных чисел, широко применяемых при вероятностных расчётах и др. (Интересно, что среди первого миллиона цифр все десятичные цифры встречаются примерно с одинаковой частотой).

7.3. **Правила округления чисел**

Округление точного или приближённого числа состоит в замене его числом с меньшим количеством значащих цифр. Действительно, точность приближения определяется не всеми значащими цифрами, а только верными.

Обычно используют такое практическое правило: при выполнении приближённых вычислений число значащих цифр промежуточных результатов число не должно превосходить числа верных цифр более чем на две единицы.

Чтобы округлить число до n значащих цифр все его цифры, расположенные правее n-ой значащей цифры либо отбрасывают, либо заменяют нулями в случае, когда это необходимо для сохранения разрядов целого числа. Кроме того, если первая из отброшенных цифр меньше 5, то предыдущие разряды не меняются. Если первая из отброшенных цифр больше пяти, то к последней оставшейся цифре прибавляют единицу. Если первая из отброшенных цифр равна пяти, причём среди остальных отброшенных цифр есть не равные нулю, то к последней оставшейся цифре прибавляют единицу. Если первая из отброшенных цифр равна пяти, причём все остальные отброшенные цифры равны нулю, то к последней оставшейся цифре добавляют единицу, если она нечётная и не меняют её, если она чётная. Приведём примеры округления до трёх значащих цифр: 123456789=123000000, 34,567=34,6, 12,2500=12,2 35000=12,4

Можно доказать следующее утверждение:

Теорема 7.1. Если положительное приближённое число $a = a_m 10^m + a_{m-1} 10^{m-1} + \ldots + a_{m-n+1} 10^{m-n+1}, a_m \neq 0$ имеет n верных десятичных знаков, то относительная погрешность δ этого числа не превосходит величины $\delta \leq \frac{1}{a_m}(0{,}1)^{n-1}$.

Доказательство. По определению, $\Delta_a = |A - a| \leq \frac{1}{2} 10^{m-n+1}$. Значит,

$$A \geq a - \frac{1}{2}10^{m-n+1} \geq a_m 10^m - \frac{1}{2}10^{m-n+1} = \frac{1}{2}10^m\left(2a_m - \frac{1}{10^{n-1}}\right) \geq \frac{1}{2}10^m(2a_m - 1) \geq \frac{1}{2}a_m 10^m$$ и

$$\delta = \frac{\Delta_a}{A} \leq \frac{\frac{1}{2}10^{m-n+1}}{\frac{1}{2}a_m 10^m} = \frac{1}{a_m}(0{,}1)^{n-1}$$, что и требовалось доказать.

С помощью этого утверждения можно решать, например, такие задачи.

Задача. Оценить относительную погрешность замены числа π числом $3{,}14$.

Решение. $a_m = 3, n = 3$, поэтому $\delta \le \frac{1}{3}\cdot 10^{-2}$. (На самом деле в этом примере можно дать и более точную оценку, так как мы знаем, что $|\pi - 3{,}14| < 0{,}0016$ и $\frac{0{,}0016}{3{,}14} < 0{,}00051$).

Задача. Сколько десятичных знаков числа $\sqrt{22}$ следует взять, чтобы относительная погрешность вычисления не превышала $0{,}001$.

Решение. Первая цифра этого числа, очевидно, равна 4. Для того, чтобы выполнялась оценка $\delta = \frac{1}{4}10^{-n+1} \le 0{,}001$, достаточно взять $n = 4$.

7.4. Погрешности арифметических действий

Теорема 7.2. Абсолютная погрешность алгебраической суммы нескольких приближённых чисел не превышает суммы абсолютных погрешностей слагаемых.

Доказательство. Пусть $A_1,...,A_k$ - точные значения, $a_1,...,a_k$ - приближающие их числа. Тогда $|(A_1+...+A_k)-(a_1+...+a_k)| \le |A_1 - a_1| + ... + |A_k - a_k|$, по свойству 2 абсолютной величины, что и требовалось доказать.

Это утверждение означает, что $\Delta_{a_1+...+a_k} \le \Delta_{a_1} + ... + \Delta_{a_k}$. Поэтому обычно правую часть этого неравенства и принимают за оценку абсолютной погрешности суммы. Таким образом, абсолютная погрешность суммы оказывается не меньше, чем наибольшая из абсолютных погрешностей слагаемых. Следовательно, не имеет смысла сохранять излишние знаки и в более точных слагаемых.

Итак, при сложении приближённых чисел используется такое простое правило. Во-первых, следует найти числа, десятичная запись которых содержит наименьшее количество знаков после запятой. Остальные числа округлить так же, как найденные выше, взяв ещё один лишний знак. Произвести сложение полученных округлённых чисел и округлить результат.

Сложим, для примера, числа $2{,}173 \pm 0{,}0005$, $0{,}11 \pm 0{,}005$, $43{,}1244 \pm 0{,}00005$. Ясно, что точность вычисления определяется вторым слагаемым. Поэтому, в соответствии с выписанным выше правилом, сохраним первое и второе числа и округлим третье следующим образом: $43{,}124 \pm 0{,}0005$. Тогда первое и третье слагаемые дадут в сумме

$45,297 \pm 0,001$. Добавление второго слагаемого приведёт к $45,41 \pm 0,0051$. Из этого следует, что верными цифрами суммы будут первые три её цифры.

<u>Теорема 7.3.</u> Относительная погрешность суммы слагаемых одного и того же знака не превышает наибольшей относительной погрешности.

Доказательство. Пусть, как и выше, точные числа равны $A_1, ..., A_k$, приближённые числа равны $a_1, ..., a_k$, абсолютные погрешности оценены числами $\Delta_1, ..., \Delta_k$, относительные погрешности равны $\delta_1, ..., \delta_k$ и наибольшая из них есть $\tilde{\delta}$. Тогда относительная погрешность суммы не превосходит числа

$$\delta \le \frac{\Delta_1 + ... + \Delta_k}{|A_1| + ... + |A_k|} \le \frac{\delta_1 |A_1| + ... + \delta_k |A_k|}{|A_1| + ... + |A_k|} \le \tilde{\delta}.$$

Перейдём к погрешности произведения.

<u>Теорема 7.4.</u> Относительная погрешность произведения нескольких положительных приближённых чисел не превышает суммы их относительных погрешностей.

Доказательство. Пусть, в прежних обозначениях $a = a_1 ... a_k$. Тогда $\ln a = \ln a_1 + ... + \ln a_k$. Мы сейчас воспользуемся правилом, которое будет доказано позже. Согласно этому правилу, для погрешностей $\Delta \ln a_i$ выполняется равенство: $\Delta \ln a_i \cong \dfrac{\Delta_{a_i}}{a_i}$.

Из этого равенства вытекает также приближённое равенство: $\dfrac{\Delta_a}{a} = \dfrac{\Delta_{a_1}}{a_1} + ... + \dfrac{\Delta_{a_k}}{a_k}$, откуда, в свою очередь, $\left|\dfrac{\Delta_a}{a}\right| \le \left|\dfrac{\Delta_{a_1}}{a_1}\right| + ... + \left|\dfrac{\Delta_{a_k}}{a_k}\right|$, что и требовалось доказать.

Пример. Найдём произведение приближённых чисел $11,3 \pm 0,05$, $28,46 \pm 0,005$. Оценкой сверху для относительной погрешности служит число $\delta = \dfrac{0,05}{11,25} + \dfrac{0,005}{28,455} \le 0,0044 + 0,000176 \le 0,0045$. Произведение приблизительно равно $323,08$ и абсолютная погрешность не превосходит 1,45. Поэтому произведение имеет два верных знака и его следует записать так: 323 ± 2.

Полезно руководствоваться таким правилом. Пусть мы ищем произведение нескольких приближённых сомножителей. Тогда, во-первых, округлим все сомножители, кроме наименее точного, так, чтобы они имели на одну значащую цифру больше, чем число верных цифр в этом наименее точном из сомножителей. В результате умножения сохранить столько значащих цифр, сколько верных цифр в наименее точном из сомножителей.

Как определить число верных знаков произведения? Рассмотрим $k \le 10$ сомножителей $a_1, ..., a_k$, каждый из которых пусть имеет $n > 1$ верных цифр. Пусть $a_1, ..., a_k$ - их первые значащие цифры. Тогда, как доказано выше, $\delta_i \le \frac{1}{2a_i}(0,1)^{n-1}$, и по предыдущему утверждению, $\delta \le \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_k}\right)(0,1)^{n-1}$. Поскольку, по условию, $k \le 10$ и все $a_i \ge 1$. Поэтому $\delta \le \frac{1}{2}(0,1)^{n-2}$. Следовательно, число верных знаков может уменьшиться не более, чем на 2. Если сомножители имеют разное количество верных цифр, то под числом $n > 1$ следует понимать наименьшее из чисел верных знаков сомножителей.

Вопрос о погрешности частного решается примерно так же, как и в случае произведения. Именно, если $a = \frac{a_1}{a_2}$, то $\ln a = \ln a_1 - \ln a_2$, $\frac{\Delta_a}{a} = \frac{\Delta_{a_1}}{a_1} - \frac{\Delta_{a_2}}{a_2}$, $\left|\frac{\Delta_a}{a}\right| \le \left|\frac{\Delta_{a_1}}{a_1}\right| + \left|\frac{\Delta_{a_2}}{a_2}\right|$ и, следовательно, относительная погрешность частного не превосходит суммы относительных погрешностей делимого и делителя.

Если делимое и делитель имеют $n > 1$ верных цифр и если a_1, a_2 - их первые значащие цифры, то, как и выше, $\delta \le \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2}\right)(0,1)^{n-1}$. Поэтому если оба числа a_1, a_2 не меньше 2, то частное имеет не меньше, чем $n-1$ верный знак. Если хотя бы одно из чисел a_1, a_2 равно 1 , то частное имеет не менее $n-2$ верных знаков.

Наконец, обратимся к операциям возведения в натуральную степень m и извлечения корня степени m. В первом случае задача решается так: $\ln a^m = m \ln a,\ (a > 0),\ \delta_{a^m} \le m\delta_a$, т.е. оценка относительной погрешности m-ой степени числа в m раз больше, чем оценка относительной погрешности самого числа.

Для корня имеем: $\ln a^{\frac{1}{m}} = \frac{1}{m}\ln a,\ (a > 0),\ \delta_{a^{\frac{1}{m}}} \le \frac{1}{m}\delta_a$: оценка относительной погрешности корня m-ой степени из положительного числа в m раз меньше, чем оценка относительной погрешности самого числа.

Изложенным выше мы только начали изучение приближённых вычислений. Нам ещё предстоит исследовать задачу приближённого вычисления значений функций общего вида. Но для этого сначала придётся изучить основные понятия дифференциального исчисления и доказать формулы Тейлора.

Билет 8. Предел последовательности. Бесконечно малые последовательности. Арифметические свойства предела.

Определение 8.1. *Если каждому $n \in N$ сопоставлено число $a_n \in R$, то говорят, что задана последовательность $\{a_n\}$, $n \in N$*

Некоторые последовательности обладают очень важным свойством – они имеют предел.

Определение 8.2. *Последовательность $\{a_n\}$ имеет предел, равный числу A тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ существует число $N(\varepsilon) > 0$ такое, что для всех $n \in N$, удовлетворяющих неравенству $n > N(\varepsilon)$, выполняется неравенство $|a_n - A| < \varepsilon$.*

Удобно записывать это определение с помощью логических символов: $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N(\varepsilon) > 0 \ \forall n > N(\varepsilon) \ |a_n - A| < \varepsilon$.

Для обозначения предела последовательности используется символ: $\lim\limits_{x \to \infty} a_n$.

Пример 1. Если $a_n = A$ для всех *n*, то $\lim\limits_{x \to \infty} a_n = A$

Доказательство. Для любого $\varepsilon > 0$ и любого $N(\varepsilon)$, и любого n $|a_n - A| = |A - A| = 0 < \varepsilon$.

Пример 2. Если $a_n = \dfrac{1}{n}$, то $\lim\limits_{x \to \infty} a_n = 0$

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$. Возьмем $N(\varepsilon) = \dfrac{1}{\varepsilon}$. Тогда если $n > N(\varepsilon)$, то $n > \dfrac{1}{\varepsilon}$ и $\dfrac{1}{n} < \varepsilon$, поэтому $|a_n - 0| = \left|\dfrac{1}{n} - 0\right| = \dfrac{1}{n} < \varepsilon$.

Теорема 8.1. ***Если предел последовательности $\{a_n\}$ существует, то он единственен, т.е. если $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = A_1$ и если $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = A_2$, то $A_1 = A_2$***

Доказательство. Предположим, что последовательность имеет пределом число A_1, а также имеет пределом число A_2, $A_1 \neq A_2$. Тогда:
$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ N_1(\varepsilon) > 0 \ \forall n > N_1(\varepsilon) \quad |a_n - A_1| < \varepsilon$

Полагая в этом условии $\varepsilon = \dfrac{|A_2 - A_1|}{2}$, получаем, что при $n > N_1$

$|a_n - A_1| < \dfrac{|A_2 - A_1|}{2}$. Аналогично, поскольку A_2 - тоже предел, получаем, что

при $n > N_2$ $|a_n - A_2| < \dfrac{|A_2 - A_1|}{2}$.

Пусть $N = \max(N_1, N_2)$. Тогда при $n > N$ выполняются условия $n > N_1$ и $n > N_2$, поэтому

$$|A_2 - A_1| = |A_2 - a_n + a_n - A_1| \le |A_2 - a_n| + |a_n - A_1| = |a_n - A_2| + |a_n - A_1| <$$
$$< \frac{|A_2 - A_1|}{2} + \frac{|A_2 - A_1|}{2} = |A_2 - A_1|$$

Полученное противоречие доказывает теорему.

Определение 8.3. Последовательность $\{\alpha_n\}$, $n \in N$ называется бесконечно малой, если $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$.

Теорема 8.2. ***Предел последовательности*** $\{\alpha_n\}$, $n \in N$ ***существует и равен А тогда и только тогда, когда*** a_n ***можно представить в виде*** $a_n = A + \alpha_n$***, где*** α_n ***- бесконечно малая последовательность.***

► $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists N : \forall n > N : \ |a_n - A| < \varepsilon$, обозначим $\alpha_n = A - a_n$, тогда

получаем $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N : \forall n > N \ |\alpha_n| < \varepsilon$, т.е. α_n - бесконечно малая ◄

Теорема 8.3.

1. ***Если*** $\{\alpha_n\}$ ***и*** $\{\beta_n\}$***- бесконечно малые последовательности, то алгебраическая сумма -*** $\{\alpha_n\} \pm \{\beta_n\}$ ***тоже бесконечно малая последовательность;***

2. Если $\{\alpha_n\}$- бесконечно малая последовательность, а $\{\gamma_n\}$ - ограниченная последовательность (т.е. $\exists c:\ \forall n\,|\gamma_n| < c$), то $\{\alpha_n \cdot \gamma_n\}$ - бесконечно малая последовательность;

3. Если $\{\alpha_n\}$и $\{\beta_n\}$- бесконечно малые последовательности, то произведение $\{\alpha_n \cdot \beta_n\}$- бесконечно малая последовательность.

►Зафиксируем любое $\varepsilon > 0$. Для числа $\frac{\varepsilon}{2}$ существуют N_1 и N_2 такие, что для всех $n > N_1$ имеем $|\alpha_n| < \frac{\varepsilon}{2}$ и для всех $n > N_2$ имеем $|\beta_n| < \frac{\varepsilon}{2}$. Тогда для всех $n > N = \max(N_1, N_2)$ имеем $|\alpha_n \pm \beta_n| \le |\alpha_n| + |\beta_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. Первое утверждение доказано.

Перейдем ко второму: Для числа $\frac{\varepsilon}{c}$ существует N такое, что $|\alpha_n| < \frac{\varepsilon}{c}$ при $n > N$. Тогда и $|\alpha_n \gamma_n| < \frac{\varepsilon}{c} \cdot c = \varepsilon$. Второе утверждение доказано.

Для доказательства третьего утверждения установим лемму:

Если $\{\beta_n\}$- бесконечно малая, то она ограниченная (но, разумеется, не наоборот!) Для доказательства выберем $\varepsilon = 1$. По определению бесконечно малой, существует N такое, что при $n > N$ имеем при $|\beta_n| < 1$. Можно считать, что $N \in R$натуральное число. Тогда $|\beta N_1| < 1, |\beta N_2| < 1, \ \dots$. Тогда выберем $C = \max(|\beta_1|, |\beta_2|, \ \dots, |\beta_{\mathrm{N}}|, 1)$. Т.е. для всех n $|\beta_n| \le C$. Третье утверждение теперь следует из леммы и второго утверждения.◄

<u>Теорема 8.3.</u> (Арифметические свойства предела)

Если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$, то $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = B$, то $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \underset{\bullet}{\pm} b_n = A \underset{\bullet}{\pm} B$, а если $B \neq 0$, то и $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{A}{B}$.

$a_n = A + \alpha_n$, $\mathrm{b_n} = B + \beta_n$, где α_n, β_n - бесконечно малые последовательности. Тогда

$a_n \pm b_n = (A + \alpha_n) \pm (B + \beta_n) = (A \pm B) + (\alpha_n \pm \beta_n)$,а последовательности $a_n \pm b_n$ - бесконечно малые по теореме 8.3, часть 1;

$a_n \cdot b_n = (A + \alpha_n) \cdot (B + \beta_n) = AB + B\alpha_n + A\beta_n + \alpha_n\beta_n$, причем $B\alpha_n, A\beta_n, \alpha_n\beta_n$ - бесконечно малые по теореме 8.3, части 2 и 3, а их сумма – тоже бесконечно малая по теореме 8.3, часть 1.

Переходя к пределу частного, докажем сначала леммы:

Лемма 1. Если $B \neq 0$, то существует N такое, что при $n > N$ $|b_n| > \frac{|B|}{2}$.

►Возьмем $\varepsilon = \frac{|B|}{2}$; по определению предела существует N такое, что при $n > N$ $|\mathrm{b_n} - B| < \frac{|B|}{2}$, т.е. $B - \frac{|B|}{2} < b_n < B + \frac{|B|}{2}$. Если $B > 0$, то первое из этих неравенств, т.е. $b_n > B - \frac{|B|}{2}$ дает $b_n > \frac{B}{2}$, т.е. $|\mathrm{b_n}| > \left|\frac{B}{2}\right|$, а если $B < 0$, то неравенство $b_n < B + \frac{|B|}{2}$ означает, что $b_n < \frac{B}{2}$, но т.к. $B < 0$, из него снова получаем $|\mathrm{b_n}| > \left|\frac{B}{2}\right|$◄

Лемма 2. Если $B \neq 0$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} = \frac{1}{B}$.

► $\mathrm{b_n} = B + \beta_n$,

$$\frac{1}{b_n} - \frac{1}{B} = \frac{1}{B + \beta_n} - \frac{1}{B} = \frac{B - B - \beta_n}{B \cdot (B + b_n)} = \frac{-\beta_n}{B \cdot b_n}.$$

По лемме 1, при $n > N$, $|b_n| > \frac{|B|}{2}$, поэтому $\left|\frac{1}{B \cdot b_n}\right| < \frac{1}{|B| \cdot \frac{|B|}{2}} = \frac{2}{|B|^2}$, т.е. $\frac{1}{B \cdot b_n}$ - ограниченная последовательность. Поэтому $\frac{-\beta_n}{B \cdot b_n}$ - бесконечно малая последовательность, и лемма 2 следует из теоремы 8.1.

Наконец, теорема о пределе частного следует из теоремы о пределе произведения и леммы 2. ◄

Билет 9. Предельный переход в неравенствах. Предел монотонной ограниченной последовательности.

Теорема 9.1. ***Если*** $a_n \geq 0$ ***и существует*** $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$***, то*** $A \geq 0$.

► Метод от противного; пусть $A < 0$, выберем $\varepsilon = \frac{|A|}{2}$. Тогда

$\exists N : \forall n > N \ |a_n - A| < \frac{|A|}{2}$, т.е. $a_n < A + \frac{|A|}{2} = \frac{A}{2} < 0$ - противоречие с условием◄

Теорема 9.2. ***Если*** $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = B$ ***и для всех*** n ***выполняется неравенство*** $a_n \leq b_n$***, то*** $A \leq B$.

► Рассмотрим $c_n = b_n - a_n$, $c_n \geq 0$ по теореме о пределе разности, существует $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = B - A$, этот предел неотрицателен по предыдущей теореме, т.е. $B - A \geq 0$.

Замечание:

1. Теоремы означают, что предельный переход сохраняет нестрогое неравенство.

2. Однако, строгое неравенство, например $0 < \frac{1}{n^2}$ при предельном переходе при $n \to \infty$ переходит в нестрогое , $0 \leq 0$. Это означает, что если $a_n < b_n$ и $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = B$, то $A \leq B$ (а не $A < B$!).

Теорема 9.3. (о «зажатой» последовательности).

Если для всех n ***имеет место неравенство*** $a_n \leq b_n \leq c_n$ ***и, кроме того, существует и равны друг другу пределы*** $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = A$***, то существует предел*** $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$***, и он тоже равен*** A.

►**Лемма.** ***Если для всех*** n ***выполняются неравенства*** $0 \le \alpha_n \le \beta_n$ ***и*** $\lim\limits_{n\to\infty}\beta_n = 0$**,** ***то*** $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n = 0$**.**

► Дано:

$\forall\varepsilon > 0\ \exists N\ \forall n > N\ |\beta_n| < \varepsilon$, т.е. $\beta_n < \varepsilon$, т.к. $\beta_n \ge 0$. По условию, $0 \le \alpha_n \le \beta_n < \varepsilon$, таким образом, $\forall\varepsilon > 0\ \exists N\ \forall n > N\ 0 \le \alpha_n < \varepsilon$, что и означает, что $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n = 0$.◄

Перейдем к доказательству теоремы.

Обозначим $\alpha_n = b_n - a_n$, $\beta_n = c_n - a_n$, тогда из условия теоремы следует, что, во-первых, $0 \le \alpha_n \le \beta_n$ и, во-вторых, что $\lim\limits_{n\to\infty}\beta_n = \lim\limits_{n\to\infty}c_n - \lim\limits_{n\to\infty}a_n = A - A = 0$. Применяя лемму, получаем, что $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n = \lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$. Так как $\lim\limits_{n\to\infty}a_n = A$, по теореме о пределе суммы получаем: $\lim\limits_{n\to\infty}b_n = \lim\limits_{n\to\infty}((b_n - a_n) + a_n) = 0 + A = A$.◄

Определение 9.1. *Последовательность* $\{a_n\}$, $n \in N$ *называется* ***неубывающей****, если для всех n выполняется неравенство* $a_n \le a_{n+1}$. *Она называется* ***возрастающей,*** *если выполняется неравенство* $a_n < a_{n+1}$. *Последовательность* $\{a_n\}$, $n \in N$ *называется* ***невозрастающей*** *, если для всех n выполняется неравенство* $a_n \ge a_{n+1}$. *Она называется* ***убывающей****, если выполняется неравенство* $a_n > a_{n+1}$.*Общее название всех таких последовательностей –* ***монотонные*** *последовательности.*

Теорема 9.4. (К. Вейерштрасс)

1. ***Если последовательность*** $\{a_n\}$, $n \in N$ ***не убывает и ограничена сверху, то существует*** $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$**.**
2. ***Если последовательность*** $\{a_n\}$, $n \in N$ ***не возрастает и ограничена снизу, то существует*** $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$**.**

Доказательство. Проведем доказательство первого случая. Второй случай совершенно аналогичен. По условию, множество значений, которые принимает последовательность $\{a_n\}$, ограничено сверху. По теореме **5.1** существует его точная верхняя грань *A*. Докажем, что $A = \lim_{n\to\infty} a_n$. Для этого возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. По определению *A*, любое меньшее число, в частности число $A - \varepsilon$, уже не является верхней гранью множества значений, принимаемых последовательностью $\{a_n\}$. Значит, при некотором $N \in \mathrm{N}\ a_n > A - \varepsilon$, или $A - a_N < \varepsilon$. Кроме того, $A - a_N \geq 0$, т.к. *A* – верхняя грань множества значений $\{a_n\}$.

Итак, $0 \leq A - a_N < \varepsilon$. Но при $n > N\ \ a_n \geq a_N$, поэтому $0 \leq A - a_N < \varepsilon_N$ $|a_n - A| < \varepsilon$. Таким образом, для любого ε существует *N* такое, что для всех $n > N$ выполняется неравенство $|a_n - A| < \varepsilon$. Поэтому $\lim_{n\to\infty} a_n = A(= \sup_{n\in N}\{a_n\})$.

<u>Билет 10. Число е.</u>

<u>Теорема 10.1</u>. *Существует предел последовательности* $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$**.**

Доказательство. Сначала докажем лемму

<u>Лемма 10.1. (неравенство Бернулли)</u>.

Если $a \geq -1$**, то** $(1+\alpha)^n \geq 1+\alpha n$.

Доказательство. Используем метод математической индукции. При $n=1$ имеем: $(1+\alpha)^1 = 1+1\times\alpha,\quad 1+\alpha = 1+\alpha$. Предположим, что при $n=k$ неравенство верно: $(1+\alpha)^k \geq 1+k\alpha$. Тогда при $n=k+1$имеем: $(1+\alpha)^{k+1} = (1+\alpha)(1+\alpha)^k \geq (1+\alpha)(1+\alpha k) = 1+(k+1)\alpha + k\alpha^2 \geq 1+(k+1)\alpha$. Неравенство доказано.

$$\frac{y_{n-1}}{y_n} = \frac{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}} = \frac{\left(\frac{n}{n-1}\right)^n}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}} = \frac{n^n \cdot n^{n+1}}{(n-1)^n (n+1)^{n+1}} = \frac{n^{2n}}{(n^2-1)^n}\cdot\frac{n}{n+1} = \left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^n \cdot \frac{n}{n+1}$$

Чтобы доказать существование предела $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, рассмотрим последовательность $y_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$. Для членов этой последовательности применим неравенство Бернулли, обозначив $\alpha = \frac{1}{n^2-1}$, при этом очевидно, что $\alpha \geq -1$. $\left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^n \cdot \frac{n}{n+1} \geq \left(1+\frac{n}{n^2-1}\right)\cdot\frac{n}{n+1} \geq \left(1+\frac{n}{n^2}\right)\cdot\frac{n}{n+1} = \left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot\frac{n}{n+1} = 1$.

Таким образом, $\frac{y_{n-1}}{y_n} \geq 1$. Так как $y_n > 0$, то $y_{n-1} > y_n$, поэтому рассматриваемая последовательность убывает и ограничена снизу. Значит, существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$. Так как $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right) = 1$, то и

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-1}=1$. Следовательно, $\exists\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-1}$. Таким образом, $e=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$.

Теорема 10.2. *Имеет место равенство* $e=\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$.

Доказательство. (НА ЭКЗАМЕНЕ НЕОБЯЗАТЕЛЬНО ЕГО ЗНАТЬ. ПРИВЕДЕНО ДЛЯ ИНТЕРЕСУЮЩИХСЯ МАТЕМАТИКОЙ)

1. Докажем сначала, что $e=\lim\limits_{x\to +0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$.

Обозначим за n целую часть отношения $\frac{1}{x}$. $n=\left[\frac{1}{x}\right]$. Тогда справедливо неравенство: $n\le\left[\frac{1}{x}\right]\le n+1$. Перепишем его в виде $\frac{1}{n}\ge x\ge\frac{1}{n+1}$. Тогда $1+\frac{1}{n+1}<1+x\le 1+\frac{1}{n}$. При этом $\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n}<(1+x)^{\frac{1}{x}}<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$, $\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\cdot\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{-1}<(1+x)^{\frac{1}{x}}<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)$. В полученном неравенстве левая и правая части стремятся к e, т.к.

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\to e,\quad \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{-1}\to 1,\quad \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\to e\quad \left(1+\frac{1}{n}\right)\to 1.$$

Таким образом, по теореме “о зажатой переменной” получаем, что $e=\lim\limits_{x\to +0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$.

2. Докажем теперь, что $e=\lim\limits_{x\to -0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$.

Обозначим $y=-x$. Получаем, что

$(1+x)^{\frac{1}{x}}=(1-y)^{-\frac{1}{y}}=\left(\frac{1}{1-y}\right)^{\frac{1}{y}}=\left(\frac{1-y+y}{1-y}\right)^{\frac{1}{y}}=\left(1+\frac{y}{1-y}\right)^{\frac{1}{y}}$. Выражение $\frac{y}{1-y}\to +0$ при $x\to -0$. Обозначив $t=\frac{y}{1-y}$ получаем, что $t\to +0,\quad y=\frac{t}{t+1}$. Тогда

$\left(1+\frac{y}{1-y}\right)^{\frac{1}{y}}=(1+t)^{\frac{t+1}{t}}=(1+t)^{\frac{1}{t}}\cdot(1+t)$. Полученное выражение стремится к e при $t\to +0$, т.к. $(1+t)^{\frac{1}{t}}\to e,\quad (1+t)\to 1$. Теорема доказана.

Билет 11. Критерий Коши существования предела последовательности

Определение 11.1. *Пусть задана последовательность* $a_1, a_2, ..., a_n, ...$ *и пусть* $1 \le n_1 < n_2 ... < n_k < ...$ *- возрастающая последовательность натуральных чисел. Тогда последовательность* $a_{n_1}, a_{n_2}, ..., a_{n_k}, ...$ *–* ***подпоследовательность*** *исходной последовательности.*

Теорема 11.1. ***Последовательность*** $a_1, a_2, ..., a_n, ...$ ***имеет предел A тогда и только тогда, когда любая её подпоследовательность имеет предел, равный A.***

Поскольку последовательность сама является одной из своих подпоследовательностей (для которой $n_1 = 1, n_2 = 2, ..., n_k = k, ...$), утверждение теоремы очевидно в одну сторону.

Обратно, из определения подпоследовательности сразу вытекает, что для любого k выполняется неравенство $n_k \ge k$. Если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$,то для любого $\varepsilon > 0$ существует N такое, что при $n > N$ выполняется неравенство $|a_n - A| < \varepsilon$.При этом для любой подпоследовательности $a_{n_1}, a_{n_2}, ..., a_{n_k}, ...$ при $k > N$ выполняется неравенство $n_k \ge k > N$, из которого следует, что $|a_{n_k} - A| < \varepsilon$. Это означает, что $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n_k} = A$.

Теорема 11.2. (Лемма Больцано-Вейерштрасса).

Из любой ограниченной бесконечной последовательности можно извлечь подпоследовательность, сходящуюся к конечному пределу.

1. Если множество значений , которые принимает последовательность a_n конечное, т.е. $\{a_n\} = \{b_1, b_2, \dots, b_m\}$, то хотя бы одно из значений $b_1, ..., b_m$, обозначим его b, она принимает бесконечно много раз, т.е.

существует бесконечное множество номеров $n = n_1, n_2, ..., n_m, ...$ таких, что $a_{n_i} = b, i = 1, 2, ...$. Поэтому $\lim\limits_{k\to\infty}\{a_{n_i}\} = b$, подпоследовательность $\{a_{n_i}, i = 1, 2, ...\}$ – искомая.

2. Рассмотрим теперь случай, когда множество значений бесконечно. Так как $\{a_{n_i}\}$ - бесконечное ограниченное множество, то по теореме **6.1** существует предельная точка этого множества, равная A. Покажем, что существует последовательность $n_1 < n_2 < ... < n_k < ...$ такая, что $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n_k} = A$. По определению предельной точки, для $\varepsilon_1 = 1$ существует номер n_1 такой, что $|a_{n_1} - A| < \varepsilon_1$. Положим $\varepsilon_2 = \min(\frac{1}{2}, |a_{n_1} - A|)$. Существует n_2 такое, что $|a_{n_2} - A| < \varepsilon_2$. Точка $a_{n_1} \neq a_{n_2}$, т.к. $\varepsilon_2 < |a_{n_1} - A|$, а номер n_2 выбираем так, чтобы выполнялось неравенство $n_2 > n_1$, что можно сделать, так как в любой окрестности предельной точки содержится бесконечное число элементов этого множества. Далее, $\varepsilon_3 = \min(\frac{1}{3}, |a_{n_2} - A|)$. Как и раньше, строим a_{n_3} так, что $|a_{n_3} - A| < \varepsilon_3$ и $n_3 > n_2 > n_1$. Продолжая этот процесс, получаем последовательность $a_{n_1}, a_{n_2}, ..., a_{n_k}, ...$ такую, что $|a_{n_k} - A| < \frac{1}{k}$, что означает, что $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = A$.

Определение 11.2. *Последовательность* $\{a_n\}$ *называется* ***фундаментальной****, если для любого положительного* ε *существует такое* $N(\varepsilon)$*, что для всех* $m, n > N(\varepsilon)$ *разность значений* a_m, a_n *по модулю меньше* ε*, т.е.* $\forall\varepsilon > 0 \quad \exists N(\varepsilon) \quad \forall m, n > N(\varepsilon) \quad |a_n - a_m| < \varepsilon$.

Теорема 11.3. (Критерий Коши для последовательности).

Предел последовательности существует тогда и только тогда, когда эта последовательность является

фундаментальной.

<u>Необходимость</u> $(\Rightarrow)$

То, что последовательность имеет предел, запишем так:

$\forall\varepsilon>0 \quad \exists N(\varepsilon) \quad \forall n>N(\varepsilon) \quad |a_n-A|<\frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall m>N(\varepsilon) \quad |a_m-A|<\frac{\varepsilon}{2}$. Легко видеть, что $|a_m-a_n|=|(a_m-A)-(a_n-A)|$. По свойству модулей: $|c-d|\le|c|+|d|$. Обозначив $c=a_m-A, d=a_n-A$, имеем: $|(a_m-A)-(a_n-A)|\le|a_m-A|+|a_n-A|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$, т.е. из существования предела последовательности легко следует ее фундаментальность.

<u>Достаточность</u> $(\Leftarrow)$

Во-первых, из фундаментальности последовательности следует ее ограниченность. Действительно, пусть $\varepsilon=1$. Тогда существует $N\in\mathrm{N}$ такое, что для всех $m,n>N$ имеет место неравенство $|a_m-a_n|<1$. Положим $m=N+1$. Тогда для всех $n>N$ $|a_n-a_{N+1}|<1$, т.е. $a_{N+1}-1<a_n<a_{N+1}+1$. Пусть $C_0=\max(|a_{N+1}-1|,|a_{N+1}+1|)$. Из этих неравенств тогда следует, что при $n>N$ имеем: $|a_n|<C_0$. Положим $C=\max(|a_1|,...,|a_N|,C_0)$. Теперь для всех $n\in\mathrm{N}$ имеет место неравенство $|a_n|\le C$, т.е. $\{a_n\}$ - ограниченная последовательность.

По теореме 11.2 существует подпоследовательность $\{a_{n_k}\}$ такая, что она имеет некоторый предел A , т.е. $\lim\limits_{k\to\infty}a_{n_k}=A$. Докажем, что вся последовательность имеет тот же предел, т.е . что $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$, для чего достаточно доказать, что $\forall\,\varepsilon>0 \ \exists N_0 \ \forall\,n>N_0 \quad |a_n-A|<\varepsilon$.

У нас доказано, что $\forall\,\varepsilon>0 \ \exists K \ \forall\,k>K \, |a_{n_k}-A|<\frac{\varepsilon}{2}$, что

$\forall\,\varepsilon>0 \ \exists N \,\forall\,n>N_1, m>N \ |a_n-a_m|<\frac{\varepsilon}{2}$.

Если $N_0 = \max(K, N)$ и если $k > N_0$, то $k > K$, поэтому

$\left|a_n - A\right| = \left|a_n - a_{n_k}\right| + \left|a_{n_k} - A\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$, что и требовалось доказать.

Билет 12.Непрерывность функции. Свойства непрерывных функций

Окрестностью действительного числа назовём любой интервал в Р , содержащий это число. Таким образом, окрестностью числа $x_0 \in Р$ будет всякий конечный интервал (a,b), $a < x_0 < b$, всякий бесконечный интервал $(-\infty, b)$, $x_0 < b$, каждый бесконечный интервал $(a, +\infty)$, $a < x_0$, и всё $Р = (-\infty, +\infty)$. Произвольную окрестность точки $x_0 \in Р$ обозначим символом $U(x_0)$. Из определения следует, что: 1) точка принадлежит каждой своей окрестности; 2) всякий интервал, содержащий окрестность точки, есть окрестность этой точки; и 3) окрестность точки x_0 есть окрестность каждой другой своей точки. Кроме того, 4) пересечение двух любых окрестностей точки есть окрестность этой точки.

Среди всех окрестностей числа $x_0 \in Р$ выделяют окрестность специального вида. Пусть δ – произвольное положительное число; δ-*окрестностью* числа x_0 называется интервал $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$; то есть множество всех чисел x, удовлетворяющих двойному неравенству $x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$. Оно равносильно одному неравенству $|x - x_0| < \delta$, так что δ-окрестность числа x_0 есть совокупность всех точек числовой прямой, отстоящих от x_0 на расстоянии, меньшем, чем δ; δ-окрестность числа x_0 обозначим $U(x_0, \delta)$; число δ называют *радиусом* этой окрестности.

Нетрудно проверить, что любая окрестность числа содержит некоторую δ-окрестность этого числа, а любые два различные действительные числа обладают непересекающимися окрестностями.

Если из окрестности $U(a) = (\alpha, \beta)$ точки $a \in Р$, $\alpha < a < \beta$, удалить точку a, то полученное множество $\overset{\circ}{U}(a) = U(a) \setminus \{a\} = (\alpha, a) \cup (a, \beta)$ называют *проколотой окрестностью* точки a. Интервал (α, a) называют *левой* (проколотой) *окрестностью* точки a, интервал (a, β) – *правой* (проколотой) *окрестностью* точки a. Как и в случае окрестностей, проверяется, что пересечение двух проколотых окрестностей точки образует проколотую окрестность этой точки и что каждая проколотая окрестность $\overset{\circ}{U}(a)$ точки a содержит некоторую её *проколотую* δ*-окрестность* $\overset{\circ}{U}(a, \delta) = (a - \delta, a) \cup (a, a + \delta)$, $\delta > 0$. Аналогично, любая левая [правая] окрестность точки $a \in \mathrm{P}$ содержит некоторую её левую [правую] δ-*окрестность* $(a - \delta, a)$ $[(a, a + \delta)]$, $\delta > 0$.

Непрерывность функции в точке

Пусть f – числовая функция, определённая в окрестности $U(x_0)$ точки x_0. Разность между произвольным значением $x \in U(x_0)$ и x_0 называется приращением аргумента x в точке x_0 и обычно обозначается Δx. Таким образом, $\Delta x = x - x_0$, $x = x_0 + \Delta x$.

Разность между значениями функции f в точке x и в точке x_0 называют приращением функции в точке x_0 и обычно обозначают $\Delta f(x_0)$. Таким образом, $\Delta f(x_0) = f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.

Естественно определить непрерывность f в x_0 как свойство, состоящее в том, что малые приращения аргумента x в x_0 вызывают малые приращения функции f в x_0, т.е. $\Delta f(x_0)$ можно сделать сколь угодно малым, если взять достаточно малым Δx.

Определение 12.1 (О. Коши). *Функция* f*, определенная в окрестности* $U(x_0)$ *точки* x_0 *называется* ***н е п р е р ы в н о й*** *в точке* x_0, *если для произвольного положительного числа* ε *можно указать такое число* $\delta > 0$, *что в каждой точке* x, $|x - x_0| < \delta$ *справедливо неравенство* $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$, *иными словами, для каждого* $\varepsilon > 0$ *существует такое* $\delta > 0$, *что неравенство* $|\Delta x| < \delta$ *влечёт неравенство* $|\Delta f(x_0)| < \varepsilon$.

Пример 12.1. Постоянные всюду непрерывны.

Пример 12.2. Линейная функции $f(x) = ax + b$, $a \neq 0$, непрерывна всюду на P .

▼Для произвольных $x_0, x \in \mathrm{P}$ имеем $f(x) - f(x_0) = a(x - x_0)$. Для произвольного $\varepsilon > 0$ рассмотрим $\delta = \dfrac{\varepsilon}{|a|} > 0$. Для произвольных $x_0, x \in \mathrm{P}$ и $|x - x_0| < \delta$ справедливо неравенство $|f(x) - f(x_0)| = |a| \cdot |x - x_0| < |a| \cdot \delta = \varepsilon$. ▲

Пример 12.3. Функция $|x|$ непрерывна всюду на P .

▼Для произвольных $x_0, x \in \mathrm{P}$ имеем $\big||x| - |x_0|\big| \leq |x - x_0|$. Поэтому, если $\varepsilon > 0$ – произвольное и $\delta = \varepsilon > 0$, то $\big||x| - |x_0|\big| < \varepsilon$ для всех x с $|x - x_0| < \delta$. ▲

<u>Теорема 12.1.(</u> Критерий непрерывности функции в точке)

Функция f ***непрерывна в точке*** x_0 ***тогда и только тогда, когда для произвольной последовательности*** (x_n) ***точек*** $x_n \in D_f$***,*** $n \in \mathrm{N}$***, имеющей*** $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x_0$***, числовая последовательность*** $(f(x_n))$ ***сходится и*** $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = f(x_0)$***; т.е.*** $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = f(\lim\limits_{n\to+\infty} x_n)$***.***

▼**Необходимость.** Пусть функция f непрерывна в точке x_0. Согласно определению 12.1, для произвольного $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$, если $|x - x_0| < \delta$. Рассмотрим произвольную последовательность (x_n), $n \in \mathrm{N}$, имеющую $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x_0$. Тогда для любого числа $\delta > 0$ можно указать такой индекс $N \in \mathrm{N}$, что $|x_n - x_0| < \delta$ для всех $n \geq N$. (Отметим, что выбор числа N зависит от δ, выбор которого зависит от ε, и, следовательно, выбор числа N в конечном счёте зависит от ε). Поэтому $|f(x_n) - f(x_0)| < \varepsilon$ для всех $n \geq N$, т.е. $f(x_0) = \lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n)$.

Достаточность. Пусть выполнено свойство, указанное во второй части формулировки теоремы, но функция f не непрерывна в точке x_0. Согласно обращению определения 12.1, существует такое число $\varepsilon_0 > 0$, что для произвольного числа $\delta > 0$ найдётся такая точка $x_\delta \in D_f$ и $|x_\delta - x_0| < \delta$, в которой $|f(x_\delta) - f(x_0)| \geq \varepsilon_0$. Рассмотрим $\delta_n = 1/n > 0$, $n \in \mathrm{N}$, и выберем для каждого $n \in \mathrm{N}$ такую точку $x_n \in D_f$, что и $|x_n - x_0| < \delta_n = 1/n$, $n \in \mathrm{N}$, и $|f(x_n) - f(x_0)| \geq \varepsilon_0$, $n \in \mathrm{N}$. Поскольку $\lim\limits_{n\to+\infty} 1/n = 0$, то, на основании оценочного признака существования предела последовательности, $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x_0$. Неравенства $|f(x_n) - f(x_0)| \geq \varepsilon_0$, $n \in \mathrm{N}$, показывают, что $f(x_0)$ не является пределом последовательности $(f(x_n))$, что противоречит условию. Следовательно, функция f обязана быть непрерывной в точке x_0. ▲

Таким образом, в нашем распоряжении имеются не только две методики в изучении свойств непрерывных функций, основанные на определении Коши и на свойствах сходящихся последовательностей, но и возможность оптимального их выбора при доказательствах.

Доказанный критерий позволяет считать свойство, равносильное исходному определению непрерывности функции, равносильным определением (которое обычно называют ***определением по Гейне***)

Непрерывность сложной функции (композиции функций)

<u>Теорема 12.3.</u> ***Если функция*** g ***непрерывна в точке*** x_0***, а функция*** f ***непрерывна в точке*** $y_0 = g(x_0)$***, то композиция*** $f \cdot g$ ***этих функций непрерывна в точке*** x_0***.***

▼По условию теоремы, для произвольной последовательности (x_n), $n \in \mathrm{N}$, $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = x_0$, по критерию непрерывности функции g в точке x_0, имеем $\lim\limits_{n \to +\infty} y_n = \lim\limits_{n \to +\infty} g(x_n) = g(x_0) = y_0$. Применяя критерий непрерывности к функции f в точке y_0, получим, что существует $\lim\limits_{n \to +\infty} f(y_n) = f(y_0)$. Поскольку $f(y_n) = f(g(x_n)) = (f \cdot g)(x_n)$, $n \in \mathrm{N}$, и $f(y_0) = f(g(x_0)) = (f \cdot g)(x_0)$, то $\lim\limits_{n \to +\infty} (f \cdot g)(x_n) = (f \cdot g)(x_0)$ для любой последовательности (x_n), $n \in \mathrm{N}$, $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = x_0$. Согласно критерию непрерывности функции в точке, функция $f \cdot g$ непрерывна в x_0. ▲

Свойство сохранения неравенства (знака)

<u>Теорема 12.4.</u> ***Пусть функция*** f ***непрерывна в точке*** x_0***. Если*** $f(x_0) > c$***, то существует такая окрестность*** U_1 ***точки*** x_0***, что*** $f(x)$ ***больше*** c ***для всех*** $x \in U_1$***. Если*** $f(x_0) < d$***, то существует такая окрестность*** U_2 ***точки*** x_0***, что*** $f(x) < d$ ***для всех*** $x \in U_2$***.***

▼Согласно определению 12.1, для числа $\varepsilon_1 = f(x_0) - c > 0$ существует такое число $\delta_1 > 0$, что $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon_1$ для всех x, $|x - x_0| < \delta_1$. Поэтому, в частности, $f(x) > f(x_0) - \varepsilon_1 = c$ для всех $x \in U_1$, где U_1 – δ_1-окрестность точки x_0.

Аналогично, согласно определению 12.1, для числа $\varepsilon_2 = d - f(x_0) > 0$ существует такое число $\delta_2 > 0$, что $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon_2$ для всех x,

$|x - x_0| < \delta_2$. Тогда, в частности, $f(x) < f(x_0) + \varepsilon_2 = d$ для всех $x \in U_2$, где U_2 – δ_2-окрестность точки x_0. ▲

Свойство локальной ограниченности

<u>Теорема 12.5.</u> ***Если функция f непрерывна в точке x_0, то f ограничена в некоторой окрестности U точки x_0.***

▼Полагая в условиях теоремы 6.4 $c = f(x_0) - 1$ и $d = f(x_0) + 1$, найдём на основании её утверждения такие окрестности U_1 и U_2 точки x_0, что $f(x) > f(x_0) - 1$ для всех $x \in U_1$ и $f(x) < f(x_0) + 1$ для всех $x \in U_2$. Согласно свойству 4) окрестностей, пересечение $U_1 \bigcap U_2 = U$ есть окрестность точки x_0, в которой выполняется двойное неравенство $f(x_0) - 1 < f(x) < f(x_0) + 1$ ▲

Арифметические действия над непрерывными функциями

<u>Теорема 12.6.</u> ***Если функции f и g непрерывны в точке x_0, то: 1) $f + g$ непрерывна в точке x_0; 2) cf непрерывна в x_0 для всех $c \in \mathrm{P}$; 3) $f \cdot g$ непрерывно в x_0; 4) $\dfrac{f}{g}$ непрерывно в x_0, когда $g(x_0) \neq 0$.***

▼ Доказательство всех четырех утверждений теоремы ведется единообразным способом, который продемонстрируем в случае утверждения 3)

Рассмотрим произвольную последовательность (x_n), $x_0 \in D_{f \cdot g}$, $n \in \mathrm{N}$, для которой $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = x_0$. Тогда $x_n \in D_f$ и $x_n \in D_g$, $n \in \mathrm{N}$, и, по критерию непрерывности функции в точке (пункт 6.1.3), $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x_n) = f(x_0)$,

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x_n)=g(x_0)$. Поскольку $(f\cdot g)(x_n)=f(x_n)\cdot g(x_n)$, $n\in\mathrm{N}$, то по свойству сходящихся последовательностей существует $\lim\limits_{x\to\infty}(f\cdot g)(x_n)=$
$=\lim\limits_{x\to\infty} f(x_n)\cdot \lim\limits_{x\to\infty} g(x_n)=f(x_0)\cdot g(x_0)=(f\cdot g)(x_0)$, и по критерию 12.1функция $f\cdot g$ непрерывна в x_0.

Пусть теперь $g(x_0)\neq 0$. Согласно свойству сохранения знака (теорема 6.4), существует такой индекс $N\in\mathrm{N}$, что $g(x_n)\neq 0$ для всех $n\geq N$; т.е., $x_n\in D_{1/g}$, $n\geq N$. Поэтому, в силу свойства локальности предела последовательности и критерия 12.1 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{g}(x_n)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{g(x_n)}=\frac{1}{g(x_0)}=\frac{1}{g}(x_0)$, и функция $\frac{1}{g}$ непрерывна в точке x_0, а вместе с ней и функция $\frac{f}{g}=f\cdot\frac{1}{g}$. ▲

Непрерывные функции

Определение 12.3. *Точки, в которых функция непрерывна, называют* ***т о ч к а м и   н е п р е р ы в н о с т и*** *этой функции. Функцию называют* ***н е п р е р ы в н о й*** *, если все точки её области определения — точки непрерывности.*

Билет 13. Определение предела функции, арифметические свойства предела, предельный переход в неравенствах

Эвристические рассуждения, приводящие к понятию предела функции в точке(приведены для облегчения понимания, что такое предел)

Этот пункт на экзамене необязателен.

Рассмотрим функцию $sgn\,x$ (читается: знак икс), определяемую выражением

$$\operatorname{sgn} x=\begin{cases}-1, & x<0,\\ 0, & x=0,\\ 1, & x>0.\end{cases}$$

Функция $sgn\,x$ не является непрерывной функцией в точке $x_0=0$, поскольку в этой точке не выполняется критерий непрерывности функции (см. раздел 6.1.3). Действительно, последовательность (x_n), $x_n = 1/n$, $n \in \mathrm{N}$, сходится к числу 0 ($\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$),

последовательность $(sgn\, x_n)$, $sgn\, x_n = 1$ ($x_n = \frac{1}{n} > 0$), $n \in \mathrm{N}$ — постоянная и

$\lim\limits_{n\to+\infty} sgn\, x = 1$, но этот предел (число 1) не совпадает со значением функции $sgn\, x$ в точке

$x_0 = 0$ ($sgn\, 0 = 0 \neq 1$). Аналогично, последовательность (y_n), $y_n = -\frac{1}{n} < 0$, $n \in \mathrm{N}$,

сходится к числу 0 ($\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(-\frac{1}{n}\right) = -\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n} = 0$), последовательность $(sgn\, y_n)$,

$sgn\, y_n = -1$, $n \in \mathrm{N}$ — постоянная, имеет $\lim\limits_{n\to+\infty} sgn\, y_n = -1$ и $-1 \neq 0 = sgn\, 0$.

В остальных точках $x \neq 0$ функция $sgn\, x$ непрерывна, поскольку в некоторой окрестности каждой точки $x \neq 0$ она постоянная. График функции $sgn\, x$ изображен на рис. 7.1.

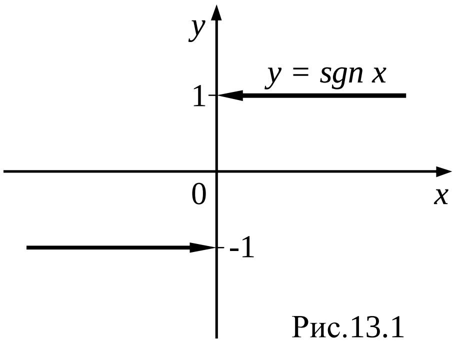


Рис.13.1

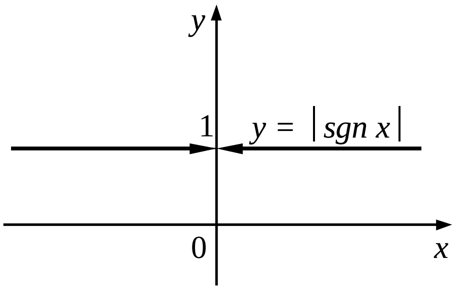


Рис.13.2.

Не будет непрерывной в точке $x_0 = 0$ и функция $f(x) = |sgn\, x|$,

$$|sgn\, x| = \begin{cases} 1, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

поскольку $|sgn\, x| = |sgn\, y_n| = 1$, $n \in \mathrm{N}$, и $\lim\limits_{n\to+\infty}|sgn\, x_n| = \lim\limits_{n\to+\infty}|sgn\, y_n| = 1$, но

$1 \neq 0 = |sgn\, 0|$. В остальных точках $x \neq 0$ функция $|sgn\, x|$ непрерывна. График функции $|sgn\, x|$ изображен на рис. 7.2.

Однако характеры поведения функций $sgn\, x$ и $|sgn\, x|$ в окрестности точки $x_0 = 0$ качественно различные. Для функции $f(x) = |sgn\, x|$ можно указать такое число l (а именно, $l = 1$), что $l = 1 = \lim\limits_{n\to+\infty} f(z_n) = \lim\limits_{n\to+\infty}|sgn\, z_n|$ для любой последовательности (z_n), $z_n \neq 0$, $n \in \mathrm{N}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} z_n = 0$, поскольку, по определению, $|sgn\, z_n| = 1$, $z_n \neq 0$, $n \in \mathrm{N}$. Кроме того, для любого отличного от нуля приращения $\Delta x = x - x_0 = x \neq 0$ аргумента x в точке $x_0 = 0$ разность $f(x) - l = |sgn\, x| - 1 = 0$, и, следовательно, $|f(x) - l| < \varepsilon$ для любого числа $\varepsilon > 0$ и всех $x \neq x_0\ (= 0)$; в частности $|f(x) - l| < \varepsilon$ для всех $x \neq x_0$ и $|x - x_0| = |x| < \delta$, где $\delta = \varepsilon > 0$. Число $l = 1$ называют пределом функции $f(x) = |sgn\, x|$ в точке $x_0 = 0$.

Число $l = 1$ будет пределом в точке $x_0 = 0$ также и для функции g, областью определения D_g которой служит множество $\mathrm{P} \setminus \{0\}$ (то есть все $x \neq 0$), а значения $g(x) = |sgn\, x| = 1$, $x \in D_g$, ($x \neq 0$), поскольку неравенство $|g(x) - 1| = |1 - 1| = 0 < \varepsilon$ справедливо для всех $x \in D_g$ и $0 < |x - x_0| = |x| < \delta$, где $\delta = \varepsilon > 0$.

Аналогичного числа l для функции $sgn\, x$ в точке $x_0 = 0$ указать нельзя. В приведённых выше рассуждениях важны следующие три обстоятельства. Во-первых, значения приращения аргумента функции $f(x) = |sgn\, x|$ в точке $x_0 = 0$ выбираются все отличными от нуля; то есть точка $x = x_0 + \Delta x \neq x_0$. Во-вторых, поскольку всегда $\Delta x \neq 0$, то x_0 не может быть изолированной точкой области определения D_f функции f, а напротив, любая как угодно малая окрестность точки x_0 должна содержать хотя бы одну точку x из области определения функции f, отличную от x_0. И, наконец, в-третьих, перестаёт быть важным само свойство принадлежности точки x_0 области определения D_f функции, ибо вклад в число $l = 1$ дают лишь те значения функции $f(x) = |sgn\, x|$, которые принимаются ею в точках, отличных от $x_0 = 0$. Последнее обстоятельство явно проявилось при рассмотрении функции g, $D_g = \mathrm{P} \setminus \{0\}$ и $g(x) = |sgn\, x| = 1$, $x \in D_g$. Наконец, укажем на ещё одно важное обстоятельство: если рассмотреть непрерывную функцию $h(x) = l = 1$, $x \in \mathrm{P} = D_h$, то $h = g$ для всех $x \in D_g = \{x_0\}$, $x_0 = 0$, и $h(x_0) = l = 1$, где l – предел функции g в точке $x_0 = 0$.

Пусть $f(x)$ определена в некоторой проколотой окрестности $\dot{W}(a)$ точки *a*.

<u>Определение 13.1.</u> *Функция $f(x)$ имеет при $x \to a$ **предел,** равный числу A тогда и только тогда, когда для любой окрестности $V(A)$ точки A существует проколотая окрестность $\dot{U}(a)$ точки a $(\dot{U}(a) \subset \dot{W}(a))$ такая,* *что* $f(\dot{U}(a)) \subset V(A)\, f(\dot{U}(a))$, *или, равносильно, такая, что для любого* $x \in \dot{U}(a)$ $f(x) \in V(A)$. С помощью логических символов это определение записывается так: $\forall V(A)\, \exists \dot{U}(a)\, \forall x \in \dot{U}(a)$ $f(x) \in V(A)$

Данное определение называется определением предела по Коши.

В этом определении можно вместо произвольной $V(A)$ рассматривать $V_\varepsilon(A)$ при произвольном $\varepsilon > 0$ и, соответственно, вместо $\dot{U}(a)$ - проколотую окрестность $\dot{U}_\delta(a)$. Тогда оно примет вид:

$\forall V_\varepsilon(A)\, \exists \dot{U}(a)_\delta(a)\, \forall x \in \dot{U}_\delta(a)$ $f(x) \in V_\varepsilon(A)$.

Вспоминая, что условие $x \in \dot{U}_\delta(a)$ равносильно неравенствам $0 < |x - a| < \delta$, а условие $f(x) \in V_\varepsilon(A)$ равносильно условию $|f(x) - A| < \varepsilon$, получаем равносильную определению 13.1 запись определения предела на "языке $\varepsilon - \delta$": $\forall \varepsilon > 0\, \exists\, \delta > 0\ \forall x$ $0 < |x - a| < \delta$ $|f(x) - A| < \varepsilon$

<u>Теорема 13.1.</u> ***Если предел функции*** $f(x)$ ***при*** $x \to a$ ***существует, то он единственен, т.е.*** $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A_1$**,** $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A_2$ ***, то*** $A_1 = A_2$**.**

Доказательство. Пусть снова функция $f(x)$ имеет при $x \to a$ два предела, A_1 и A_2. Тогда, применяя определения предела при $x \to a$ получаем, что для $\varepsilon = \dfrac{|A_2 - A_1|}{2}$ существуют числа δ_1 и δ_2 такие, что при $0 < |x - a| < \delta_1$ выполняется неравенство $|f(x) - A_1| < \dfrac{|A_2 - A_1|}{2}$, а при $0 < |x - a| < \delta_2$ выполняется неравенство $|f(x) - A_2| < \dfrac{|A_2 - A_1|}{2}$. Тогда положим $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$ и потребуем, чтобы $0 < |x - a| < \delta$. При этом

$$|A_2 - A_1| = |A_2 - f(x) + f(x) - A_1| \le |A_2 - f(x)| + |f(x) - A_1| = |f(x) - A_2| + |f(x) - A_1| <$$
$$< \frac{|A_2 - A_1|}{2} + \frac{|A_2 - A_1|}{2} = |A_2 - A_1|$$

Полученное противоречие доказывает теорему.

Определение 13.2. *Функция* $\alpha(x)$ - ***бесконечно малая*** *при* $x \to a$*, если* $\lim\limits_{x\to a}\alpha(x)=0$.

Теорема 13.2. $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$ ***тогда и только тогда, когда*** $f(x)=A+\alpha(x)$***, где*** $\alpha(x)$ ***- бесконечно малая при*** $x \to a$ ***функция.***

Доказательство. Обозначим $\alpha(x)=f(x)-A$. Условие $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$ равносильно тому, что $\forall\,\varepsilon>0\,\exists\,\delta>0\;\forall x\;\; 0<|x-a|<\delta\;\; |f(x)-A|<\varepsilon$, что равносильно условию $\forall\,\varepsilon>0\,\exists\,\delta>0\;\forall x\;\; 0<|x-a|<\delta\;\; |\alpha(x)|<\varepsilon$, что, в свою очередь, означает, что $\alpha(x)$ - бесконечно малая при $x \to a$.

Определение 13.4. Функция $\beta(x)$ называется ***ограниченной*** при $x \to a$, если она ограничена в некоторой $\dot{U}(a)$, т.е. если $\exists c:\;\; \forall x\in \dot{U}(a)\;\; |\beta(x)|<c$.

Теорема 13.3. (Свойства бесконечно малых)

1. ***Если*** $\alpha_1(x)$ ***и*** $\alpha_2(x)$ ***- бесконечно малые при*** $x\to a$***, то алгебраическая сумма -*** $\alpha_1(x)\pm\alpha_2(x)$ ***тоже бесконечно малая при*** $x\to a$***;***
2. ***Если*** $\alpha(x)$ ***- бесконечно малая и*** $\beta(x)$ ***- ограниченная при*** $x\to a$***, то произведение*** $\alpha(x)\cdot\beta(x)$ ***есть бесконечно малая при*** $x\to a$***;***
3. ***Если*** $\alpha_1(x)$ ***и*** $\alpha_2(x)$ ***- бесконечно малые при*** $x\to a$***, то произведение -*** $\alpha_2(x)\cdot\alpha_2(x)$ ***тоже бесконечно малая при*** $x\to a$***.***

Доказательство. Доказательство проводим для случая бесконечно малых функций.

1. Зафиксируем произвольное $\varepsilon>0$ и рассмотрим $\varepsilon/2$. Тогда, по определению предела,

$$\exists\delta_1>0\;\forall x: 0<|x-a|<\delta_1\;|\alpha_1(x)|<\frac{\varepsilon}{2}$$

$$\exists\delta_2>0\;\forall x: 0<|x-a|<\delta_2\;|\alpha_2(x)|<\frac{\varepsilon}{2}$$

Обозначив $\delta=\min(\delta_1,\delta_2)$, получаем:

$$0<|x-a|<\delta \Rightarrow \begin{cases}0<|x-a|<\varepsilon_1\\ 0<|x-a|<\varepsilon_2\end{cases} \Rightarrow \begin{matrix}|a_1|<\dfrac{\varepsilon}{2}\\ |a_2|<\dfrac{\varepsilon}{2}\end{matrix}$$

По свойству модулей: $|c+d| \le |c|+|d|$, обозначив $c = a_1(x), d = a_2(x)$ получаем:

$|\alpha_1(x) \pm \alpha_2(x)| \le |\alpha_1(x)| + |\alpha_2(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. Таким образом,

$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \; \forall x : 0 < |x-a| < \delta$

$|\alpha_1(x) \pm \alpha_2(x)| < \varepsilon$, т.е. $\alpha_1(x) \pm \alpha_2(x)$ - бесконечно малая.

2. $\beta(x)$ - ограничена при $x \to a$ т.е. $\exists \; U_{\delta_0}(a)$, $\exists c$: $\forall x \in \dot{U}_{\delta_0}(a)$ $|\beta(x)| < c$.

Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$ и рассмотрим $\frac{\varepsilon}{c}$. Тогда

$\exists \delta_1 > 0 \; \forall x : 0 < |x-a| < \delta_1 \, |\alpha_1(x)| < \frac{\varepsilon}{c}$.

Обозначив за $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$ получаем:

$0 < |x-a| < \delta \Rightarrow \begin{cases} 0 < |x-a| < \delta_1 \\ 0 < |x-a| < \delta_2 \end{cases} \Rightarrow |\alpha(x)| < \frac{\varepsilon}{c}, |\beta(x)| < c \Rightarrow |\alpha(x) \cdot \beta(x)| < \varepsilon$. Значит,

$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \; \forall x : 0 < |x-a| < \delta$, т.е. $\alpha(x) \cdot \beta(x)$ - бесконечно малая при $x \to a$.

3. Докажем сначала лемму**.**

Лемма 13.1. Если $\alpha(x)$- бесконечно малая при $x \to a$, то она ограничена при $x \to a$ (наоборот - неверно!).

Доказательство. Возьмем $\varepsilon = 1$ и получим, что

$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \; \forall x : 0 < |x-a| < \delta \quad |\alpha(x)| < 1$. Таким образом, при $x \to a$ $\alpha(x)$ ограничена. Лемма доказана.

Вернёмся к теореме. По доказанной лемме $\alpha_2(x)$ - ограничена при $x \to a$. Осталось применить свойство 2) бесконечно малых, доказанное выше.

Теорема 13.4. (Арифметические свойства предела)

Пусть две функции $f(x_1)$ и $f(x_2)$, имеют пределы A_1 и A_2, соответственно, при $x \to a$. Тогда предел суммы, разности, произведения, и, если $A \neq 0$, частного этих функций равны соответственно сумме, разности, произведению и частному значения этих пределов, т.е.

$\lim\limits_{x \to a} f(x_1) = A_1 \; \lim\limits_{x \to a} f(x_2) = A_2 \Rightarrow \lim\limits_{x \to a} f(x_1) \pm f(x_2) = A_1 \pm A_2$

$\lim\limits_{x \to a} f(x_1) \cdot f(x_2) = A_1 \cdot A_2$, ***если*** $A_2 \neq 0$, ***то*** $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x_1)}{f(x_2)} = \frac{A_1}{A_2}$

Аналогично теорема верна и для последовательностей.

Доказательство. По теореме 13.**2** из условия следует, что

$\begin{matrix} f_1(x) = A_1 + \alpha_1(x) \\ f_2(x) = A_2 + \alpha_2(x) \end{matrix}$, где $\alpha_1(x), \alpha_2(x)$ - бесконечно малые при $x \to a$

.

Тогда $f_1(x) \pm f_2(x) = A_1 \pm A_2 + \alpha_1(x) \pm \alpha_2(x) = A_1 \pm A_2 + (\alpha_1(x) \pm \alpha_2(x))$. По теореме 13.**3** алгебраическая сумма бесконечно малых $\alpha_1(x) \pm \alpha_2(x)$ - бесконечно малая, т.е. $\lim\limits_{x\to a}(f_1(x) \pm f_2(x)) = A_1 \pm A_2$, снова по теореме 13.**2**.

Перейдем к произведению

$$f_1(x)\cdot f_2(x) = (A_1 + \alpha_1(x))\cdot(A_2 + \alpha_2(x)) = A_1 \cdot A_2 + \alpha_1(x)\cdot A_2 + A_1 \cdot \alpha_2(x) + \alpha_2(x)\cdot\alpha_1(x).$$

Последние слагаемые - бесконечно малая величина при $x \to a$. По свойствам 2 и 3 бесконечно малых, - бесконечно малые при $x \to a$. По свойству 1 их сумма – бесконечно малая при $x \to a$. По теореме 13.**2,** $\lim\limits_{x\to a}(f_1(x)\cdot f_2(x)) = A_1 \cdot A_2$.

Перейдем к пределу частного и докажем сначала лемму**:**

<u>Лемма 13.2.</u> Если $A_2 \neq 0$, то $\exists\delta > 0 : \forall x : 0 < |x - a| < \delta$ выполняется неравенство $|f_2(x)| > \dfrac{|A_2|}{2}$.

Доказательство. Выберем $\varepsilon = \dfrac{A_2}{2}$. Тогда $\exists\delta > 0\ \forall x : 0 < |x - a| < \delta$

$$\exists\delta > 0 : \forall x : 0 < |x - a| < \delta\ |f_2(x) - A_2| < \frac{A_2}{2} \Rightarrow A_2 - \frac{A_2}{2} < f_2(x) < A_2 + \frac{A_2}{2} \Rightarrow f_2(x) > \left|\frac{A_2}{2}\right|.$$

Лемма доказана.

Теперь докажем следующее утверждение:

<u>Лемма 13.3.</u> Если $A_2 \neq 0$, то $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{1}{f_2(x)} = \dfrac{1}{A_2}$.

Доказательство. Имеет место равенство

$\dfrac{1}{f_2(x)} - \dfrac{1}{A_2} = \dfrac{A_2 - f_2(x)}{A_2 \cdot f_2(x)} = \dfrac{-\alpha_2(x)}{A_2 \cdot f_2(x)}$. По лемме 8.2 в $\dot{U}_\delta(a)$ выполняется неравенство $|f_2(x)|\cdot|A_2| > \dfrac{|A_2|}{2}\cdot|A_2|$, следовательно, $\left|\dfrac{1}{f_2(x)\cdot A_2}\right| < \dfrac{2}{A^2}$. Значит, функция $\dfrac{1}{f_2(x)\cdot A_2}$ ограничена при $x \to a$, и $\dfrac{-\alpha_2(x)}{A_2 \cdot f_2(x)}$ - бесконечно малая при

$x \to a$. Таким образом, $\frac{1}{f_2(x)} = \frac{1}{A_2}$ бесконечно малая, т.е. $\lim\limits_{x\to a} \frac{1}{f_2(x)} = \frac{1}{A_2}$.

Лемма доказана.

Для доказательства равенства $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x_1)}{f(x_2)} = \frac{A_1}{A_2}$ применим лемму 13.3 и часть теоремы 13.4 о пределе произведения функций.

Теорема 13.5. ***Если функция имеет предел при $x \to a$, равный A и в некоторой проколотой окрестности $\dot{U}(a)$ точки a принимает неотрицательные значения, то $A \geq 0$.***

Доказательство. Будем доказывать методом от противного. Допустим, что A<0. Возьмем $\varepsilon = \frac{A}{2}$. Тогда $\exists \delta > 0 : \forall x : 0 < |x-a| < \delta$, $|f(x) - A| < \left|\frac{A}{2}\right|$, откуда

$f(x) < A - A/2 = A/2 < 0$

Получаем, что для любого x из пересечения проколотых окрестностей $\dot{U}(a)$ и $\dot{U}_\delta(a)$ одновременно выполняются неравенства $f(x) \geq 0$ и $f(x) < 0$. Тем самым мы пришли к противоречию. Теорема доказана.

Теорема 13.6. ***Если для двух функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$, имеющих пределы, соответственно, A_1 и A_2, в некоторой проколотой окрестности $\dot{U}(a)$ выполняется неравенство $f_1(x) \leq f_2(x)$, то $A_1 \leq A_2$.***

Доказательство. Обозначим $\varphi(x) = f_2(x) - f_1(x)$. При этом $\forall x \in \dot{U}(a)$ $\varphi(x) > 0$ $\lim\limits_{x\to a} \varphi(x) = \lim\limits_{x\to a} f_2(x) - \lim\limits_{x\to a} f_1(x) = A_2 - A_1$. По теореме 13.5 имеем $A_2 - A_1 \geq 0$, т.е. $A_2 \geq A_1$. Теорема доказана.

Замечания:

- эти две теоремы означают, что при переходе к пределу сохраняется нестрогое неравенство;
- строгое неравенство между функциями **может не сохраниться для пределов.**

Например, для функций $f_1(x)=0$, $f_2(x)=x^2$ в любой $\dot{U}(0)$ выполняется неравенство $0<x^2$, т.е. $f_1(x)<f_2(x)$. Однако, $\lim\limits_{x\to 0} f_1(x)=\lim\limits_{x\to 0} f_2(x)=0$

Теорема 13.7. (Теорема о “зажатой” переменной).

Если $\forall x\in\dot{U}(a)$ ***выполняется неравенство*** $f_1(x)\le f(x)\le f_2(x)$***, и если*** $\lim\limits_{x\to a} f_1(x)=\lim\limits_{x\to a} f_2(x)=A$***, то*** $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$.

Доказательство. Для доказательства данной теоремы докажем *лемму*:

Лемма 13.4. ***Если*** $\forall x\in\dot{U}(a)$ ***выполняется неравенство*** $0\le\varphi(x)\le\phi(x)$***, и если*** $\lim\limits_{x\to a}\phi(x)=0$***, то и*** $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=0$.

Доказательство. Требуется доказать, что:

$\forall\varepsilon>0\,\exists\delta>0\,\forall x:0<|x-a|<\delta\ |\varphi(x)|<\varepsilon$. Имеется: $\forall\varepsilon>0\,\exists\delta_0>0\,\forall x:0<|x-a|<\delta_0$ $|\phi(x)|<\varepsilon$

Выберем δ таким, что $\dot{U}_\delta(a)\subset\dot{U}(a)$, а также удовлетворяющим неравенству $\delta<\delta_0$, из которого следует, что $\dot{U}_\delta(a)\subset\dot{U}_{\delta_0}(a)$.Тогда $\forall x\in\dot{U}(a)\ \varphi(x)\ge 0\ \forall x\in\dot{U}(a)\ 0\le\varphi(x)\le\phi(x)<\varepsilon$, что означает, что $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=0$.

Лемма доказана.

Перейдем к доказательству теоремы и обозначим $\varphi(x)=f(x)-f_1(x),\phi(x)=f_2(x)-f_1(x)$. При этом $\varphi(x),\phi(x)$ удовлетворяют условиям леммы.

Далее, $\lim\limits_{x\to a}\phi(x)=A-A=0$ и, по лемме, $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=0$. Наконец,

$f(x)=\varphi(x)+f_1(x)\to A$ при $x\to a$ (т.к. $\varphi(x)\to 0$, $f_1(x)\to A$ при $x\to a$).

Таким образом, теорема доказана.

$x\to a$

Дополнительный материал:

Теорема 13.8. (Критерий Коши для функции).

Условие: для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta = \delta(\varepsilon)$, что для любых x_0, x_1 из $\dot{U}(a)$ разность значений функции $f(x)$ в этих точках по абсолютной величине меньше ε, равносильно тому, что существует предел этой функции при $x \to a$, т.е.

$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon)\ \forall x_0, x_1 \in \dot{U}_\delta(a)\ |f(x_0) - f(x_1)| < \varepsilon \Leftrightarrow \exists \lim\limits_{x \to a} f(x)$.

<u>Необходимость</u> $(\Rightarrow)$

Пусть существует предел $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$. Тогда

$\forall\ \varepsilon > 0\ \ \exists \delta > 0\ \ \forall\ x \in \dot{U}_\delta(a)\ \ |f(x) - A| < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Так как $x_0, x_1 \in \dot{U}_\delta(a)$, то $|f(x_1) - A| < \dfrac{\varepsilon}{2}$,

$|f(x_0) - A| < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Следовательно,

$|f(x_0) - f(x_1)| = |f(x_0) - A + A - f(x_1)| \le |f(x_0) - A| + |f(x_1) - A| < \dfrac{\varepsilon}{2} + \dfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

<u>Достаточность</u> $(\Leftarrow)$

Доказательство достаточности значительно труднее и его не обязательно рассказывать на экзамене.

Однако для заинтересованного читателя ниже приводится схема этого доказательства.

Сначала дадим ещё одно определение предела функции при $x \to a$.

<u>**Определение 13.5 (предела функции $f(x)$ при $x \to a$ по Гейне).**</u> Говорят, что функция $f(x)$ имеет при $x \to a$ **предел** A, если для любой последовательности $\{a_n\}$ такой, что $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = a$ и такой, что для всех n выполнено неравенство $a_n \ne a$, предел $\lim\limits_{n \to \infty} f(a_n) = A$.

<u>Теорема 13.9</u>. Определение определение предела по Коши, равносильно определению 13.5 предела по Гейне.

◄ Пусть сначала функция имеет предел по Коши. Рассмотрим произвольную последовательность $\{a_n\}$ такую, что $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = a$ и такую, что для всех n выполнено неравенство $a_n \ne a$. По определению предела по Коши, $\forall\ \varepsilon > 0\ \ \exists \delta > 0\ \ \forall\ x \in \dot{U}_\delta(a)\ \ |f(x) - A| < \varepsilon$. По определению предела последовательности, $\forall \delta > 0 \exists\ N = N(\delta)\ \forall n > N\ |a_n - a| < \delta$. Значит, при $n > N$ выполняется условие $a_n \in \dot{U}_\delta(a)$, из которого сразу следует неравенство $|f(a_n) - A| < \varepsilon$, означающее, что $\lim\limits_{n \to \infty} f(a_n) = A$, Тем самым, предел этой функции по Гейне также существует.

Предположим теперь, что предел по Коши не существует и докажем, что не существует и предел по Гейне. По предположению, существует такое число $\varepsilon > 0$, что для любого числа $\delta > 0$ существует такая точка $a^* \in \dot{U}_\delta(a)$, что $\left| f(a^*) - A \right| \geq \varepsilon$. Последовательно выбирая в качестве δ числа $\delta_n = 1/n$, находим точки $a_n \in \dot{U}_{1/n}(a)$ такие, что $\left| f(a_n) - A \right| \geq \varepsilon$. Эти точки представляют собой последовательность точек, удовлетворяющую всем условиям, входящим в определение предела по Гейне, однако для этой последовательности условие $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = A$ не выполнено.▶

Докажем теперь, что из условия (1) вытекает, что функция имеет предел по Гейне.

Действительно, возьмём любую последовательность $\{a_n\}$ такую, что $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ и такую, что для всех n выполнено неравенство $a_n \neq a$. Рассмотрим соответствующую последовательность $\left\{ f(a_n) \right\}$. Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и выберем соответствующее $\delta > 0$ с помощью (1). Так как $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, имеем: $\forall \delta > 0 \exists\ N = N(\delta)\ \forall n > N\ \left| a_n - a \right| < \delta$. Далее, при $n, m > N$ $a_m, a_n \in \dot{U}_\delta(a)$ и ,по условию (1) , $\left| f(a_n) - f(a_m) \right| < \varepsilon$. Значит, $\left\{ f(a_n) \right\}$-фундаментальная последовательность. По теореме 12.3 существует предел последовательности $\left\{ f(a_n) \right\}$, обозначим его $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = A$.

Осталось доказать, что если взять любую другую последовательность $\{b_n\}$ такую, что $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = a$ и такую, что для всех n выполнено неравенство $b_n \neq a$, то $\lim\limits_{n\to\infty} f(b_n) = A$.

Для этого рассмотрим последовательность $a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots, a_n, b_n, \ldots$. Это – последовательность точек, сходящаяся к точке a и не принимающая значение a , согласно своему определению. Поэтому последовательность значений $f(a_1), f(b_1), f(a_2), f(b_2), \ldots, f(a_n), f(b_n), \ldots$ также имеет предел, по доказанному выше. Тогда по теореме 12.1 предел этой последовательности равен пределу подпоследовательности $\left\{ f(b_n) \right\}$ и пределу подпоследовательности $\left\{ f(a_n) \right\}$, равному A.

Билет 14. Вычисление $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$

Определение 14.1. Если $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \ \forall x\ \ |f(x)-A|<\varepsilon$, то говорят, что существует ***предел функции*** $f(x)$ ***при стремлении х к а справа*** и обозначают это так: $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=A$. Аналогично, если $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0$ $\forall x\ -\delta<x-a<0\ \ |f(x)-A|<\varepsilon$, то говорят, что существует ***предел функции*** $f(x)$ ***при стремлении х к а слева*** и обозначают это так: $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)=A$.

Теорема 14.1. ***Функция*** $f(x)$ ***имеет при*** $x\to a$ ***предел, равный А, тогда и только тогда, когда он имеет пределы при стремлении х к а справа и слева, причем оба эти предела равны А.***

Доказательство. Если $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$, то $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \ \forall x\ 0<|x-a|<\delta$ $|f(x)-A|<\varepsilon$. Поскольку из неравенств $0<x-a<\delta$ и $-\delta<x-a<0$ следует неравенство $0<|x-a|<\delta$, $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=A$ и $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)=A$.

Обратно, $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=A$ тогда и только тогда, когда $\forall\varepsilon>0\ \ \exists\delta_1>0$ $\forall x\ 0<x-a<\delta_1$, $|f(x)-A|<\varepsilon$; $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)=A$ тогда и только тогда, когда $\forall\varepsilon>0\ \ \exists\delta_2\ \ \forall x-\delta_2<x-a<0$, $|f(x)-A|<\varepsilon$.

Положим $\delta=\min(\delta_1,\delta_2)$. Тогда если $0<|x-a|<\delta$, то либо $0<x-a<\delta\le\delta_1$, либо $-\delta_2\le-\delta<x-a<0$.

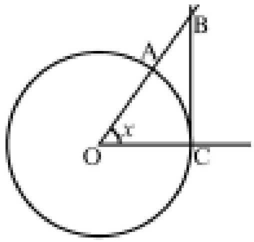
И в том, и в другом случае $|f(x)-A|<\varepsilon$, т.е. $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$.

Замечание: разумеется, для пределов справа и слева верны все теоремы об арифметических свойствах предела и о предельном переходе в неравенствах.

Теорема 14.2. (первый замечательный предел)

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$.

Замечание: при доказательстве этой теоремы нельзя применять ни правило Лопиталя,ни формулу Тейлора, т.к. хотя это и даст верный результат, но будет являться логической ошибкой, потому, что при вычислении производной функции sinx используется знание того, что $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$



Доказательство. Функция $\frac{\sin x}{x}$ четная. Поэтому если доказать, что $\lim\limits_{x\to +0}\frac{\sin x}{x}=1$, то и $\lim\limits_{x\to -0}\frac{\sin x}{x}=1$, и по теореме **14.1**. тогда $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$. В определении предела при $x\to +0$ можно дополнительно требовать выполнение условия $\delta<0$. В определении требуется существование хотя бы какого-нибудь $\delta>0$. Если же мы найдем $0<\delta<\frac{\pi}{2}$, то, тем самым, хотя бы какое-нибудь $\delta>0$ будет найдено. Итак, $0<x<\frac{\pi}{2}$. Рассмотрим окружность единичного радиуса и площади треугольников OAC, OBC и сектора OAC.

$S_{\Delta OAC}=\frac{1}{2}\sin x$, $S_{OAC_{сект}}=\frac{1}{2}x$, $S_{\Delta OBC}=\frac{1}{2}tgx$, $S_{\Delta OAC}<S_{OAC\,\text{сект.}}<S_{\Delta OBC}$, откуда

$\sin x<x<tgx$ при $0<x<\frac{\pi}{2}$, что равносильно $1<\frac{x}{\sin x}<\frac{1}{\cos x}, 1>\frac{\sin x}{x}>\frac{\cos x}{1}$.

Далее, $\cos x=1-2\sin^2\frac{x}{2}$, а для $\sin\frac{x}{2}$ мы только что доказали, что $0<\sin\frac{x}{2}<\frac{x}{2}$.

$\lim\limits_{x\to +0}\frac{x}{2}=0$, поэтому по теореме 13.**7** $\lim\limits_{x\to +0}\sin\frac{x}{2}=0$ и, значит,

$\lim\limits_{x\to +0}\cos x=\lim\limits_{x\to +0}1-2\sin^2\frac{x}{2}=1-0=1$. Снова применяем теорему 13.7, откуда

$\lim\limits_{x\to +0}\frac{\sin x}{x}=1$ и, значит, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$.

Билет 15. Предел монотонной ограниченной функции. Непрерывность элементарных функций

Эта информация относится ко всем вопросам. Ее следует знать, но не следует рассказывать именно в 15 билете. Ниже приводятся определения бесконечных пределов.

$$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty \Leftarrow \forall M\ \exists\delta > 0\ \forall x:\quad 0 < |x-a| < \delta \quad f(x) > M.$$

$$\lim_{x\to a} f(x) = -\infty \Leftarrow \forall N\ \exists\delta > 0\ \forall x:\quad 0 < |x-a| < \delta \quad f(x) < N.$$

$$\lim_{x\to a} f(x) = \infty \Leftarrow \forall N\ \exists\delta > 0\ \forall x:\quad 0 < |x-a| < \delta \quad |f(x)| > M.$$

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = +\infty \Leftarrow \forall M\ \exists N\ \forall x < N \quad f(x) > M.$$

$$\lim_{x\to a-0} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall N\ \exists\delta > 0\ \forall x: -\delta < x-a < 0 \quad f(x) < M.$$

Определение 15.1. *Функция* $f(x)$, *определенная на промежутке* $X \subset R$ *называется:* ***неубывающей (возрастающей)*** *на X, если для всех* $x_1, x_2 \in X$ *из неравенства* $x_1 < x_2$ *следует неравенство* $f(x_1) \le f(x_2)$ $(f(x_1) < f(x_2))$. *Она называется* ***невозрастающей (убывающей)*** *на X, если из* $x_1 < x_2$ *следует* $f(x_1) \ge f(x_2)$ $(f(x_1) > f(x_2))$. *Общее название для этих случаев –* ***монотонные*** *на X функции.*

Теорема 15.1. (К. Вейерштрасс)

1. Если $f(x)$ ***не убывает на*** (a,b) ***и ограничена сверху на*** (a,b)***, то существует*** $\lim\limits_{x\to b-0} f(x)$***.***

2. Если $f(x)$ ***не убывает на*** (a,b) ***и ограничена снизу на*** (a,b)***, то существует*** $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)$***.***

3. Если $f(x)$ ***не возрастает на*** (a,b) ***и ограничена сверху, то существует*** $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)$**.**

4. Если $f(x)$ ***не возрастает на*** (a,b) ***и ограничена снизу, то существует*** $\lim\limits_{x\to b-0} f(x)$**.**

Доказательство. Оно вполне аналогично теореме 9.4. Для полноты изложения докажем, например, случай 2. Поскольку множество значений, принимаемых $f(x)$ на интервале (a,b) ограничено снизу, существует $\inf\limits_{x\in(a,b)} f\{x\}=A$. Докажем, что $A=\lim\limits_{x\to a+0} f(x)$. Пусть $\varepsilon>0$. По определению точной нижней грани множества, число $A+\varepsilon$ уже не является нижней гранью множества значений $f(x)$ на (a,b), поэтому существует такое число *c*, что $A\le f(c)<A+\varepsilon$. Но тогда для всех $a<x<c$ имеем $A\le f(x)\le f(c)<A+\varepsilon$, откуда $|f(x)-A|<\varepsilon$. Значит, для всякого $\varepsilon>0$ найдено число δ (равное числу $c-a$), такое, что для всех x таких, что $a<x<a+\delta(=c)$, выполняется неравенство $|f(x)-A|<\varepsilon$, т.е. $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=A$.

Следствие. Если $f(x)$ - монотонная на (a,b) функция, то для любого $x_0\in(a,b)$ существуют $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$.

Доказательство. Достаточно применить теорему 15.1 к интервалам (a,x_0) и (x_0,b).

<u>Непрерывность элементарных функций</u>

<u>Непрерывность многочленов.</u>

Так как функция $y = x$ непрерывна в любой точке, по теореме о непрерывности произведения непрерывных функций, функция $y = x^2$ – непрерывная. Последовательно применяя вышеупомянутую теорему, получаем, что для любого натурального m функция $y = x^m$ – непрерывна. Умножая непрерывные функции $e = x, x^2, x^3, \ldots, x^k$ на постоянные числа c_1, c_2, …, c_k соответственно, получаем, что c_1x, c_2x^2, …, c_kx^k – непрерывные функции. Сложив $c_0 + c_1x + \ldots + c_kx^k$ получаем непрерывную функцию. Итак, многочлен – непрерывная на всей прямой функция.

Непрерывность рациональной функции.

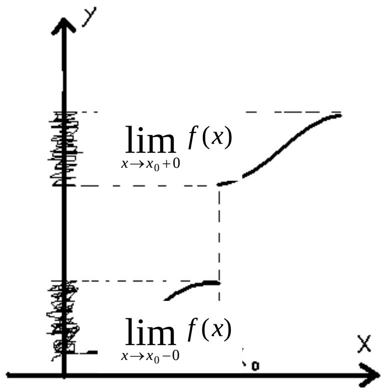
По определению, ***рациональной функцией*** $R(x)$ называется отношение двух многочленов, $P(x)$ и $Q(x)$, т. е. $R(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$.

Во всех тех точках x_0, где $Q(x) \neq 0$, функция $R(x)$ непрерывна по теореме о непрерывности частного. Если же в точке x_0 выполняется равенство $Q(x_0) = 0$, то в этой точке может быть устранимый разрыв, как например, в точке $x_0 = 1$ у функции $R(x) = \dfrac{(x-1)(x^2+3x+4)}{(x-1)(x^2+x+5)}$. Кроме того, в этой точке может оказаться разрыв второго рода, как, например, в точке $x_0 = 0$ у функции $R(x) = \dfrac{x^2+x+1}{x}$.

Для дальнейшего исследования будет полезной следующая теорема.

Теорема 15.3. ***Пусть y = f(x) возрастает (или убывает) на промежутке X, причём множество её значений образует промежуток Y. Тогда f(x) – непрерывная на X функция.***

Для **доказательства** вспомним, что если $f(x)$ строго монотонна на промежутке X, то, согласно следствию теоремы 15.1, в любой внутренней точке x_0 этого промежутка существуют $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$. Если эти числа равны друг другу, то они, ввиду монотонности, равны $f(x_0)$ и $f(x) \in C(x_0)$. Если же эти значения не равны друг другу, то во множестве значений Y функции $f(x)$ имеется “пробел” между точками $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$, опять же ввиду монотонности $f(x)$. Но, по условию, множество значений Y образует промежуток, в котором не может быть “пробелов” по определению промежутка. Теорема доказана.



Непрерывность показательной функции.

Функция y=a^x монотонна (возрастает при a>1, убывает при 0<a<1) и множеством ее значений при $x \in R$ является бесконечный промежуток – множество всех положительных чисел. По доказанной теореме, функция $y = a^x$ непрерывна на всей числовой оси.

Непрерывность логарифмической функции.

Функция $\log_a x$ монотонна (возрастает при a>1, убывает при 0<a<1) и при $x \in (0,+\infty)$ ее множеств значений есть R. По доказанной теореме, y=$\log_a x$ непрерывна на (0,+∞).

Непрерывность функции y=x^μ.

Функция y=x^μ определена при x>0, причем $x^\mu = e^{\mu \ln x}$. По доказанному, $z = \mu \ln x$ - непрерывная функция при x>0, функция $y = e^z$ непрерывна при всех z, поэтому, по теореме о непрерывности сложной функции, $y = x^\mu$ - непрерывная при $x > 0$ функция.

Функция $y = \sin x$.

При вычислении предела $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}$ было установлено, что если $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$, то $0 < \sin x < x$. Ввиду нечетности функций $y = x$ и $y = \sin x$, при $-\dfrac{\pi}{2} < x < 0$ $-x < -\sin x < 0$. Из этого сразу следует, что при $0 < |x| < \dfrac{\pi}{2}$ выполняется неравенство $|\sin x| < |x|$. Пусть x_0 произвольная точка. Докажем, что $\lim\limits_{x\to 0}(\sin x) = \sin x_0$. Это равносильно тому, что $\lim\limits_{x\to 0}(\sin x - \sin x_0) = 0$. В свою очередь, это равносильно тому, что $\lim\limits_{x\to 0}(2\sin\frac{x-x_0}{2}\cos\frac{x+x_0}{2})=0$. Так как, по доказанному выше, $\left|\sin\frac{x-x_0}{2}\right|<\left|\frac{x-x_0}{2}\right|$, $\lim\limits_{x\to 0}(\sin\frac{x-x_0}{2})=0$. Кроме того, функция $2\cos(\frac{x+x_0}{2})$, очевидно, ограниченная. По свойствам бесконечно малых, получаем требуемое.

<u>Функция *y* = cos *x*.</u>

Она непрерывна по теореме о непрерывности сложной функции, так как $y=\cos x=\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$, $z=\frac{\pi}{2}-x$ – непрерывная функция и $y=\sin z$ – тоже непрерывная функция.

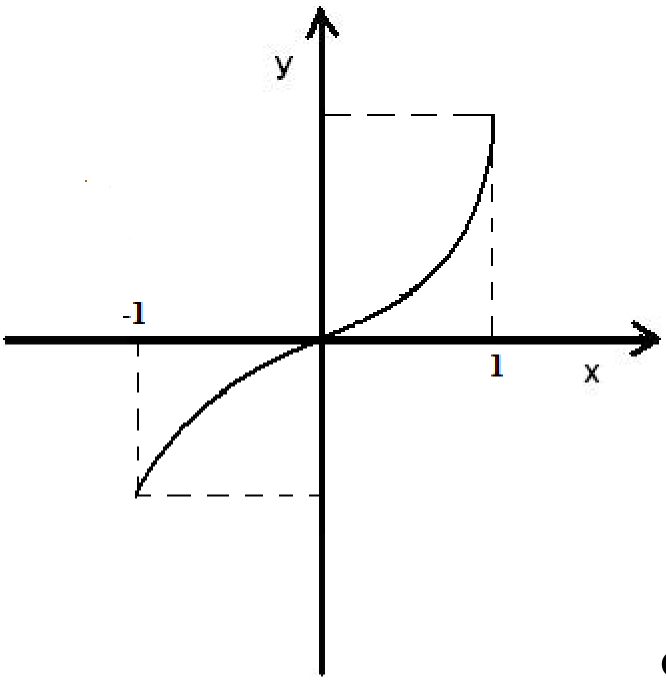
<u>Функция *y* = tg *x*.</u>

Эта функция непрерывна во всех точках, кроме $x=\frac{\pi}{2}+\pi k, k\in z$. В этих, последних, она имеет разрыв второго рода.

<u>Функция *y* = ctg *x*.</u>

она непрерывна во всех точках, кроме точек $x=\pi n$, $n\in z$, где она имеет разрыв второго рода.

<u>Непрерывность функции *y* = *a*rcsin*x*.</u>



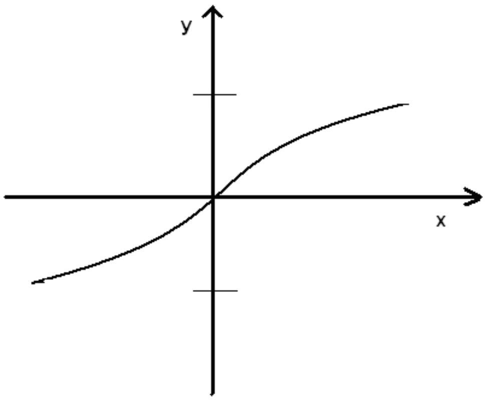
Она определена на отрезке [-1, 1],

возрастает на нём и множеством её значений является отрезок $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$. По доказанной теореме 14.1, y = arcsin x непрерывна на [-1, 1].

Непрерывность функции y = arccos x.

Следует из тождества arcsin x + arccos x = $\frac{\pi}{2}$, т.е. arccos x = $\frac{\pi}{2}$ - arcsin x - функция, также непрерывная на [-1, 1].

Непрерывность функции y = arctg x.



Функция определена и возрастаёт на всей числовой прямой. Множество значений – интервал $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$. Поэтому y = arctg x непрерывна на всей числовой прямой.

Непрерывность функции y = arcctg x.

Следует из равенства : arctg x + arcctg x = $\frac{\pi}{2}$.

Определение 15.2. Если функция не является непрерывной в точке x_0, то говорят, что она ***разрывна*** в этой точке.

При этом предполагаем, что x_0 является точкой из области определения!

Точки разрыва делятся на следующие классы.

Определение 15.3. ***Точкой устранимого разрыва*** называется такая точка x_0, что существует $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$, но $f(x_0)\neq A$. При этом можно переопределить функцию так, чтобы получилась непрерывная функция.

Например, Пусть $f(x)=\begin{cases} x, \text{ если x} \neq 0, \\ 1, \text{ если x} = 0. \end{cases}$

Переопределим функцию в точке $x=0$, положив $f^*(x)=x=0$.

Получилась непрерывная функция $f^*(x)=x$.

Определение 15.4. ***Точкой разрыва первого рода*** называется точка x_0, в которой существуют $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)=A_1$ и $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=A_2$, причем $A_1\neq A_2$.

Например, функция $sign(x)=\begin{cases} 1, \text{если } x>0 \\ 0, \text{если } x=0 \\ -1, \text{если } x<0 \end{cases}$ обладает разрывом в точке 0 первого рода.

Замечание: По следствию теоремы 15.1 монотонная в окрестности $U(x_0)$ точки x_0 функция $f(x)$ имеет $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$. Поэтому она либо непрерывна в точке *a*, когда оба эти предела равны друг другу, либо имеет в ней разрыв первого рода, когда эти пределы различные.

Определение 15.5. Если хотя бы один из пределов $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$, $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$ не существует, или бесконечен, то говорят, что x_0 – ***точка разрыва второго рода***.

Отдельно рассмотрим случай, когда $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$, но при этом значение $f(x_0)$ не определено. В таком случае говорят, ***что можно доопределить функцию в точке*** x_0 ***до непрерывной***.

Например, пусть $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$. Эта функция не определена в точке $x=0$, но её предел при $x\to 0$ существует и равен 1(теорема 14.2).Поэтому можно доопределить функцию $f(x)$, рассмотрев функцию

$$f^*(x)=\begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, \text{ при x} \neq 0, \\ 1, \text{ при x} = 0. \end{cases}$$

По определению, функция $f^*(x)$ – непрерывна в 0.

Билет 16. Символы $\overset{=}{o}$, $\underline{\underline{O}}$. ***Вычисление*** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}$, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}$, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\mu}-1}{x}$

Пусть $f(x)$, $g(x)$ определены в $\dot{U}(a)$.

Определение 16.1. $f(x)=\overset{=}{o}(g(x))$, $x\to a$, если существует $\alpha(x)$, $\alpha(x)$ – б. м. при $x\to a$ такая, что $f(x)=\alpha(x)\cdot g(x)$.

Определение 16.2. $f(x)=\underline{\underline{O}}(g(x))$, $x\to a$, если существует $\beta(x)$, – ограниченная в $\dot{U}(a)$, такая, что $f(x)=\beta(x)\cdot g(x)$.

1) $x^2=\overset{=}{o}(x)$ при $x\to 0$, т.к. $x^2=x\cdot x$, а $x\to 0$; но

2) $x=\overset{=}{o}(x^2)$, при $x\to\infty$, т.к. $x=x^2\cdot\frac{1}{x}$, и $\frac{1}{x}\to 0$ при $x\to\infty$.

Вообще, если $m>n$ и $x\to 0$, то $x^m=\overset{=}{o}(x^n)$ и если $m<n$ и $x\to\infty$ то $x^m=\overset{=}{o}(x^n)$.

Из свойств бесконечно малых величин следуют такие свойства символов $\overset{=}{o}$, $\underline{\underline{O}}$:

Теорема 16.1. Если $f_1(x)=\overset{=}{o}(g(x))$, $f_2(x)=\overset{=}{o}(g(x))$, то

$f_1(x)+f_2(x)=\overset{=}{o}((g(x)))$,

$f_1(x)\cdot f_2(x)=\overset{=}{o}\,(g^2(x))$; все соотношения выписаны при $x\to a$.

Доказательство. Действительно, $f_1(x)=\alpha_1(x)\cdot g(x))$, $f_2(x)=\alpha_2(x)\cdot g(x)),\alpha_1(x)$ и α_2 и $f_1(x)+f_2(x)=\{\alpha_1(x)+\alpha_2(x)\}\cdot g(x)$, а $f_1(x)\cdot f_2(x)=\{\alpha_1(x)\cdot\alpha_2(x)\}\cdot g^2(x)$. В фигурных скобках стоят бесконечно малые при $x\to a$.

Теорема 16.2. $\overset{=}{o}(\overset{=}{o}(g(x)))=\overset{=}{o}(g(x))$, т.е. если $f(x)=\overset{=}{o}(\overset{=}{o}(g(x)))$, то $f(x)=\overset{=}{o}(g(x))$ при $x\to a$.

Доказательство. Действительно, если $f(x)=\overset{=}{o}(\varphi(x))$, а $\varphi(x)=\overset{=}{o}(g(x))$, т. е. $f(x)=\alpha_1(x)\cdot\varphi(x)$, $\varphi(x)=\alpha_2(x)\cdot g(x)$, где $\alpha_1(x)$, $\alpha_2(x)$ – б. м. при $x\to a$, то

$f(x) = \alpha_1(x) \cdot \alpha_2(x) \cdot g(x) = \alpha(x) \cdot g(x)$, где $\alpha(x)$ – б. м. при $x \to a$, что и означает справедливость доказываемого равенства . Для большей ясности повторим, что равенство следует понимать так: если $f(x) = \overset{=}{o}(\overset{=}{o}(g(x)))$, то $f(x) = \overset{=}{o}(g(x))$ при $x \to a$.

<u>Теорема 16.3.</u> $\underline{\underline{O}}(\overset{=}{o}(g(x))) = \overset{=}{o}(g(x))$**,** $\overset{=}{o}(\underline{\underline{O}}(g(x))) = \overset{=}{o}(g(x))$**,** $x \to a$**.**

Доказательство. Эти свойства сразу следуют из того, что произведение бесконечно малой величины на ограниченную есть беконечно малая величина.

Символы $\overset{=}{o}$, $\underline{\underline{O}}$ удобны при вычислении пределов.

Перейдём к вычислению пределов $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x}$**,** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{a^x - 1}{x}$**,** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1+x)^\mu - 1}{x}$, которые далее будут использованы при вычислении производных. Вновь подчеркнём, что при ответе на этот билет при их вычислении нельзя пользоваться правилами Лопиталя или формулой Тейлора. Разумеется, они дадут верный ответ, но их применение требует знания производных функций, стоящих в числителях этих дробей. А для вычисления этих производных, как отмечено выше, требуется знать эти самые пределы. Поэтому получится не доказательство, а порочный логический круг.

Для строгого изложения материала потребуется теорема о пределе сложной функции.

<u>Теорема 16.4.</u> Пусть $f(x)$ определена в проколотой окрестности точки a, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$. Пусть $g(y)$ определена в проколотой окрестности точки b и $\lim\limits_{y\to b} g(y) = c$.

Пусть, кроме того, выполняется хотя бы одно из двух условий:

1. $g(y)$ непрерывна в точке y_0;

2. Существует такая $\dot{U}(a)$, что $\forall\, x \in \dot{U}(a)$ $f(x) \neq b$.

Тогда существует $\lim\limits_{x\to a} g(f(x))$ и этот предел равен с.

Доказательство похоже на доказательство теоремы о непрерывности сложной функции, но несколько сложнее.

То, что $\lim\limits_{y\to b} g(y) = c$ означает, что

$\forall\,\varepsilon > 0 \quad \exists\,\eta > 0 \;\; \forall\, y: 0 < |y-b| < \eta \quad |g(y)-c| < \varepsilon$.

То, что $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ означает, что

$\forall\,\eta > 0 \quad \exists\,\delta > 0 \;\; \forall\, x: 0 < |x-a| < \delta \quad |f(x)-b| < \eta$.

Если потребовать, чтобы в некоторой проколотой $\dot{U}(a)$ окрестности точки a $f(x) \neq b$, то тогда можно по произвольному $\varepsilon > 0$ найти сначала число $\eta > 0$ такое, что если $0 < |y-b| < \eta$, то $|g(y)-c| < \varepsilon$. Теперь по этому η находим $\delta > 0$ так, чтобы из $0 < |x-a| < \delta$ следовало неравенство $|f(x)-b| < \eta$. Пересекаем проколотые окрестности $\dot{U}(a)$ и $\dot{U}_\delta(a)$. Это пересечение содержит некоторую проколотую окрестность точки a, и, если x принадлежит этой окрестности, то $f(x) \neq b$ и $|f(x)-b| < \eta$, т.е. $0 < |f(x)-b| < \eta$, следовательно, $|g(f(x))-c| < \varepsilon$. В этом случае теорема доказана. Если же $g(y) \in C(b)$, то $\forall\,\varepsilon > 0 \quad \exists\,\eta > 0 \;\; \forall\, y: |y-b| < \eta \quad |g(y)-c| < \varepsilon$, поэтому выбирая по $\varepsilon > 0$ соответствующее $\eta > 0$, а потом по этому η – соответствующее число $\delta > 0$ получаем, что как только $0 < |x-a| < \delta$, так $|f(x)-b| < \eta$ и, значит, $|g(f(x))-c| < \varepsilon$.

Примечание 1: Обычно при вычислении пределов на практических занятиях мы используем монотонные замены переменной и условие 2 выполняется. Первое условие будет использовано ниже, при вычислении пределов из названия билета.

Примечание 2: Если не выполняется ни одно из условий, то может оказаться, что предел $\lim\limits_{x\to a} g(f(x))$ не существует, либо существует, но не равен *c*.

Первая ситуации встречается в таком примере:

$$f(x) = \begin{cases} 1/q, \text{ если } x = \dfrac{p}{q}, \text{ где } \dfrac{\mathrm{p}}{\mathrm{q}} - \text{ несократимая дробь,} \\ \qquad 0, \text{ если x - иррациональное число;} \end{cases}$$

$$g(y)=\begin{cases}1, \text{ если } y\neq 0,\\ 0, \text{ если } y=0.\end{cases}$$

При стремлении x к 0 функция $f(x)$ имеет пределом число 0. При стремлении y к 0 функция $g(y)$ имеет предел, равный 1.

Однако функция $g(f(x))=\begin{cases}1, \text{ если } x \text{ - рациональное число,}\\ 0, \text{ если } x - \text{ иррациональное число,}\end{cases}$ не имеет предела при $x\to 0$.

Пример второй ситуации более простой. Пусть $f(x)=\begin{cases}1, \text{ если } x\neq 0,\\ 0, \text{ если } x=0.\end{cases}$ Очевидно,

$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$. Пусть $g(y)=\begin{cases}1, \text{ если } y\neq 0,\\ 0, \text{ если } y=0.\end{cases}$. Тогда $\lim\limits_{y\to 0} g(y)=1$. Однако

$g(f(x))=\begin{cases}g(0)=0, \text{ если } x\neq 0,\\ g(1)=1, \text{ если } x=0.\end{cases}$ Поэтому $\lim\limits_{x\to 0} g(f(x))=0$.

Теорема 16.5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}=\ln a$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{\mu}-1}{x}=\mu$.

Доказательство.

1. В теореме 10.2 отмечено, что $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$. Рассмотрим левую часть этого равенства и преобразуем её так: $\lim\limits_{x\to 0} e^{\frac{1}{x}\ln(1+x)}$. По непрерывности показательной функции и теореме 16.4 пункт 1 получаем: $e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln(1+x)}=e$, т. е. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1$

2. Далее рассмотрим предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}$ и сделаем в нём замену переменной $x=\ln(1+t)$ (это – монотонная замена и теорема о пределе сложной функции будет верна). При $x\to 0$ и $t\to 0$, и наоборот, при $t\to 0$ также $x\to 0$.

Поэтому $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{e^{\ln(1+t)}-1}{\ln(1+t)}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{1+t-1}{\ln(1+t)}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{t}{\ln(1+t)}=1$, по доказанному выше.

Для $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}$ имеем $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x\ln a}-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(e^{x\ln a}-1)\ln a}{x\ln a}=\ln a$

3. Рассмотрим $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{\mu}-1}{x}$. Обозначим $(1+x)^{\mu}-1=y$, т. е. $(1+x)^{\mu}=y+1$. Тогда $\ln(1+x)^{\mu}=\ln(y+1)$, $\mu\ln(1+x)=\ln(y+1)$ и при $x\to 0$ переменная $y\to 0$, и наоборот, при $y\to 0$ переменная $x\to 0$.

Наш предел примет вид $\lim\limits_{x,y\to 0}\dfrac{y}{x}=\lim\limits_{x,y\to 0}\dfrac{y}{x}\cdot\dfrac{\ln(1+y)}{\ln(1+y)}$. Это преобразование законное, т. к. при $x\neq 0$ и $y\neq 0$, поэтому $\ln(y+1)\neq 0$. Далее используем доказанное в первом пункте равенство. Таким образом, искомый предел равен

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mu\ln(1+x)}{x}\cdot\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{y}{\ln(1+y)}=\mu$.

Запишем найденные предельные соотношения с помощью символа $\overset{=}{o}$.

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1$ означает, что $\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1+\alpha(x)$, $\alpha(x)\to 0$ при $x\to 0$ или,

$\ln(1+x)=x+\alpha(x)\cdot x=x+\overset{=}{o}(x)$, $x\to 0$.

Равенство $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}=\ln a$ означает, что $a^x=1+x\ln a+\overset{=}{o}(x)$, $x\to 0$.

Аналогично, $(1+x)^{\mu}=1+\mu x+\overset{=}{o}(x)$, $x\to 0$.

(Кстати, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin}{x}=1$ означает, что $\sin x=x+\overset{=}{o}(x)$ при $x\to 0$).

Билет 17. Промежуточные значения непрерывной на отрезке функции.

Определение 17.1. Пусть функция $y = f(x)$ определена на некотором множестве $X \subset \mathrm{R}$. Если она непрерывна в каждой точке этого множества, то говорят, что она ***непрерывна на множестве*** $X \subset \mathrm{R}$. Иными словами, функция $y = f(x)$ непрерывна на множестве $X \subset \mathrm{R}$, если для любого числа $\varepsilon > 0$ и любого $a \in X$ существует такое число $\delta > 0$, что для всех $x \in X$, удовлетворяющих неравенству $|x - a| < \delta$ выполняется неравенство $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

Теорема 17.1 (Больцано, Коши).

Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$ и принимает на его концах значения разных знаков. Тогда существует хотя бы одна точка $c \in (a,b)$ такая, что $f(c) = 0$.

Пусть, для определённости, $f(a) < 0,\ f(b) > 0$. Обозначим $a_1 = a, b_1 = b$ и рассмотрим точку $(a_1 + b_1)/2 = c_1$. Если оказалось, что $f(c_1) = 0$, то теорема верна при $c = c_1$. Если же $f(c_1) \neq 0$, то либо $f(c_1) > 0$ и в этом случае положим $a_2 = a_1, b_2 = c_1$, либо $f(c_1) < 0$ и в этом случае положим $a_2 = c_1, b_2 = b_1$. В обоих случаях получен отрезок $[a_2, b_2]$, длина которого равна половине длины отрезка $[a_1, b_1]$ и на концах которого функция $y = f(x)$ принимает значения разных знаков.

Разделим этот отрезок пополам точкой $(a_2 + b_2)/2 = c_2$. Если $f(c_2) = 0$, то теорема верна при $c = c_2$. Если же $f(c_2) \neq 0$, то либо $f(c_2) > 0$ и в этом случае положим $a_3 = a_2, b_3 = c_2$, либо $f(c_2) < 0$ и в этом случае положим $a_3 = c_2, b_3 = b_2$. Снова обоих случаях получен отрезок $[a_3, b_3]$, длина которого равна половине длины отрезка $[a_2, b_2]$ и на концах которого функция $y = f(x)$ принимает значения разных знаков.

Продолжим процесс деления отрезков пополам. При этом возникают две возможности. Либо на каком- то шаге получаем, для $(a_n + b_n)/2 = c_n$, и $f(c_n) = 0$. Тогда теорема справедлива. Либо для всех n выполняются неравенства

$f(a_n) < 0, f(b_n) > 0$. Тогда получается бесконечная система стягивающихся отрезков. Действительно, по построению каждый следующий отрезок вложен в предыдущий, а длина отрезка $[a_n, b_n]$, равная $(b-a)/2^n$, стремится к нулю при $n \to \infty$. Эти отрезки имеют общую точку, которую будем обозначать c. Докажем, что $f(c) = 0$.

Действительно, с одной стороны, $c = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$, поэтому, по теореме о предельном переходе в неравенствах, $f(c) = f\left(\lim\limits_{n\to\infty} a_n\right) = \lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) \le 0$, так как функция $f(x)$ по условию непрерывна на отрезке $[a,b]$ и $f(a_n) < 0$. С другой стороны, $f(c) = f\left(\lim\limits_{n\to\infty} b_n\right) = \lim\limits_{n\to\infty} f(b_n) \ge 0$, так как $f(b_n) > 0$. Полученные неравенства доказывают, что $f(c) = 0$.#

Следствие. Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, $f(a) = A, f(b) = B$ и пусть $A < B$ ($A > B$). Тогда для любого числа C, удовлетворяющего неравенствам $A < C < B$ ($A > C > B$), существует точка $c \in (a,b)$ такая, что $f(c) = C$.

Рассмотрим функцию $F(x) = f(x) - C$. Она непрерывна на отрезке $[a,b]$ как разность непрерывной по условию функции $y = f(x)$ и постоянной функции. $F(a) = f(a) - C = A - C < 0, F(b) = f(b) - C = B - C > 0$, поэтому существует точка $c \in (a,b)$ такая, что $F(c) = 0$, т.е. $f(c) = C$.

Билет 18. Ограниченность непрерывной на отрезке функции.

Теорема 18.1(Вейерштрасс).

Пусть функция $y = f(x)$ ***непрерывна на отрезке*** $[a,b]$***. Тогда она ограничена на этом отрезке.***

Будем вести доказательство теоремы методом «от противного». Предположим, что $y = f(x)$ не ограничена на отрезке $[a,b]$. Это означает, что для любого числа $C > 0$ существует точка $x \in [a,b]$ такая, что $|f(x)| > C$. Последовательно выбирая число $C > 0$ равным числам $1, 2, ..., n, ...$, находим соответствующие точки $x_1, x_2, ..., x_n, ...$ такие, что $|f(x_n)| > n$. Эти точки образуют бесконечную последовательность, а так как все они принадлежат отрезку $[a,b]$, т.е. $a \le x_n \le b$, эта последовательность является ограниченной. Применяем теорему Больцано-Вейерштрасса для последовательностей, согласно которой существует подпоследовательность (x_{n_k}) последовательности (x_n), сходящаяся к некоторому пределу, который будем обозначать c. Так как $a \le x_{n_k} \le b$, по теореме о предельном переходе в неравенствах получаем: $a \le c \le b$, т.е. $c \in [a,b]$ и, следовательно, функция $y = f(x)$ непрерывна в этой точке. Но это означает, что для любой последовательности, в частности, и для последовательности (x_{n_k}), стремящейся к c, последовательность соответствующих значений $(f(x_{n_k}))$ должна стремиться к $f(c)$. Но $|f(x_{n_k})| > n_k > k$, поэтому последовательность $(f(x_{n_k}))$ стремится к ∞. Получено противоречие с предположением о неограниченности $y = f(x)$ на отрезке $[a,b]$.◄

Замечание: Если функция $y = f(x)$ непрерывна на интервале (a,b), то она может быть неограниченной на этом интервале. Например, функция $f(x) = 1/x$ на интервале $(0,1)$ непрерывна. Однако для любого числа $C > 0$ имеет место неравенство $C+1>1$, откуда $0 < 1/(C+1) < 1$ и значение этой функции в точке $x = 1/C+1$ равно $C+1 > C$.

Следствие. Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$. Тогда существуют точная верхняя грань M и точная нижняя грань m множества её значений на отрезке $[a,b]$.

Достаточно применить к множеству значений функции $y = f(x)$ на отрезке $[a,b]$ теорему о существовании точных граней ограниченного множества.◄

<u>Теорема 18.2 (Вейерштрасс).</u>

Пусть функция $y = f(x)$ ***непрерывна на отрезке*** $[a,b]$***. Тогда существуют такие точки*** c,d***, принадлежащие этому отрезку, что*** $f(c) = M$, $f(d) = m$**.**

Докажем часть утверждения теоремы, относящуюся к точной верхней грани M множества значений функции $y = f(x)$ на отрезке $[a,b]$. Остальная часть доказывается аналогично.

Будем вести доказательство теоремы методом «от противного». Пусть для всех точек x отрезка $[a,b]$ выполняется неравенство $f(x) < M$. Тогда $M - f(x) > 0$ для всех точек x отрезка $[a,b]$ и функция $y = 1/(M - f(x))$ определена и непрерывна на отрезке $[a,b]$. По теореме 18.1 эта функция ограничена на отрезке $[a,b]$, следовательно, существует число $C > 0$ такое, что для всех точек x отрезка $[a,b]$ выполняются неравенства $0 < \dfrac{1}{M - f(x)} < C$. Но тогда для всех точек x из отрезка $[a,b]$ выполняется неравенство $M - f(x) > 1/C$, или $M - 1/C > f(x)$. Это означает, что меньшее, чем M, число $M - 1/C$ является верхней гранью множества значений функции $y = f(x)$ на отрезке $[a,b]$. Значит, M - не точная верхняя грань множества значений функции $y = f(x)$ на отрезке $[a,b]$. ◄

Замечание: Часто эту теорему формулируют так:

Непрерывная на отрезке функция принимает свои наименьшее и наибольшее значения на этом отрезке.

Следствие. Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$. Тогда для любого числа μ, удовлетворяющего неравенствам $m \le \mu \le M$, существует точка $\xi \in [a,b]$ такая, что $f(\xi) = \mu$.

По доказанной теореме, существуют такие точки c, d, принадлежащие отрезку $[a,b]$, что $f(c) = M, f(d) = m$. Рассмотрим отрезок числовой оси, соединяющий эти точки. Пусть, для определённости, $c < d$. Тогда функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[c,d]$. По следствию теоремы 16.1, для любого μ, удовлетворяющего неравенствам , $m \le \mu \le M$ существует точка $\xi \in [a,b]$ такая, что $f(\xi) = \mu$.◄

Замечание: Доказанные утверждения означают, что непрерывная на отрезке функция принимает на нём все свои значения, от наименьшего до наибольшего. Разумеется, таким свойством могут обладать не только непрерывные функции. Например, функция $y = \begin{cases} x, \text{если } 0 \le x \le 1, \\ -x-1, \text{если } -1 \le x < 0 \end{cases}$ принимает все значения от -1 до +1, однако имеет разрыв в точке $x = 0$.

Отметим ещё одно важное следствие теоремы 18.2.

Теорема 18.3. ***Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на промежутке X (конечном или бесконечном). Тогда множество её значений Y также представляет собой промежуток.***

Требуется доказать, что вместе с любыми двумя точками $y_1, y_2 \in Y$ любая точка $y, y_1 \le y \le y_2$, также принадлежит Y. Пусть $y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2)$. Рассмотрим множество значений функции $y = f(x)$ на отрезке $[x_1, x_2]$($[x_1, x_2] \subset X$, т.к. X - промежуток). Оно представляет собой отрезок, в котором содержится отрезок $[y_1, y_2]$. Таким образом, любое число $y, y_1 \le y \le y_2$ является значением $y = f(x)$ для некоторого $x \in X$.

18.1. Обратная функция.

Обратная функция – частный случай понятия обратного отображения (см. определение 3.9). Если задана функция $y = f(x)$, обладающая тем свойством, что любое своё значение y она принимает при единственном значении x, то это даёт возможность рассматривать ***обратную функцию*** $x = g(y)$, такую, что равенства $y = f(x)$ и $x = g(y)$

равносильны . Примером служат функции $y = e^x, x = \ln y$. Ясно, что обе функциональные зависимости, $y = f(x)$ и $x = g(y)$ определяют одну и ту же кривую на плоскости. Часто рассматривают функцию $y = g(x)$ (и именно эту функцию называют обратной). График такой функции получается из графика функции $y = f(x)$ отражением относительно биссектрисы первого координатного угла.

Теорема 18.4. ***Пусть функция*** $y = f(x)$ ***возрастает (убывает) на промежутке*** X ***. Тогда на промежутке*** Y***, представляющем собой множество её значений (по теореме 18.3), определена обратная функция*** $x = g(y)$***, которая также возрастает(убывает) и непрерывна.***

Ограничимся случаем возрастания. По определению множества значений функции, для любого $y_0 \in Y$ существует число $x_0 \in X$ такое, что $y_0 = f(x_0)$. Так как $y = f(x)$ возрастает на X , то для любого $x \in X, x > x_0$ выполняется неравенство $f(x) > f(x_0)$, а для любого $x \in X, x < x_0$ выполняется неравенство $f(x) < f(x_0)$. Поэтому любое своё значение $y_0 \in Y$ функция $y = f(x)$ принимает ровно один раз, в точке $x_0 \in X$, что и позволяет определить функцию $x = g(y)$ такую, что для любого $y_0 \in Y$ выполняется равенство $x_0 = g(y_0)$. Легко видеть, функция $x = g(y)$ возрастает на Y . Действительно, как показано выше, для любого $y_0 \in Y$ значения $y > y_0$ соответствуют значениям $x > x_0$, а значения $y < y_0$ соответствуют значениям $x < x_0$. Но это означает, что и обратно, для любого $x_0 \in X$ значения $x > x_0$ соответствуют значениям $y > y_0$, а значения $x < x_0$ соответствуют значениям $y < y_0$. Наконец, для доказательства непрерывности $x = g(y)$ на промежутке Y воспользуемся теоремой 15.3. Действительно, функция $x = g(y)$ возрастает на промежутке Y и её множество значений образует промежуток X .

Билет 19. Равномерная непрерывность.

Определение 19.1. Пусть функция $y = f(x)$ определена на некотором множестве $X \subset \mathrm{R}$. Функция $y = f(x)$ называется ***равномерно непрерывной*** на множестве $X \subset \mathrm{R}$, если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такое число $\delta > 0$, что для всех $x \in X$ и $a \in X$ удовлетворяющих неравенству $|x - a| < \delta$ выполняется неравенство $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

Замечание: Есть важное различие между понятиями равномерной непрерывности на множестве $X \subset \mathrm{R}$ и непрерывности на этом множестве. Из равномерной непрерывности следует непрерывность, но не наоборот. В определении равномерной непрерывности содержится сильное требование о том, чтобы входящее в определение число $\delta > 0$ зависело только от числа $\varepsilon > 0$. В обычном определении непрерывности на множестве (определение 16.1) это число $\delta > 0$ зависит не только от числа $\varepsilon > 0$, но ещё и от точки $a \in X$. Поэтому возможно, что общего значения числа $\delta > 0$, одновременно пригодного для всех $a \in X$, найти не удастся. Однако если в качестве множества $X \subset \mathrm{R}$ рассматривается отрезок числовой оси, то верна такая теорема.

Теорема 19.1 (Кантор).

Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$. Тогда она равномерно непрерывна на этом отрезке.

Будем вести доказательство теоремы методом «от противного». Отсутствие равномерной непрерывности означает, что существует число $\varepsilon > 0$ такое, что для любого числа $\delta > 0$ существуют точки $c \in [a,b], x \in [a,b]$, для которых выполнены неравенства $|x - c| < \delta$ и $|f(x) - f(c)| \geq \varepsilon$. Зафиксируем это число $\varepsilon > 0$ и будем последовательно выбирать число $\delta > 0$ равным числам $1, 1/2, ..., 1/n, ...$. При каждом таком выборе числа $\delta > 0$ существуют точки $c_1, x_1, c_2, x_2, ..., c_n, x_n, ...$ такие, что для всех $n = 1, 2, ...$ выполнены неравенства $|x_n - c_n| < 1/n$ и $|f(x_n) - f(c_n)| \geq \varepsilon$. Последовательность точек (c_n) – бесконечная и ограниченная. Поэтому, по теореме Больцано-Вейерштрасса, существует подпоследовательность (c_{n_k}), имеющая предел, который будем обозначать

d. Далее, из неравенства $|x_n - c_n| < 1/n$ при $n = n_k$ получаем $|x_{n_k} - c_{n_k}| < 1/n_k < 1/k$, т.е. $c_{n_k} - 1/k < x_{n_k} < c_{n_k} + 1/k$. Поскольку $\lim\limits_{k\to\infty} c_n = d, \lim\limits_{k\to\infty} 1/k = 0$, правая и левая части этих неравенств имеют одинаковые пределы, равные числу d. По теореме 9.3 из этого следует, что $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = d$. Так как $a \le c_{n_k} \le b$, по теореме о предельном переходе в неравенствах получаем: $a \le d \le b$, т.е. $d \in [a,b]$ и, следовательно, функция $y = f(x)$ непрерывна в этой точке. По выбору точек x_{n_k}, c_{n_k} выполнено неравенство $\left| f(x_{n_k}) - f(c_{n_k}) \right| \ge \varepsilon$. Перейдём в этом неравенстве к пределу при $k \to \infty$. Ввиду непрерывности модуля и непрерывности функции $y = f(x)$, получаем

$$\varepsilon \le \lim_{k\to\infty} \left| f(x_{n_k}) - f(c_{n_k}) \right| = \left| \lim_{k\to\infty} \left(f(x_{n_k}) - f(c_{n_k}) \right) \right| =$$

$$= \left| f\left(\lim_{k\to\infty} x_{n_k} \right) - f\left(\lim_{k\to\infty} c_{n_k} \right) \right| = \left| f(d) - f(d) \right| = 0.$$

Полученное противоречие доказывает теорему.

Замечание: Функция, непрерывная на интервале (a,b), не обязательно равномерно непрерывна на нём. Пример: функция $y = 1/x$, непрерывная на интервале $(0,1)$, не равномерно непрерывна на этом интервале. Для доказательства выберем $\varepsilon = 1$ и для любого $0 < \delta < 1$ рассмотрим точки $x = \delta/2, c = \delta/4$. При этом $|x - c| = \delta/4 < \delta$, но $\left| 2/\delta - 4/\delta \right| = 2/\delta > 2 > \varepsilon$.

Билет 20. Проиводная, её естественнонаучный смысл и основные свойства.

20.1. Дифференцируемость функции.

Пусть $y = f(x)$ определена в окрестности $U(x_0)$ точки x_0.

Определение 20.1. Числовую функцию f называют ***дифференцируемой*** в точке x_0, если для всех $x \in U(x_0)$ имеет место равенство

$$f(x) = f(x_0) + k(x - x_0) + \alpha(x)(x - x_0), \tag{1}$$

где число k не зависит от x, а $\alpha(x) \to 0$ при $x \to x_0$ и бесконечно малая функция $\alpha(x)$ непрерывна в точке x_0, т.е. $\alpha(x_0) = 0 = \lim\limits_{x \to x_0} \alpha(x)$.

Числовую функцию f называют ***дифференцируемой*** на множестве X, если f дифференцируема в каждой точке $x_0 \in X$.

Пример 1. ***Линейная*** функция $f(x) = kx + b$ дифференцируема на всей числовой прямой

Действительно, $kx + b = kx_0 + b + k(x - x_0) + 0 \cdot (x - x_0)$, $(k = k, \alpha(x) = 0)$. В частности, ***постоянные*** $(k = 0)$ и ***тождественная*** функция $(k = 1, b = 0)$ дифференцируемы.

Пример 2. Квадратичная функция $f(x) = x^2$ дифференцируема.

Действительно, $x^2 = (x_0 + (x - x_0))^2 = x_0^2 + 2x_0(x - x_0) + (x - x_0)(x - x_0)$, $k = 2x_0$, $\alpha(x) = x - x_0$.

Теорема 20.1. ***Функция f, дифференцируемая в точке x_0, непрерывна в этой точке.***

В силу формулы (1), $f(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$.

Пример функции $|x|$ (чуть позже мы докажем, что эта функция не дифференцируема в точке $x = 0$), показывает, что утверждение, обратное теореме 20. 1, неверно.

20.2. Производная.

Пусть $y = f(x)$ определена в окрестности $U(x_0)$ точки x_0.

Поскольку на множестве $\overset{\circ}{U}(x_0)$ определена функция $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ и x_0 - предельная точка для $\overset{\circ}{U}(x_0)$, то можно ставить вопрос о существовании предела ***разностного отношения*** $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ в точке x_0.

Определение 20.2. Число $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ (если оно существует) называют ***производной функции*** f в точке x_0 и обозначают символом $f'(x_0)$.

Итак,

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \tag{2}$$

при условии, что предел существует.

Для обозначения производной также используется символ $\frac{df(x_0)}{dx}$.

Например, скорость прямолинейного движения есть производная перемещения как функции времени. Часто полезно, по аналогии с этим, трактовать и *производную любой функции* f в точке x_0 как скорость изменения функции в этой точке. Пример- скорость химической реакции.

Пример 1'. Линейная функция $f(x) = kx + b$ имеет производную в каждой точке, и ее производная $(kx + b)' = k$ - постоянная.

Действительно,

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{(kx + b) - (kx_0 + b)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} k = k.$$

В частности, ***постоянная имеет всюду производную, равную нулю, а тождественная функция - производную, равную единице.***

Пример 2'. Квадратичная функция $f(x)=x^2$ имеет производную в каждой точке, и ее производная равна $(x^2)'=2x$.

Действительно,

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{x^2-x_0^2}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}(x+x_0)=2x_0 .$$

Пример 3'. Модуль $|x|$ не имеет производной в точке 0.

Действительно, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{|x|-|0|}{x-0}$ не существует, поскольку предел при $x\to +0$ этого отношения равен 1, а предел при $x\to -0$ равен -1 и, следовательно, предел при $x\to 0$ не существует

В этом примере мы встретились с ситуацией, когда существуют $\lim\limits_{x\to x_0+0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ и $\lim\limits_{x\to x_0-0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$. Эти величины называются, соответственно, ***правой и левой производной*** и обозначаются $f'_{пр}(x_0), f'_{лев}(x_0)$. Для существования производной необходимо и достаточно, чтобы $f'_{пр}(x_0), f'_{лев}(x_0)$ существовали и были равны друг другу.

<u>**Теорема 20.2**</u>. ***Функция f, дифференцируемая в точке x_0, имеет в этой точке производную, и последняя равна коэффициенту k в представлении функции f по формуле (1).***

Согласно определению 1, x_0 -- предельная точка области определения функции $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$. В силу формулы (1), $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=k+\alpha(x)$ для всех. $x\in \overset{\circ}{U}(x_0)$.Так как $\alpha(x)\to 0$ при $x\to x_0$, то на основании формулы (2) заключаем, что $f'(x_0)$ существует и равна k.

Из единственности предела следует единственность коэффициента k в формуле (1). Теорема 20.2 показывает, что функция f, дифференцируемая в точке x_0, представима в виде

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)\cdot(x-x_0)+\alpha(x)\cdot(x-x_0), \qquad (3)$$

где $\alpha(x) \to 0$ при $x \to x_0$.

На основании теоремы 20.2 утверждения примеров 1' - 2' являются следствиями соответствующих утверждений примеров 1-2. Вместе с тем, пример 3’ показывает, что функция $|x|$ не является дифференцируемой в точке 0.

<u>Теорема 20.3</u>. *Функция f, имеющая производную в точке x_0, дифференцируема в этой точке.*

По условию, существует $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$. Следовательно, по теореме о представлении функции, имеющей предел в точке,

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) + \alpha_0(x), \tag{4}$$

где и $\alpha_0(x) \to 0$ при $x \to x_0$. Положим

$$\alpha(x) = \begin{cases} \alpha_0(x) \text{ для всех } x \in \mathring{U}(x_0), \\ 0 \quad \text{ при } x = x_0. \end{cases}$$

Тогда также $\alpha(x) \to 0$ при $x \to x_0$ и по формуле (4') для всех $x \in \mathring{U}(x_0)$ справедлива формула (3). Тем самым, f дифференцируема в точке x_0 (с коэффициентом $k = f'(x_0)$).

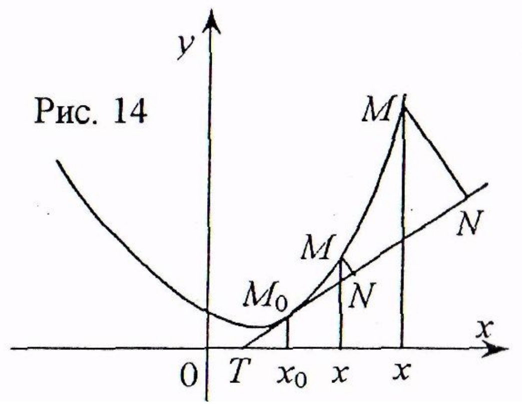
Таким образом, сказать, что числовая функция дифференцируема в данной точке, или что она имеет в этой точке производную, одно и то же. Нахождение производной функции f' у функции f называют *дифференцированием* этой функции.

20.3. <u>Касательная к графику функции.</u>

Как и нахождение скорости неравномерного движения, нахождение касательной к кривой линии - одна из основных задач, решение которых привело к созданию дифференциального исчисления.

Рассмотрим частный случай задачи о касательной, когда линией служит график функции.

<u>Определение 20.3.</u> Пусть числовая функция f определена на невырожденном промежутке I и непрерывна в его точке x_0 (так что расстояние MM_0 от соответствующей точки $M_0(x_0; f(x_0))$ графика до его точки $M(x; f(x))$, $x \in I$, стремится к нулю при $x \to x_0$). ***Касательной*** к графику функции f в точке M_0 называют такую прямую, проходящую через M_0, что отношение расстояния MN от точки $M(x; f(x))$ до этой прямой к расстоянию M_0M от M_0 до M стремится к нулю при $x \to x_0$ (т.е. что MN бесконечно мало по сравнению с M_0M при $x \to x_0$).

Рис. 14


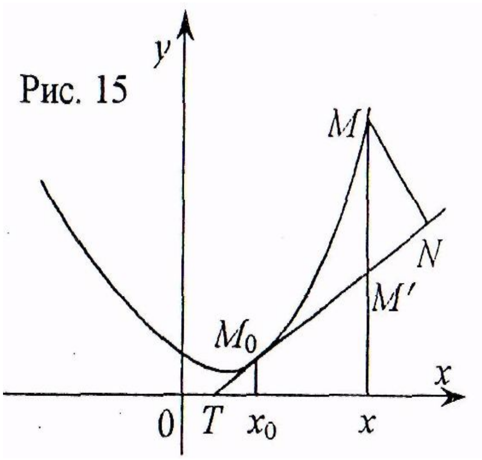
Суть этого определения можно наглядно описать следующим образом: если представить, что точка M движется по линии к точке касания M_0, то, какова бы ни была точность наблюдения, с некоторого момента точка M, будучи еще отличной от M_0, уже неотличима от своей проекции N на касательную (рис. 14). Таким образом, кривая, обладающая в точке M_0 касательной, почти сливается с ней вблизи этой точки.

<u>Теорема 20.4.</u> ***Если функция f, определенная на промежутке, дифференцируема в его точке x_0, то график этой функции имеет в соответствующей точке $M_0(x_0; f(x_0))$ касательную, причем угловой коэффициент касательной равен $f'(x_0)$.***

По условию и по теореме 20.2 предыдущего пункта, представление

$$f(x) = f(x_0) + f'(x)\cdot(x - x_0) + \alpha(x)(x - x_0)\,,$$

(5)



справедливо для всех x, принадлежащих некоторой окрестности $U(x_0)$ точки x_0, и $\alpha(x) \to 0$ при $x \to x_0$. Прямая с угловым коэффициентом $f'(x_0)$, проходящая через точку M_0, имеет уравнение

$$y = f(x_0) + f'(x)\cdot(x - x_0)\,.$$

(6)

Пусть M - точка графика с абсциссой $x \neq x_0$ и $x \in U(x_0)$ (рис. 15), N - проекция этой точки на прямую (6) и M' - точка этой прямой с абсциссой x. Тогда направленный отрезок $M'M$ равен $f(x) - y$, так что, вычитая (6) из (5), получаем $M'M = \alpha(x)(x - x_0)$. Так как $MN \le M'M$, а $M_0M \ge |x - x_0|$, то $\dfrac{MN}{M_0M} \le \dfrac{|M'M|}{|x - x_0|}$. Но $\dfrac{|M'M|}{|x - x_0|} = |\alpha(x)| \to 0$ при $x \to x_0$. Следовательно, $\dfrac{MN}{M_0M} \to 0$ при $x \to x_0$, т.е. (6) - уравнение касательной к графику функции f в его точке M_0.

Таким образом, нахождение углового коэффициента касательной (как и нахождение скорости) приводит к вычислению производной.

Замечание: Секущая M_0M имеет угловой коэффициент $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ (см. рис. 15). Таким образом теорема 1 показывает, что ***угловой коэффициент касательной в точке*** M_0 ***есть предел углового коэффициента секущей*** M_0M ***при*** $x \to x_0$**.**

20.4. Правила дифференцирования.

Дифференцирование линейной комбинации, произведения и частного.

Теорема 20.5 ***Пусть*** f ***имеет производную в точке*** x***. Тогда для любой постоянной*** c ***справедлива формула:***

$$(cf)' = c \cdot f'$$

(постоянный множитель можно вынести за знак производной).

Приращение функции $cf(x)$ в точке x равно

$cf(x+\Delta x) - cf(x) = c\big(f(x+\Delta x) - f(x)\big)$. Поскольку существует

$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x+\Delta x) - f(x\ )}{\Delta x}$, существует и

$\lim\limits_{\Delta x \to 0} c\dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = c\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = cf'(x)$ что и требовалось доказать.

Теорема 20.6. ***Пусть*** f ***и*** g ***имеют производные в точке*** x***. Тогда существует производная суммы этих функций, причём***

$$\big(f(x) + g(x)\big)' = f'(x) + g'(x).$$

Приращение функции $f(x) + g(x)$ в точке x равно

$(f(x+\Delta x) + g(x+\Delta x)) - (f(x) + g(x)) = \big(f(x+\Delta x) - f(x)\big) + \big(g(x+\Delta x) - g(x)\big)$
, поэтому

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) + g(x+\Delta x) - f(x) - g(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} +$$
$$+\lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} = f'(x) + g'(x)$$

Напомним, что линейной комбинацией функций $f_1, \ldots, f_n$ называют всякую функцию f , представимую в виде $f = \sum\limits_{k=1}^{n} c_k \cdot f_k$, где коэффициенты c_k - постоянные.

Теорема 20.7 (Линейное свойство операции дифференцирования).

Если функции $f_1,..., f_n$ дифференцируемы в точке x, то всякая линейная комбинация $f = \sum_{k=1}^{n} c_k \cdot f_k$ этих функций дифференцируема в точке x, причем

$$\left(\sum_{k=1}^{n} c_k \cdot f_k\right)' = \sum_{k=1}^{n} c_k \cdot f_k'(x).$$

Теорема 20.8. Если функции f_1 и f_2 дифференцируемы в точке x, то их произведение $f_1\ f_2$ дифференцируемо в точке x, причем

$$\big(f_1(x)\,f_2(x)\big)' = f_1'(x)\,f_2(x) + f_1(x)\,f_2'(x).$$

Приращение произведения $f_1\ f_2$ равно

$$\frac{f_1(x+\Delta x)\,f_2(x+\Delta x) - f_1(x)\,f_2(x)}{\Delta x} = \frac{f_1(x+\Delta x)\,f_2(x+\Delta x) - f_1(x)\,f_2(x+\Delta x)}{\Delta x} +$$

$$+\frac{f_1(x)\,f_2(x+\Delta x) - f_1(x)\,f_2(x)}{\Delta x} = \frac{\big(f_1(x+\Delta x) - f_1(x)\big)\,f_2(x+\Delta x)}{\Delta x} + \frac{f_1(x)\big(f_2(x+\Delta x) - f_2(x)\big)}{\Delta x}$$

При $\Delta x \to 0$ выполняются соотношения

$$\frac{\big(f_1(x+\Delta x) - f_1(x)\big)}{\Delta x} \to f_1'(x), \frac{\big(f_2(x+\Delta x) - f_2(x)\big)}{\Delta x} \to f_2'(x),\ f_2(x+\Delta x) \to f_2(x),$$

откуда получаем утверждение теоремы.

Теорема 20.9. ***Если функции f_1 и f_2 дифференцируемы в точке x, и $f_2(x) \neq 0$ то их частное $f_1(x)/f_2(x)$ дифференцируемо в точке x, причем***

$$\left(f_1(x)/f_2(x) \right)' = \frac{f_1'(x)\,f_2(x) - f_1(x)\,f_2'(x)}{f^2{}_2(x)}.$$

Сначала докажем лемму

Лемма 20.1. Если функция f_2 дифференцируема в точке x, и $f_2(x) \neq 0$ то функция $1/f_2(x)$ дифференцируема в точке x, причем

$$\left(1/f_2(x) \right)' = \frac{-f_2'(x)}{f_2^{\,2}(x)}.$$

Приращение имеет вид:

$$\frac{1}{f_2(x+\Delta x)} - \frac{1}{f_2(x)} = -\frac{f_2(x+\Delta x) - f_2(x)}{f_2(x+\Delta x)\, f_2(x)}$$

Функция $1/f_2(x+\Delta x)$ определена в окрестности точки x и ограничена . Следовательно,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x}\left(\frac{1}{f_2(x+\Delta x)} - \frac{1}{f_2(x)} \right) = -\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f_2(x+\Delta x) - f_2(x)}{f_2(x+\Delta x)\, f_2(x)\Delta x} = -\frac{f_2'(x)}{f_2^2(x)}.$$

Теорема 20.9 сразу следует из теоремы 20.8 и леммы 20.1.

Производные элементарных функций(рассказывать в билете необязательно, но, разумеется, их нужно знать и уметь выводить! Обязательно спросим!)

Билет 21. Производные элементарных функций, обратной функции, сложной функции, параметрически заданной функции.

Производная степенной функции $y = x^{\mu}$, где μ − любое вещественное число.

Область определения этой функции зависит от μ. Имеем (при $x \neq 0$)

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(x+\Delta x)^{\mu} - x^{\mu}}{\Delta x} = x^{\mu-1} \cdot \frac{\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\mu} - 1}{\frac{\Delta x}{x}}.$$

Если воспользоваться пределом, вычисленным в теореме 15.4, то получим

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \mu x^{\mu-1}.$$

В частности

если $y = \frac{1}{x} = x^{-1}$, то $y' = (-1)x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$

если $y = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$, то $y' = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Производная показательной функции $y = a^{x}$ ($a > 0$, $-\infty < x < +\infty$).

Здесь

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{a^{x+\Delta x} - a^{x}}{\Delta x} = a^{x} \cdot \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x}.$$

Воспользовавшись пределом, вычисленным в теореме 15.4, найдём:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = a^{x} \cdot \ln a.$$

В частности,

если $y = e^{x}$, то и $y' = e^{x}$.

Итак, скорость возрастания показательной функции (при $a > 1$) пропорциональна значению самой функции: чем большего значения функция уже достигла, тем быстрее в этот момент она растёт. Это даёт точную характеристику роста показательной функции, о которой мы имели уже случай говорить.

Производная логарифмической функции $y = \log_a x$ ($0 < a \neq 1$, $0 < x < +\infty$).

В этом случае

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\log_a(x+\Delta x)-\log_a x}{\Delta x}=\frac{1}{x}\cdot\frac{\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)}{\frac{\Delta x}{x}}.$$

Воспользуемся пределом, вычисленным в теореме 15.4:

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\log_a e}{x}.$$

В частности, для натурального л о г а р и ф м а получается исключительно простой результат:

при $y=\ln x$ имеем $y'=\frac{1}{x}$.

Это даёт (хотя, по существу, и не новое) основание для предпочтения, которое оказывается натуральным логарифмам при теоретических исследованиях.

<u>Производные тригонометрических функций.</u>

Пусть $y=\sin x$, тогда

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\sin(x+\Delta x)-\sin x}{\Delta x}=\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\cdot\cos(x+\frac{\Delta x}{2}).$$

Пользуясь непрерывностью функции $\cos x$ и известным пределом $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$, получим

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\cos x.$$

Аналогично найдём:

если $y=\cos x$, то $y'=-\sin x$.

В случае $y=\operatorname{tg} x$ применима теорема 19.9 , согласно которой

$$\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)'=\frac{\cos x\cdot\cos x-(-\sin x)\sin x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}$$

Аналогично,

если $y=\operatorname{ctg} x$, то $y'=-\frac{1}{\sin^2 x}$.

<u>Производная обратной функции.</u>

Прежде чем заняться вычислением производных от обратных тригонометрических функций, докажем следующую общую теорему.

<u>**Теорема 21.1**</u>. ***Пусть 1) функция $f(x)$ возрастает(или убывает) и непрерывна на некотором промежутке; 2) в точке x_0 этого промежутка имеет конечную и отличную от нуля производную $f'(x_0)$. Тогда для обратной функции $g(y)$ в соответствующей точке $y_0 = f(x_0)$ также существует производная, равная $\dfrac{1}{f'(x_0)}$.***

Придадим значению $y = y_0$ произвольное приращение Δy, тогда соответственное приращение Δx получит и функция $x = g(y)$. Заметим, что при $\Delta y \neq 0$, ввиду однозначности самой функции $y = f(x)$, и $\Delta x \neq 0$. Имеем

$$\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}}.$$

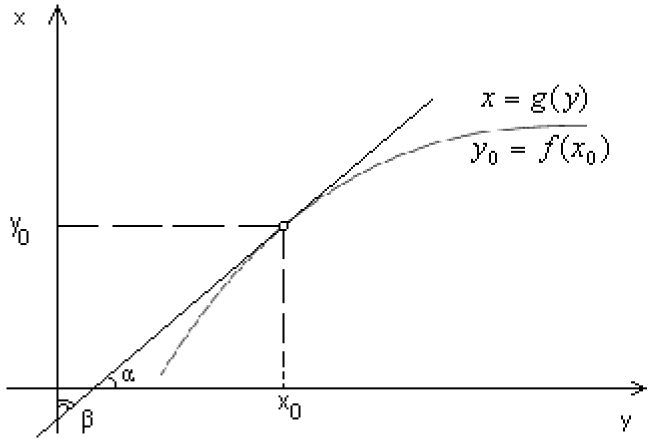
Если теперь $\Delta y \to 0$ по любому закону, то − в силу непрерывности функции $x = g(y)$ − и приращение $\Delta x \to 0$. Но тогда знаменатель правой части написанного равенства стремится к пределу $f(x_0) \neq 0$, следовательно, существует предел для левой части, равный обратной величине $\dfrac{1}{f'(x_0)}$; он и представляет собой производную $g'(y_0)$.

Итак, имеем простую формулу:

$$x' = \frac{1}{y'}.$$

Легко выяснить её геометрический смысл. Мы знаем, что производная y'_x есть тангенс угла α, образованный касательной к графику функции $y = f(x)$ с осью x. Но обратная функция $x = g(y)$ имеет, лишь независимая переменная для неё откладывается по оси y. Поэтому производная x'_y равна тангенсу угла β, составленного той же касательной с осью y (рис.) Таким образом, выведенная формула сводится к известному соотношению

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{1}{\operatorname{tg} x},$$



связывающему тангенсы двух углов α и β, сумма которых равна $\frac{\pi}{2}$.

Положим для примера $y = a^x$. Обратной для неё функцией будет $x = \log_a y$. Так как $y'_x = a^x \cdot \ln a$, то по нашей формуле,

$$x' = \frac{1}{y'} = \frac{1}{a^x \cdot \ln a} = \frac{\log_a e}{y},$$

в согласии с 3.

Переходя теперь к вычислению производных от обратных тригонометрических функций, мы для удобства обменяем ролями переменные x и y, переписав доказанную формулу в виде

$$y' = \frac{1}{x'}.$$

Обратные тригонометрические функции.

Рассмотрим функцию $y = \arcsin x$ $(-1 < x < 1)$, причем $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$. Она является обратной для функции $x = \sin y$, имеющей для указанных значений y положительную производную $x'_0 = \cos y$. В таком случае существует также производная y'_x и равна, по нашей формуле,

$$y'_x = \frac{1}{x'} = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}};$$

корень мы берем со знаком плюс, так как $\cos y > 0$.

Мы исключили значения $x = \pm 1$, ибо для соответствующих значений $y = \pm\frac{\pi}{2}$ производная $x'_y = \cos y = 0$.

Функция $y = \operatorname{arctg} x$ $(-\infty < x < +\infty)$ служит обратной для функций x=tg$y$. По нашей формуле

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{\sec^2 y} = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 y} = \frac{1}{1 + x^2}.$$

Аналогично можно получить:

для $y = \arccos x$ $y' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$ $(-1 < x < 1)$

для $y = \operatorname{arcctg} x$ $y' = -\frac{1}{1 + x^2}$ $(-\infty < x < +\infty)$.

Производная сложной функции.

<u>Теорема 21.2 (Теорема о производной сложной функции).</u>

Пусть функция $y = y(x)$ ***определена в окрестности точки*** x_0 ***и имеет в этой точке производную*** $y'(x_0)$***. Пусть функция*** $z = z(y)$ ***определена в окрестности*** y_0 ***и имеет в точке*** y_0 ***производную*** $z'(y_0)$

Тогда сложная функция $Z(x) = z(y(x))$ ***имеет производную, равную***

$$Z'(x_0) = z'(y_0) \cdot y'(x_0).$$

Придадим x_0 приращение Δx такое, что соответствующее значение $y(x_0 + \Delta x)$ принадлежит окрестности точки y_0, в которой определена функция $z(y)$. Так как $z(y)$, по условию, дифференцируема в точке y_0,

$$z(y_0 + \Delta y) - z(y_0) = z'(y_0)\Delta y + \beta(\Delta y) \cdot \Delta y \text{, где } \beta(\Delta y) \to 0 \text{ при } y \to 0 \text{ и } \beta(0) = 0.$$

Так как $y(x)$ дифференцируема в точке x_0,

$\Delta y = y(x_0 + \Delta x) - y(x_0) = y'(x_0)\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x$,где $\alpha(\Delta x) \to 0$ $\Delta x \to 0$. Как установлено в теореме 20.10, если $\Delta x \to 0$, то и $\Delta y \to 0$.

Поэтому

$$Z(x_0 + \Delta x) - Z(x_0) = z(y_0 + \Delta y) - z(y_0) = z'(y_0)\Delta y + \beta(\Delta y) \cdot \Delta y =$$
$$= z'(y_0)(y'(x_0)\Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x) + \beta(\Delta y)(y'(x_0)\Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x) =$$
$$= z'(y_0) \cdot y'(x_0) \cdot \Delta x + \Delta x(z'(y_0) \cdot \Delta x + \beta(\Delta y) \cdot \alpha(\Delta x))$$

Так как при $\Delta x \to 0$ и $\Delta y \to 0$, $\alpha(\Delta x)$, $\beta(\Delta y)$ − бесконечно малые, из этого равенства следует, что

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{Z(x_0 + \Delta x) - Z(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (z'(y_0) \cdot y'(x_0) + z'(y_0) \cdot \alpha(\Delta x) + \beta(\Delta y) \cdot y'(x_0) + \beta(\Delta y) \cdot \alpha(\Delta x)) =$$
$$= z'(y_0) \cdot y'(x_0),$$

что и требовалось доказать.

<u>Производная функции, заданной параметрически.</u>

Рассмотрим уравнение $\begin{cases} y = y(t) \\ x = x(t) \end{cases}$ (1)

Где $x(t)$, $y(t)$ − дифференцируемые функции на некотором промежутке T; пусть, кроме того, функция $x(t)$ строго возрастает (или убывает) на T и ни в одной точке этого промежутка x_t' не равна 0.

Символ x_t' использован здесь для обозначения производной функции x_t' по переменной t. Существует обратная функция $t = t(x)$, причем ее производная, по теореме **20.2,** равна

$$t_x' = \frac{1}{x_t'} \qquad (\mathbf{2})$$

Но тогда уравнения задают $Y(x) = y(t(x))$, и производная этой функции $Y'(x) = y_t' \cdot t_x'$, по теореме **20.2** о производной сложной функции. Используя равенство (**2**), окончательно получаем:

$$Y'(x) = \frac{y_t'}{x_t'} \qquad (\mathbf{3})$$

Часто вместо равенства (**3**) записывают равносильное ему равенство

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt}$$

Бывает также, что производные по параметру t обозначают так: $x_t' = \dot{x}$, $y_t' = \dot{y}$.

Тогда формула (**3**) принимает вид: $y'(x) = \dfrac{\dot{y}}{\dot{x}}$.

Билет 22. Дифференциал. инвариантность формы первого дифференциала

22.1. Понятие дифференциала числовой функции

Определение 21.1. Если числовая функция f дифференцируема в точке x, то ее ***дифференциалом*** $df(x)$ в этой точке называют однородную линейную функцию $f'(x)h$ (новой) независимой переменной h.

Таким образом,

$$df(x) = f'(x)h \qquad (1)$$

Положив в формуле (1) $f(x) = x$, получим

$$dx = 1 \cdot h = h, h \in \mathrm{R} \qquad (2)$$

так что дифференциал dx функции $f(x) = x$ в каждой точке x есть

тождественная функция. Подставляя (2) в правую часть (1), получаем

$$df(x) = f'(x)dx\ , \qquad (3)$$

равенство двух линейных функций $df(x)$ и $f'(x)dx$. Из него следует, что часто используемое обозначение производной $\frac{df}{dx}$ можно рассматривать, как отношение дифференциалов $df(x)$ и dx.

Функция $df(x)$ определена для всех действительных значений h. Однако по традиции часто рассматривают $df(x)$ лишь на множестве тех h, для которых $x+h$ принадлежит области определения функции; т.е., лишь на множестве приращений аргумента x функции f. Это объясняется тем, что дифференциал тесно связан с приращением функции. Так как, по предположению, f дифференцируема в точке x, то

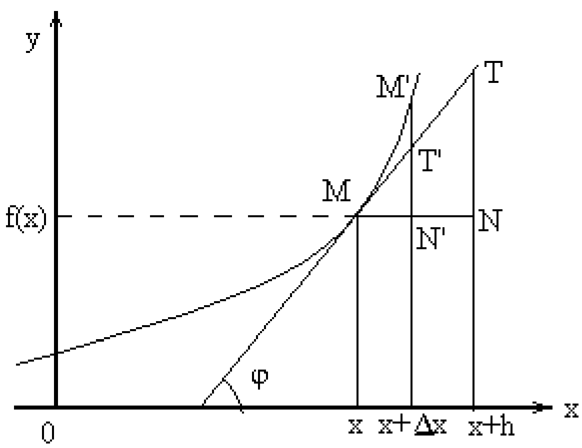
$$f(x+\Delta x)-f(x)=f'(x)\Delta x+\alpha(\Delta x)\Delta x, \tag{4}$$

где $\alpha(\Delta x)\to 0$ при $\Delta x\to 0$ и первое слагаемое в правой части (4) – дифференциал, но рассматриваемый только для $h=\Delta x$. Если $f'(x)\neq 0$, то $\alpha(\Delta x)\Delta x=\bar{o}(f'(x)\Delta x), \Delta x\to 0$,поэтому говорят, что «дифференциал есть главная линейная часть приращения функции».

22.2. <u>**Геометрический и механический смысл дифференциала.**</u>

Пусть числовая функция f дифференцируема в точке x. Как известно, ее график имеет в точке $M(x, f(x))$ <u>**касательную**</u> с угловым коэффициентом $f'(x)$.

<u>**Теорема 22.1.**</u> Значение $df(x)=f'(x)h$ дифференциала равно приращению ординаты этой касательной при переходе от x к $x+h$ (см. рис.).



Доказательство. Действительно, $tg\varphi=f'(x)$, $MN=h$,поэтому $NT=MNtg\varphi=f'(x)h$. Из рисунка также видно, что $f'(x)\Delta x=N'T'$ есть часть приращения $f(x+\Delta x)-f(x)=N'M'$ функции, стремящееся к совпадению с ним при $\Delta x\to 0$.

Дифференциал допускает и <u>**механическое**</u> толкование. Если x – время, а $f(x)$– путь, пройденный прямолинейно движущейся точкой к моменту x, то $f'(x)$ - ее скорость в данный момент. Тогда $f'(x)h$ равен длине пути, который прошла бы точка за промежуток времени от x до $x+h$, если бы ее скорость оставалась неизменной (т.е. приложенные силы уравновесились).

22.3. Инвариантность формы первого дифференциала

Правило дифференцирования сложной функции приведет нас к одному замечательному и важному свойству дифференциала.

Пусть функции $y = f(x)$ и $x = \varphi(t)$ таковы, что из них может быть составлена сложная функция: $y = f(\varphi(t))$. Если существуют производные y'_x и x'_t, то по теореме 20.2 существует и производная

$$y'_t = y'_x \cdot x'_t \qquad (5)$$

Дифференциал dy, если x считать независимой переменной, выразится по формуле (3). Перейдём теперь к независимой переменной t; в этом предположении имеем другое выражение для дифференциала:

$$dy = y'_t \cdot dt.$$

Заменяя производную y'_t её выражением (5) и замечая, что $x'_t \cdot dt$ есть дифференциал x как функции от t, окончательно получим:

$$dy = y'_x \cdot x'_t dt = y'_x \cdot dx,$$

т. е. вернёмся к прежней форме дифференциала.

Таким образом, мы видим, что ***форма дифференциала может быть сохранена даже в том случае, если прежняя независимая переменная заменена новой.***

Мы всегда имеем право писать дифференциал y как в форме (1), будет ли x независимой переменной или нет; разница лишь в том, что, если за независимую переменную выбрано t, то dx означает не произвольное приращение Δx, а дифференциал x как функции от t.

Это свойство и называют <u>инвариантностью формы дифференциала.</u>

22.4. <u>Дифференциал суммы, произведения и частного функций.</u>

В силу равенства (1) из любой формулы для производной в точке x при умножении на dx получается соответствующая формула для дифференциала. В частности, в точках, где функции u, v удовлетворяют условиям теорем о дифференцируемости суммы, произведения или частного получаем:

$d(u+v)=du+dv$;

аналогично,

$d(uv)=vdu+udv$,

$d(u/v)=(vdu-udv)/v^2$.

Отметим, что если C – постоянная, то $dC=0$, $dCu=Cdu$.

Билет 23. Производные и дифференциалы высших порядков

1. **Последовательные производные**

Производная f' функции *f*, в свою очередь, может иметь производную. Последнюю в этом случае называют ***второй производной*** (или ***производной второго порядка***) функции *f* и обозначают обычно f''. Таким образом, $f'' = (f')'$. В соответствии с этим f' называют ***первой производной*** (или ***производной первого порядка***) функции *f*. По индукции определяют (в предположении, что они существуют) производные следующих порядков: *f??? = (f??)?* и т.д. Если *f* имеет n-ю производную (а значит, и производные всех меньших порядков) во всех точках некоторого промежутка **I**, то говорят, что *f* n раз (или n-кратно) дифференцируема на промежутке **I**. Функцию *f*, имеющую на **I** производные всех порядков, называют бесконечно дифференцируемой на **I**. Таковы, например, на всем множестве действительных чисел алгебраические многочлены, показательные функции.

Для обозначения порядка производной, если он невелик, используют также римские цифры. Так, f^{IV} – четвертая производная функции *f*. Вообще же, n-ю производную функции *f* обозначают $f^{(n)}$ (в частности, $f^{(1)}$ = *f?*). При этом удобно саму функцию *f* обозначать символом $f^{(0)}$. В таких обозначениях, очевидно, $f^{(n)} = (f^{(k)})^{(n-k)}$ для всех k, $0 \le k \le n$.

Итак, функция *f* имеет в точке $x_0 \in (a,b)$ производную $f^{(n)}(x_0)$ (обозначение: $f \in D^{(n)}(x_0)$) в том и только в том случае, когда в некоторой окрестности *U* точки x_0, $U \subset (a,b)$, существуют производные функции $f^{(k)}$ всех порядков $k, 1 \le k \le n-1$, и функция $f^{(n-1)}$ имеет в x_0 производную $(f^{(n-1)})$?$(x_0) = f^{(n)}(x_0)$.

Вторая производная имеет важный **механический** смысл. Если прямолинейное движение материальной точки описывается уравнением *S* =

$f(t)$, то, как было показано,

$V = f?(t)$ – скорость точки в момент t. Величину $j = f??(t)$ ("скорость изменения скорости") называют **ускорением** точки в момент t. Согласно второму закону классической механики, сила F, приложенная к точке, пропорциональна ускорению, $F = mj$; коэффициент пропорциональности m называют массой точки.

Для некоторых бесконечно дифференцируемых функций легко указать формулу для вычисления n-ой производной.

1) $f(x) = x^{\alpha}$, $x>0$, $\alpha \in \mathrm{R}$ - фиксировано. Поскольку $f?(x) = \alpha x^{\alpha-1}$, $f??(x) = \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}$, то, по индукции, получим $f^{(k)}(x) = \alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1)x^{\alpha-k}$, $x>0$, $k \in \mathrm{N}$. Если $\alpha = n \in \mathrm{N}$, то $f(x) = x^n$ определена на всем R и $(x^n)^{(k)} = n(n-1)\ldots(n-k+1)x^{n-k}$, $x \in \mathrm{R}$, $1 \le k \le n-1$. При $k = n$ получим $(x^n)^{(n)} = n!$ для всех $x \in \mathrm{R}$ (так как $(x^n)^{(n-1)} = n!x$, $x \in \mathrm{R}$), и поэтому $(x^n)^{(m)} = 0$ для всех $x \in \mathrm{R}$ и всех $m > n$.

2) $f(x) = e^x$, $x \in \mathrm{R}$. Поскольку $f?(x) = e^x$, $f??(x) = e^x$, то $f^{(k)}(x) = e^x$, $x \in \mathrm{R}$, $k \in \mathrm{N}$.

3) $f(x) = \sin x$, $x \in \mathrm{R}$. Поскольку $f?(x) = \cos x = \sin(x+\frac{\pi}{2})$, то $f??(x) = (\sin(x+\frac{\pi}{2}))? = \cos(x+\frac{\pi}{2})\cdot(x+\frac{\pi}{2})? = \cos(x+\frac{\pi}{2}) = \sin(x+2\frac{\pi}{2})$, $x \in \mathrm{R}$, и, по индукции, $f^{(k)}(x) = \sin(x+k\frac{\pi}{2})$, $x \in \mathrm{R}$, $k \in \mathrm{N}$.

4) $f(x) = \cos x$, $x \in \mathrm{R}$. Так как $f?(x) = -\sin x = \cos(x+\frac{\pi}{2})$, то $f??(x) = (\cos(x+\frac{\pi}{2}))? = -\sin(x+\frac{\pi}{2})\cdot(x+\frac{\pi}{2})? = -\sin(x+\frac{\pi}{2}) = \cos(x+2\frac{\pi}{2})$, $x \in \mathrm{R}$, и, по индукции, $f^{(k)}(x) = \cos(x+k\frac{\pi}{2})$, $x \in \mathrm{R}$, $k \in \mathrm{N}$.

5) $f(x) = (1+x)^{\alpha}$, $x>-1$, $\alpha \in \mathrm{R}$ - фиксировано. Как и в примере 1, получим $f?(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1}(1+x)? = \alpha(1+x)^{\alpha-1}$, $f??(x) = \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2}$ и $f^{(k)}(x) = \alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1)x^{\alpha-k}$, $x>-1$, $k \in \mathrm{N}$.

6) $f(x) = \ln(1+x)$, $x>-1$. Так как $f?(x) = \frac{1}{1+x}(1+x)? = \frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1}$, то, на основании примера 5 с $\alpha = -1$, получим $f^{(k)}(x) = (f?)^{(k-1)}(x) = ((1+x)^{-1})^{(k-1)} = (-1)(-2)\ldots(-1-(k-1)+1)\cdot(1+x)^{-1-(k-1)} = (-1)^{k-1}(k-1)!(1+x)^{-k} = \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{(1+x)^k}$, $k\in \mathrm{N}$.

3. **Линейное свойство производных высших порядков**

Теорема 23.1. Для любого числа $n\in \mathrm{R}$, любых функций u и v, имеющих в какой-то точке x производные $u^{(n)}(x)$ и $v^{(n)}(x)$, и для любых чисел $\lambda_1,\lambda_2\in \mathrm{R}$, функция $w = \lambda_1 u + \lambda_2 v$ имеет в точке x производную $w^{(n)}(x)$ и $w^{(n)}(x) = (\lambda_1 u(x) + \lambda_2 v(x))^{(n)} = \lambda_1 u^{(n)}(x) + \lambda_2 v^{(n)}(x)$.

Доказательство. Поскольку каждая производная высшего порядка получается из производной предыдущего порядка посредством операции дифференцирования, а операция дифференцирования и первая производная обладают свойством линейности, то это свойство переносится на производные всех порядков.

4. **n-я производная произведения**

Теорема 23.2.(Г. Лейбниц). Если функции f и g на некотором промежутке имеют производные функции $f^{(n)}$ и $g^{(n)}$, $n\in \mathrm{N}$, то существует $(fg)^{(n)}$ и

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)} g^{(n-k)} = fg^{(n)} + nf?g^{(n-1)} + \ldots + \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!} f^{(k)}g^{(n-k)} + \ldots + nf^{(n-1)}g? + f^{(n)}g. \qquad (1)$$

Доказательство. Для n=1 утверждение справедливо по теореме 19.8: вместе с *f* и *g* произведение *fg* также дифференцируемо и

$$(fg)? = fg? + f?g = C_1^0 f^{(0)}g^{(1)} + C_1^1 f^{(1)}g^{(0)}.$$

Пусть утверждение теоремы справедливо для n, а функции *f* и *g* (n+1)-кратно дифференцируемы на рассматриваемом промежутке. Тогда эти функции вместе со своим произведением n-кратно дифференцируемы, и для него справедлива формула (1). Так как в каждом члене правой части этой формулы функции $f^{(k)}$ и $g^{(n-k)}$ дифференцируемы, то по теоремам 19.7, 19.8 функция $(fg)^{(n)}$ дифференцируема, причем $(fg)^{(n+1)} = ((fg)^{(n)})? =$

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k (f^{(k)} g^{(n-k+1)} + f^{(k+1)} g^{(n-k)}) =$$

$$C_n^0 f^{(0)} g^{(n+1)} + \sum_{k=1}^{n} C_n^k f^{(k)} g^{(n-k+1)} + \sum_{k=0}^{n-1} C_n^k f^{(k+1)} g^{(n-k)} + C_n^n f^{(n+1)} g^{(0)} .$$

Но $\sum_{k=0}^{n-1} C_n^k f^{(k+1)} g^{(n-k)} = C_n^0 f^{(1)} g^{(n)} + C_n^1 f^{(2)} g^{(n-1)} + \ldots + C_n^{n-2} f^{(n-1)} g^{(2)} + C_n^{n-1} f^{(n)} g^{(1)} =$

$\sum_{k=1}^{n} C_n^{k-1} f^{(k)} g^{(n-k+1)}$ и, принимая также во внимание свойства биномиальных коэффициентов: $C_n^k + C_n^{k-1} = C_{n+1}^k$, получаем

$$(fg)^{(n+1)} = C_{n+1}^0 f^{(0)} g^{(n+1)} + \sum_{k=1}^{n} (C_n^k + C_n^{k-1}) f^{(k)} g^{(n-k+1)} + C_{n+1}^{n+1} f^{(n+1)} g^{(0)} =$$

$\sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k f^{(k)} g^{(n+1-k)}$, так что формула (1) верна, если заменить n на $n+1$ и теорема доказана.

Вторая производная функции , заданной параметрически

Рассмотрим уравнение $\begin{cases} y = y(t) \\ x = x(t) \end{cases}$ (2)

Где $x(t)$, $y(t)$ − дважды дифференцируемые функции на некотором промежутке T; пусть, кроме того, функция $x(t)$ строго возрастает (или убывает) на T и ни в одной точке этого промежутка x_t' не равна 0. В пункте 20.7 доказано, что в этом случае уравнения (2) задают функцию $Y(x) = y(t(x))$, и производная этой функции равна

$$Y'(x) = \frac{y'_t}{x'_t} \qquad (\mathbf{3})$$

Бывает также, что производные по параметру t обозначают так: $x'_t = \dot{x}$, $y'_t = \dot{y}$. Тогда формула (**3**) принимает вид: $Y'(x) = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}$. Найдём вторую производную функции $Y(x)$:

$$Y''(x) = \frac{d(Y'(x))}{dx} = \frac{d(Y'(x))/dt}{dx/dt} = \frac{d\left(\dot{y}/\dot{x}\right)/dt}{\dot{x}} = \frac{\ddot{y}\dot{x} - \dot{y}\ddot{x}}{\left(\dot{x}\right)^3}$$

5. **<u>Дифференциалы высших порядков</u>**.

Однородную линейную функцию называют линейной формой. Напомним, что если функция f дифференцируема в точке x, то дифференциалом f в x называют линейную форму $f'(x)h$. Аналогично, если f дифференцируема дважды в точке x, то ее ***вторым дифференциалом называют*** квадратичную форму $f''(x)h^2$. Вообще, ***n-ым дифференциалом*** f в точке x будет n-ичная форма $f^{(n)}(x)h^n$ (в предположении, что $f^{(n)}(x)$ существует). Для n-го дифференциала f в точке x используют обозначение $d^n f(x)$ или, более строго $d^n f(x)(h)$.

Таким образом, по определению,

$$d^n f(x)(h) = f^{(n)}(x)h^n \text{ для всех } h \in \mathrm{R}. \qquad (2)$$

Согласно этому определению, $h^n = (dx(h))^n$ есть n-я степень функции $dx(h)$ и потому используют обозначение $(dx(h))^n = dx^n(h)$. Тогда (2) примет вид

$$d^n f(x)(h) = f^{(n)}(x)dx^n(h) \text{ для всех } h \in \mathrm{R},$$

или равенства

$$d^n f(x) = f^{(n)}(x)dx^n. \qquad (3)$$

Форма (2) записи n-го дифференциала не инвариантна уже при n=2. Действительно, подставляя вместо x дифференцируемую функцию $\varphi(t)$ в левую часть формулы (2) (при n=2), получим

$$d^2 f(\varphi(t))(h) = \left(f(\varphi(t))\right)'' h^2 = \left(f'(\varphi(t))\varphi'(t)\right)' h^2 =$$
$$\left(f''(\varphi(t))(\varphi'(t))^2 + f'(\varphi(t))\varphi''(t)\right)h^2 \qquad (4)$$

а в результате такой же подстановки в правую часть, имеем

$$f''(\varphi(t))\left(d\varphi(t)(h)\right)^2 = \left(f''(\varphi(t))(\varphi'(t))^2\right)(dt(h))^2 = \left(f''(\varphi(t))(\varphi'(t))^2\right)h^2. (5)$$

Правые части формул (5) и (4) отличаются слагаемым $\left(f'(\varphi(t))\varphi''(t)\right)h^2$. Вообще говоря, это слагаемое не равно нулю. Однако если $\varphi(t)$ - линейная функция, то $\varphi''(t) = 0$ и, вообще, для любого $n \geq 2$ имеет место равенство $\varphi^{(n)}(t) = 0$, откуда следует, что формула (3) будет верна и для линейной функции $\varphi(t)$.

Билет 24. Теоремы Ферма, Ролля. Необходимые условия экстремума

Пусть $\dot{U}(a)$ - некоторая проколотая окрестность точки а.

Определение 24.1: Точка *a* – ***точка локального максимума*** *f(x)*, если для всех $x \in \dot{U}(a)$ выполняется неравенство *f(x)<f(a)*.Если для всех $x \in \dot{U}(a)$ выполняется неравенство $f(x) \le f(a)$, то говорят о точке ***нестрогого максимума***.

Аналогичным образом определяются точки ***локального минимума*** и ***нестрогого локального минимума***. Следует только заменить входящие в определение неравенства неравенствами $f(x) > f(a)$ и $f(x) \ge f(a)$, соответственно.

Обобщающие названия для точек максимума и минимума – ***точки экстремума.***

Теорема 24.1(П. Ферма): Пусть функция y=f(x) определена в окрестности точки а, пусть эта точка – точка экстремума (хотя бы нестрогого) для функции f(x) и пусть существует производная $f'(a)$. Тогда $f'(a)$=0.

Доказательство. Рассмотрим, для определенности, случай точки максимума. Тогда для всех $x \in \dot{U}(a)$ выполняется неравенство *f(x)<f(a),* или $f(x) - f(a) < 0$. Если $x \in \dot{U}(a)$ и *x<a*, то $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} > 0$.

По условию существует производная $f'(a)$. Значит, существует $f'_{лев}(a) = \lim\limits_{x\to a-0} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$. По теореме о предельном переходе в неравенствах, $f'_{лев}(a) \geq 0$.

Аналогично, при $x \in \dot{U}(a)$, $x>a$ выполняется неравенство $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} < 0$, поэтому $f'_{прав}(a) = \lim\limits_{x\to a+0} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \leq 0$. Так как, $f'(a) = f'_{лев}(a) = f'_{прав}(a)$, должны выполняться неравенства $\begin{cases} f'(a) \geq 0 \\ f'(a) \leq 0 \end{cases}$, из которых следует доказываемое равенство $f'(a)=0$.

Примечание 1. В точке экстремума производная может не существовать. Примером служит функция $y = |x|$. Она имеет минимум в точке x=0. однако $f'_{лев}(0) = -1$, $f'_{прав}(0) = 1$ и $f'(0)$ не существует.

Примечание 2. Теорема Ферма дает необходимое условие экстремума, но не достаточное, т.е. производная функции в точке может равняться нулю, а экстремума в этой точке нет. Пример: $y = x^3$. Эта функция имеет производную $y' = 3x^2$, обращающуюся в ноль при x=0, однако $y = x^3$ возрастает на всей числовой прямой.

Следствие (необходимые условия экстремума). Если функция $y = f(x)$ непрерывна на (a;b), то точками локального экстремума могут быть только такие точки x_0, в которых производная функции $y = f(x)$ либо не существует, либо обращается в 0.

Теорема 24.2(М.Ролль) Пусть

1) $f(x) \in C[a;b]$
2) $f(x) \in D(a;b)$;
3) $f(a) = f(b)$

Тогда существует точка c$\in$(a;b) такая, что $f'(c)=0$.

Доказательство. Так как функция f(x) непрерывна на отрезке [a;b], она принимает на этом отрезке наибольшее значение M и наименьшее значение m.

Если оказалось, что m=M, то это означает, что m=f(x)=M для всех $x\in$[a;b], т.е. функция $y=f(x)$ - постоянная на [a;b]. Поэтому для всех $x\in(a;b)$ имеет место равенство $f'(x)$=0.

Если же $m\neq M$, т.е. m<M, то хотя бы одно из этих значений функция принимает во внутренней точке [a;b].

Действительно, по условию 3) значения f(a) и f(b) равны друг другу и могут оказаться равны не более, чем одному из чисел m, M.

Пусть, например, M=f(c), где $c\in(a;b)$. Так как M наибольшее значение функции f(x) на всем отрезке [a;b], то оно будет наибольшим и для $x\in\dot{U}(c)$, т.е. c – точка локального экстремума.

По условию 2), в этой точке существует производная $f'(c)$. По теореме Ферма, $f'(c)$=0.

Замечание:

Все условия теоремы Ролля являются существенными. Это означает, что если не выполняется одно из них, а остальные два выполняются, заключение теоремы может оказаться неверным.

1) $f(x)=\begin{cases} x, если & x\in[0;1), \\ 0, если & x=1 \end{cases}$

Выполнены условия 2) и 3), не выполнено условие 1). Для всех $x\in(0;1)$ имеем $f'(x)$=1.

2) $f(x)=|x|$, $x\in[-1;1]$.

Не выполнено условие 2), условия 1),3) выполнены. На интервале (-1;0): $f'(x)$=-1; на интервале (0;1): $f'(x)$=1. В точке x=0 производная не существует, поэтому на (-1;1) нет такой точки, что $f'(x)$=0

3) *f(x)=x*

Выполнены первые 2 условия, третье на отрезке [0;1] не выполнено. Всюду на (0;1) имеем $f'(x)$=1.

Следствие теоремы 24.2: Пусть

$$1)\varphi(z),\varphi'(z),...,\varphi^{(n)}(z)\in C[x_0;x];$$
$$2)\varphi^{(n+1)}(z) \textit{существуетдля} \quad \textit{любой} z\in(x_0;x);$$
$$3)\varphi(x_0)=\varphi'(x_0)=...=\varphi^{(n)}(x_0)=0, \varphi(x)=0.$$

Тогда существует точка $\xi\in(x_0;x)$ такая, что $\varphi^{(n+1)}(\xi)=0$.

Доказательство. Для функции $\varphi(z)$ на отрезке [x_0;x] выполнены все условия теоремы Ролля, поэтому существует точка $c_1\in(x_0;x)$ такая, что $\varphi'(c_1)=0$.

Рассмотрим функцию $\varphi'(z)$ на отрезке [x_0;c_1]. Для нее также выполнены все условия теоремы Ролля. Поэтому существует точка c_2 , $c_2\in(x_0;c_1)$, такая что $\varphi''(c_2)=0$.

Аналогичными рассуждениями получаем, что существуют точки $c_n<c_{n-1}<...<c_2<c_1$ такие, что $\varphi^{(k)}(c_k)=0, k=1,...,n.$ Наконец, рассмотрим функцию $\varphi^{(n)}(z)$ на отрезке [x_0;c_n]. она тоже удовлетворяет всем условиям теоремы Ролля, т.к. $\varphi^{(n+1)}(z)=(\varphi^{(n)}(z))'$ существует на (x_0; λ),

значит и на $(x_0;c_n)$. Поэтому, по теореме Ролля, существует точка $\xi \in (x_0;c_n)$ такая, что $\varphi^{(n+1)}(\xi) = 0$.

Замечание:

Геометрический смысл теоремы Ролля: при ее условиях есть хотя бы одна точка c на интервале (a;b), касательная в которой параллельна оси x.

Билет 25. Теоремы Лагранжа, Коши. Критерий постоянства функции

Теорема 25.1 (Лагранж) Пусть $f(x) \in C[a, b]$, $f(x) \in D(a, b)$. Тогда существует точка $c \in (a, b)$ такая, что $f(b)-f(a) = f'(c)(b-a)$.

Доказательство. Рассмотрим вспомогательную функцию $F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$. $F(x) \in C[a, b]$, $F(x) \in D(a, b)$, так как F(x) отличается от f(x) лишь слагаемыми, совокупность которых представляет собой линейную функцию от x, которая всюду непрерывна и дифференцируема. При этом

$$F'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}. \qquad (1)$$

Вычислим $F(a) = f(a) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(a - a) = 0$. Аналогично, $F(b) = f(b) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(b - a) = f(b)\ (a) - f(b) + f(a) = 0$.

Итак, все условия теоремы Ролля верны для функции F(x). Поэтому существует точка $c \in (a, b)$ такая, что $F'(c) = 0$. С учётом формулы (1),

$$f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0,$$

что равносильно доказываемому равенству $f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$.

Замечания:

- Доказанную теорему также называют теоремой о среднем значении, а полученную в ней формулу – формулой конечных приращений.
- Если $a > b$ и $f(x) \in C[b, a]$, $f(x) \in D(b, a)$, то существует точка $c \in (b, a)$ такая, что

  $f(a) - f(b) = f'(c)(b - a)$.

Но это равенство можно записать так:

$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$.

Это означает, что формула конечных приращений верна как в случае $a < b$, так и в случае $a > b$.

- Часто рассматривают точку x, приращение Δx (причём, согласно примечанию 2, возможно, что $\Delta x < 0$) и функцию f ,непрерывную на отрезке, соединяющем точки x и $x + \Delta x$ и дифференцируемую хотя бы на этом интервале. Тогда доказанную формулу можно переписать в виде

$$\Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x) = f'(\xi)\,\Delta x, \qquad (2)$$

где ξ – точка, лежащая между x и $x + \Delta x$. Так как для любой точки ξ между x и $x + \Delta x$ существует число θ, $0 < \theta < 1$ такое, что $\xi = x + \theta\Delta x$, формулу (2) записывают также в виде $\Delta f(x) = f'(x + \theta\Delta x)\Delta x$

Следствия теоремы Лагранжа

Следствие 1. (критерий постоянства функции на интервале). Функция f(x), дифференцируемая на (a, b) (где (a, b) может быть и бесконечным интервалом) является постоянной **тогда и только тогда, когда $f'(x) = 0$ для всех $x \in (a, b)$.**

Доказательство. То, что производная постоянной функции равна 0 уже доказано. Докажем теперь, что если производная функции, определённой на интервале, равна 0, то эта функция является постоянной.

Для этого возьмём две произвольные точки $x_1, x_2 \in (a,b)$, для определённости пусть $x_1 < x_2$. Так как всюду на (a, b) существует производная, функция f(x) непрерывна на (a, b), следовательно, и на $[x_1, x_2] \subset (a, b)$. По теореме Лагранжа $f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1) = 0$, так как $f'(\xi) = 0$ по условию.

Это означает, что значения функции y = f(x) в любых двух точках x_1, $x_2 \in (a, b)$ одинаковые. Но это означает, что f(x) – постоянная.

Замечания к следствию 1:

- Это следствие ещё называют *основной леммой теории неопределённого интеграла.*
- Если f′(x) = 0 для всех $x \in X$, где X – объединение нескольких интервалов, то f(x) принимает постоянное значение на каждом из интервалов, своё для каждого интервала.

Теорема 25.2 (Коши). Пусть $f(x), g(x) \in C[a,b]$, f(x), $g(x) \in D(a,b)$, $g'(\xi) \neq 0$ для всех точек $\xi \in [a,b]$. Тогда существует точка $c \in (a, b)$ такая, что

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Доказательство. Доказательство во многом подобно доказательству теоремы Лагранжа. Рассмотрим вспомогательную функцию:

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{g(x)-g(a)}{g(b)-g(a)}\big(f(b)-f(a)\big).$$

Во-первых, эта функция существует, так как $g(b)-g(a) = g'(\xi)(b-a) \neq 0$ по условию теоремы. Далее, она непрерывна на отрезке $[a,b]$ и дифференцируема на интервале (a,b), причём её производная равна $F'(x) = f'(x) - g'(x)\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$. По теореме 23.2 (Ролля) существует $c \in (a,b)$ такая, что $F'(c) = 0$, т.е. $F'(c) = f'(c) - g'(c)\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = 0$, откуда сразу следует заключение теоремы.

Замечание.

Не стоит пытаться «упростить» доказательство теоремы Коши, применяя теорему Лагранжа отдельно к числителю и к знаменателю. Дело в том, что хотя и для $f(x)$ существует некоторая точка, обозначим её $c_f \in (a,b)$, такая, что $f(b)-f(a)=f'(c_f)(b-a)$, и для $g(x)$ существует некоторая точка, обозначим её $c_g \in (a,b)$, такая, что $g(b)-g(a)=g'(c_g)(b-a)$, мы не можем сразу утверждать, что эти точки совпадут, т.е.что $c_f = c_g = c$. Это равенство следует как раз из приведённого выше доказательства.

Билет 26. Формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа

Формула Тейлора представляет собой один из основных инструментов математического анализа. Её смысл состоит в том, что функция $f(x)$ представляется в виде $f(x) = T_n(x) + R_n(x)$, где $T_n(x)$ – многочлен Тейлора, $R_n(x)$ – остаточный член формулы Тейлора. В зависимости от вида $R_n(x)$ она используется в различных целях: при вычислениях значений функций с заданной точностью, при исследовании асимптотического поведения функций и т.д.

Теорема 26.1 (формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа) Пусть $f(x)$, $f'(x)$, …, $f^{(n)}(x)$ непрерывны в окрестности $U(x_0)$ точки x_0 и пусть в $\dot{U}(x_0)$ существует $f^{(n+1)}(x)$. Тогда для любого $x \in \dot{U}(x_0)$ существует точка ξ, лежащая между x_0 и x такая, что

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + \ldots \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} \quad (1)$$

Примечание.

В этом представлении функции $f(x)$ величина $\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x - x_0)^{n+1}$ называется ***остаточным членом в форме Лагранжа***.

Можно выписать более общую форму ***Шлёмильха и Роша*** (Schlomilch–Roche) остаточного члена:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n)}\big(x_0 + \theta(x - x_0)\big)}{n!\,p}(1-\theta)^{n+1-p}(x - x_0)^{n+1}, \quad (2)$$

где θ – число, удовлетворяющее неравенствам $0 < \theta < 1$, такое, что $\xi = x_0 + \theta(x - x_0)$, а $p > 0$ – любое число. Например, остаточный член в форме Лагранжа получится, если $p = n + 1$ в этой общей форме (2). Иногда бывает удобен ***остаточный член в форме Коши***, получаемый из (2) при $p = 1$:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}\big(x_0 + \theta(x - x_0)\big)}{n!}(1-\theta)^n (x - x_0)^{n+1}.$$

Однако наиболее часто используется остаточный член в форме Лагранжа и мы докажем формулу Тейлора именно в таком виде.

Доказательство. Рассмотрим вспомогательную функцию

$$\varphi(z) = f(z) - f(x_0) - f'(x_0)(z - x_0) - \frac{f''(x_0)}{2}(z - x_0)^2 - \ldots - \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(z - x_0)^n - A(z - x_0)^{n+1} \tag{3}$$

Поскольку эта функция $\varphi(z)$ получится вычитанием из $f(z)$ многочлена от z, а многочлен непрерывен и имеет непрерывные производные любого порядка, для функции $\varphi(z)$ сохраняются свойства функции $f(z)$, т.е. $\varphi(z)$, $\varphi'(z)$, …, $\varphi^n(z)$ непрерывны в $U(x_0)$ и $\varphi^{(n+1)}(z)$ существует в $\dot{U}(x_0)$.

Пусть $x \in \dot{U}(x_0)$. Для определённости, пусть $x > x_0$. Выберем число A так, чтобы выполнялось равенство $\varphi(x) = 0$. Это возможно, поскольку при подстановке x вместо z в (3), это равенство примет вид линейного относительно уравнения с коэффициентом при A, равным $(x - x_0)^{n+1} \neq 0$.

Теперь для применения следствия Ролля осталось только доказать, что выполняются равенства

$$\varphi(x_0) = \varphi'(x_0) = \varphi''(x_0) = \ldots = \varphi^{(n)}(x_0) = 0.$$

Для этого сначала вычислим k-ю производную, $k \geq 1$, от функции $(z - x_0)^l$ в точке $z = x_0$.

По формуле для производной степенной функции последовательно получаем:

$$\left((z - x_0)^l\right)' = l(z - x_0)^{l-1},\ \left((z - x_0)^l\right)'' = l(l-1)(z - x_0)^{l-2},\ \ldots,$$

$\left((z-x_0)^l\right)^{(k)} = l(l-1)...(l-k+1)\cdot(z-x_0)^{l-k}$, если $k<l$. В точке $z=x_0$ эта величина обращается в 0.

Если $k=l$, то $\left((z-x_0)^l\right)^{(l)} = l(l-1)...(l-l+1) = l!$.

Если же $k>l$, то дальнейшее дифференцирование даст тождественный ноль. (Степень многочлена $(z-x_0)^l$ равна l, т.е. он имеет вид $z^l + a_{l-1}z^{l-1} + ... + a_0$, k-кратное дифференцирование при $k>l$ каждого слагаемого, входящего в этот многочлен, даёт тождественный ноль)

Итак, все производные порядка k, $k \neq l$, функции $(z-x_0)^l$ равны 0 в точке $z=x_0$, а $\left((z-x_0)^l\right)^{(l)} = l!$.

Равенство $\varphi(x)=0$ справедливо по выбору A. Для любого $1<k\le n$ имеем, согласно доказанному выше $\varphi^{(l)}(x_0) = f^{(l)}(x_0) - \dfrac{f^{(l)}(x_0)}{l!}\cdot l! = 0$

Все условия следствия теоремы 23.2 (Ролля) выполнены, поэтому существует точка $\xi \in [x_0, x]$, такая, что $\varphi^{(n+1)}(\xi)=0$. Но $\varphi^{(n+1)}(z) = f^{(n+1)}(z) - A\cdot(n+1)!$, значит $0 = f^{(n+1)}(\xi) - A(n+1)!$,т.е.

$$A = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \tag{4}$$

Вспоминаем, что $\varphi(x)=0$ и подставляем x вместо z в формулу (3), учитывая (4):

$0 = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x-x_0) - ... - \dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n - \dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$, что означает:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + ... + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1},\ \xi\in[x_0,x] \tag{5}$$

Случай, когда $x < x_0$ вполне аналогичен и приводит к такому же равенству (5).

Замечания:

- Часто вместо ξ пишут $x_0 + \theta(x - x_0)$, где $0 < \theta < 1$ и наоборот, каждому такому $0 < \theta < 1$соответствует число ξ между x_0 и x.

- Часто вместо точки x_0 пишут просто x, а вместо x пишут $x + \Delta x$ и формула Тейлора приобретает вид:

$$f(x+\Delta x) = f(x) + f'(x)\Delta x + \frac{f''(x)}{2}\Delta x^2 + \ldots \frac{f^{(n)}(x)}{n!}(\Delta x)^n + \frac{f^{(n+1)}(x+\theta\Delta x)}{(n+1)!}(\Delta x)^{n+1},$$

$0 < \theta < 1$ (6)

- В случае, когда x – независимая переменная, или линейная функция от независимой переменной, $\Delta x = dx$, и $df^{(k)}\left(x\right) = f^{(k)}\left(x\right)\Delta x^k$. Обозначим $f(x+\Delta x) - f(x) = \Delta f(x)$. При этом формула Тейлора записывается так:

$$\Delta f(x) = df(x) + \frac{d^2 f(x)}{2} + \ldots + \frac{d^n f(x)}{n!} + \frac{d^{n+1} f(x+\theta\Delta x)}{(n+1)!} \qquad (7)$$

- Особенно часто формула Тейлора используется, когда $x_0 = 0$. Тогда $x = x_0 + \Delta x = \Delta x$ и

$$\Delta f(0) = f'(0) + \frac{f''(0)}{2} + \ldots + \frac{d^n f(0)}{n!} + \frac{d^{n+1} f(\theta\Delta x)}{(n+1)!}(\Delta x)^{n+1} \qquad (8)$$

Эту формулу часто называют также ***формулой Маклорена*** (Mac-Laurin).

Билет 27. Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано

Теорема 27.1 (Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано (G.Peano)). Пусть в окрестности $U(x_0)$ точки x_0 существуют и непрерывны $f(x)$, … $f^{(n-1)}(x)$. Пусть $f^{(n)}(x)$ существует в $U(x_0)$ и непрерывна в точке x_0

Тогда

$$\Delta f(x_0) = f'(x_0)\Delta x + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\Delta x^n + \overset{=}{o}((\Delta x)^n) \ \textbf{\textit{при}} \ \Delta x \to 0 \qquad (1)$$

Доказательство. Используем предыдущую теорему, в которой число n заменим числом $n-1$. Тогда

$$\Delta f(x_0) = f'(x_0)\Delta x + \ldots + \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(\Delta x)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(\xi)\Delta x^n}{n!}$$

, где ξ – между x_0 и x. (2)

При $\Delta x \to 0$ как x, так и заключённое между x_0 и x число ξ стремятся к x_0. Ввиду непрерывности $f^{(n)}$ в точке x_0, $f^{(n)}(\xi) = f^{(n)}(x_0) + \alpha(x)$, где $\alpha(x) \to 0$ при $x \to x_0$, т.е. при $\Delta x \to 0$.

Подставляя в (2), получаем:

$$\Delta f(x_0) = f'(x_0)\Delta x + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\Delta x^n + \frac{\alpha(x)}{n!}(\Delta x)^n$$

,

где $\alpha(x) \to 0$ при $\Delta x \to 0$, откуда сразу следует заключение теоремы.

Замечания:

- Вместо формул (7) и (8) предыдущего параграфа имеем, соответственно, $\Delta f(x) = df(x) + \frac{d^2 f(x)}{2} + \ldots + \frac{d^n f(x)}{n!} + \overset{=}{o}((\Delta x)^n)$ при $\Delta x \to 0$. И

$$\Delta f(0) = f'(0) + \frac{f''(0)}{2} + \ldots + \frac{d^n f(0)}{n!} + o(x^n), x \to 0.$$

- Утверждение теоремы останется справедливым, если предположить, что в окрестности $U(x_0)$ точки x_0 существуют и непрерывны $f(x)$, … $f^{(n-1)}(x)$ и что существует $f^{(n)}(x_0)$.

На экзамене это доказывать не требуется, однако ниже приведено доказательство этого утверждения – для тех, кому это интересно.

Доказать его легче всего, используя правило Лопиталя (вопрос28).

Теорема 27.2. +29.5. Пусть в окрестности $U(x_0)$ точки x_0 существуют и непрерывны $f(x)$, … $f^{(n-1)}(x)$ и пусть существует $f^{(n)}(x_0)$. Тогда

$$\Delta f(x_0) = f'(x_0)\Delta x + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\Delta x^n + \overset{=}{o}((\Delta x)^n) \;\; \textbf{\textit{при}} \;\; \Delta x \to 0.$$

Доказательство. Обозначим

$T_n(x) = f'(x_0)\Delta x + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\Delta x^n, \Delta x = x - x_0$, $R_n(x) = f(x) - T_n(x)$ и

рассмотрим отношение $\alpha(x) = \frac{R_n(x)}{(x-x_0)^n}$. По правилу Лопиталя(теореме 28.1), применённому $n-1$ раз, имеем

$$\lim_{x\to x_0}\frac{R_n(x)}{(x-x_0)^n} = \lim_{x\to x_0}\frac{R_n'(x)}{n(x-x_0)^{n-1}} = \ldots = \lim_{x\to x_0}\frac{R_n^{(n-1)}(x)}{n!(x-x_0)} = \frac{1}{n!}\lim_{x\to x_0}\frac{f^{(n-1)}(x) - T_n^{(n-1)}(x)}{(x-x_0)^n}$$

Из определения $T_n(x)$ следует, что $T_n^{(n-1)}(x) = f^{(n-1)}(x_0) + f^{(n)}(x_0)(x - x_0)$

Поэтому

$$\lim_{x \to x_0} \alpha(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{R_n^{(n-1)}(x)}{\left((x - x_0)^n\right)^{(n-1)}} = \frac{1}{n!} \lim_{x \to x_0} \left(\frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(x_0)}{x - x_0} - f^{(n-1)}(x_0) \right) =$$

$$= \frac{1}{n!}\left(f^{(n)}(x_0) - f^{(n)}(x_0) \right) = 0 .$$

Это означает, что $R_n(x) = f(x) - T_n(x) = \alpha(x)(\Delta x)^n = o\left((\Delta x)^n\right), \Delta x \to 0$, что и требовалось доказать.

***Билет 28. Разложения функций* e^x, sinx, cosx, lnx, $(1+x)^\mu$**

Применим доказанные формулы Тейлора к функциям, перечисленным выше.

1) Так как $(e^x)'=e^x$, для всех $k\in N$ выполняется равенство

$$(e^x)^{(k)}=e^x$$

Следовательно, все эти производные равны 1 при x=0.

Поэтому $e^x=1+x+\frac{x^2}{2}+...+\frac{x^n}{n!}+e^\xi\cdot\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$, где ξ – некоторая точка между 0 и x. Другая запись для точки ξ : ξ = θ x, 0 < θ <1. Это – разложение e^x с остаточным членом в форме Лагранжа.

Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано для e^x принимает вид

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2}+...+\frac{x^n}{n!}+\overset{=}{o}(x^n),\ x\to 0.$$

2)Перейдём к функциям sinx, cosx:

$$(\sin x)'=\cos x,\ (\sin x)''=(\cos x)'=-\sin x,\ (\sin x)'''=(-\sin x)'=-\cos x,$$

$(\sin\ x)^{(IV}\ =(-\cos\ x)'=\sin\ x$ и т.д.

Эти равенства означают, что $(\sin x)^{(n)}=(\sin x)^{(n+4k)}$ для любого $k\in N$. Поэтому имеет место формула $(\sin x)^{(n)}=\sin(x+\frac{n\pi}{2})$, которую легко проверить для n=0,1,2,3, а для остальных n она верна ввиду установленного равенства $(\sin x)^{(n)}=(\sin x)^{(n+4k)}$.

Поэтому при x=0 имеем:

производная порядка 4k равна $\sin(0+\frac{4\pi k}{2})=0$;

производная порядка 4k+1 равна $\sin(0+\frac{4\pi k+\pi}{2})=\sin(2\pi k+\frac{\pi}{2})=1$;

производная порядка 4k+2 равна $\sin(0+\frac{4\pi k+2\pi}{2})=0$;

производная порядка 4k+3 равна $\sin(\frac{4\pi k+3\pi}{2})=\sin(\frac{3\pi}{2})=-1$.

Следовательно,

$$\sin x = x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+...+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+0\cdot\frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}+\frac{\sin(\xi+\frac{2n+3}{2}\pi)}{(2n+3)!}x^{2n+3},$$

где ξ лежит между 0 и x.

Здесь – небольшая хитрость. Мы разложили функцию до членов степени 2n+2 , что позволило сделать погрешность меньшей. Конечно, член $\frac{0\cdot x^{2n+2}}{(2n+2)!}$ выписывать не надо, он равен 0, а здесь он был помещён только для разъяснения вышеупомянутой «хитрости». Итак

$$\sin x = x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+...+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\frac{\sin(\xi+\frac{2n+3}{2}\pi)}{(2n+3)!}x^{2n+3}.$$

Аналогично,

$(\cos x)^n=\cos(x+\frac{n\pi}{2})$ и

$$\cos x = 1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4!}+...+\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}+\frac{\cos(\xi+\frac{2n+2}{2}\pi)x^{2n+2}}{(2n+2)!}$$

Разложения для sinx и cosx по формуле Тейлора с остаточным членом в форме Пеано имеют вид:

$$\sin x = x-\frac{x^3}{3!}+...+(1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)}+\overset{=}{o}(x^{2n+2}),\ x\to 0$$

$$\cos x = 1-\frac{x^2}{2!}+...+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\overset{=}{o}(x^{2n+1}),\ x\to 0$$

3)Перейдём к функции $\ln(1+x)$. Её последовательные производные равны:

$$(\ln(1+x))' = \frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1},$$

$(\ln(1+x))'' = ((1+x)^{-1})' = -(1+x)^{-2}$ и т.д.

$$(\ln(1+x))^{(k)} = (-1)^{k-1}(k-1)!(1+x)^{-k}$$

Вычисленная при x=0, производная порядка k равна $(-1)^{k-1}(k-1)!$

Поэтому

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n + \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1}\cdot(1+\xi)^{-n-1},$$

где ξ – некоторая точка между 0 и x.

Разложение с остаточным членом в форме Пеано имеет вид:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n + \bar{\bar{o}}(x^n)$$

4)Наконец, вычислим последовательные производные функции $(1+x)^\mu$:

$\left((1+x)^\mu\right)' = \mu(1+x)^{\mu-1}$, $\left((1+x)^\mu\right)'' = \mu(\mu-1)(1+x)^{\mu-2}$, …,
$\left((1+x)^\mu\right)^{(k)} = \mu(\mu-1)\ldots(1+x)^{\mu-k}$.

Вычисленная в точке $x=0$, производная порядка k равна $\mu(\mu-1)\ldots(\mu-k+1)$.

Поэтому формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа имеет вид:

$$(1+x)^\mu = 1 + \mu x + \frac{\mu(\mu-1)}{2!}x^2 + \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)}{3!}x^3 + \ldots + \frac{\mu(\mu-1)\ldots(\mu-n+1)}{n!}x^n + \\ + \frac{\mu(\mu-1)\ldots(\mu-n)}{(n+1)!}(1+\xi)^{\mu-n-1}x^{n+1},$$

где ξ - между 0 и x. Это так называемое ***биноминальное разложение*** с остаточным членом в форме Лагранжа. Та же формула с остаточным членом в форме Пеано имеет вид:

$$(1+x)^{\mu}=1+\mu x+\ldots+\frac{\mu(\mu-1)\ldots(\mu-n+1)}{n!}x^{n}+\overset{=}{o}\left(x^{n}\right),\ x\to 0.$$

В качестве примера применения формулы Тейлора рассмотрим задачу нахождения $\sqrt[10]{1000}$ с точностью до 0,001.

Сначала подготовим ее к применению формулы Тейлора. Для этого, зная, что $2^{10}=1024$, перепишем вычисляемую величину в виде

$$2\cdot\sqrt[10]{\frac{1000}{1024}}=2\cdot\sqrt[10]{1-\frac{24}{1024}}=2\left(1-\frac{3}{128}\right)^{1/10}.$$

Используем биноминальное разложение при

$$\mu=\frac{1}{10},\ x=-\frac{3}{128}.$$

Число n членов разложения выберем, исходя из заданной точности. Для этого найдем n такое, чтобы:

$$\left|\frac{\frac{1}{10}\left(\frac{1}{10}-1\right)\ldots\left(\frac{1}{10}-n\right)}{(n+1)!}(1+\xi)^{\frac{1}{10}-n-1}\cdot\left(-\frac{3}{128}\right)^{n+1}\right|<0{,}0005 \qquad (1)$$

(тогда при умножении на стоящий впереди коэффициент 2 получаем требуемую точность 0,001).

Очевидно, что:

$$\left|\frac{\frac{1}{10}\left(\frac{1}{10}-1\right)\ldots\left(\frac{1}{10}-n\right)}{(n+1)!}\right|<\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{n+1};$$

Далее, ξ - между 0 и $-\dfrac{3}{128}$, поэтому $\dfrac{125}{128} < 1+\xi < 1$ и

$$\left(\frac{128}{125}\right)^{n+1} > \left(\frac{128}{125}\right)^{n+1-\frac{1}{10}} > (1+\xi)^{\frac{1}{10}-n-1} > 1,$$

поэтому

$$\left|(1+\xi)^{\frac{1}{10}-n-1}\cdot\left(-\frac{3}{128}\right)^{n+1}\right| < \left|\left(\frac{128}{125}\cdot\frac{3}{128}\right)^{n+1}\right| = \left(\frac{3}{125}\right)^{n+1} < \left(\frac{1}{40}\right)^{n+1}$$

Итак, абсолютная величина левой части неравенства (1) не больше, чем

$$\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{(n+1)}\cdot\frac{1}{(40)^{n+1}}. \qquad (2)$$

Поэтому если число (2) окажется меньше, чем 0,0005, то и остаточный член формулы будет меньше 0,0005 и требуемая точность будет достигнута.

Сразу ясно, что при $n=1$

Число $\dfrac{1}{10}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{40^2} = \dfrac{1}{32000} < 0{,}0005$.

Поэтому требуемую точность для приближенной величины даёт приближённая формула:

$$\sqrt[10]{1000} \approx 2+\frac{2}{10}\cdot\left(-\frac{3}{128}\right) = 2-\frac{3}{640}.$$

Билет 29. Правила Лопиталя

Приведённые ниже теоремы принадлежат, в основном, Лопиталю (G.F.de l'Hospitale) и И.Бернулли (Joh.Bernoulli).

29.1. **Неопределённость типа $\frac{0}{0}$**

Теорема 29.1. Пусть: 1) функции f(x) и g(x) определены в промежутке (a, b], 2) $\lim\limits_{X \to a+0} f(x) = 0, \lim\limits_{x \to a+0} g(x) = 0,$ 3) в промежутке (a, b] существуют конечные производные f'(x) и g'(x), причём g'(x) ≠ 0, и наконец, 4) существует (конечный или нет) предел

$$\lim_{x \to a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = K$$

Тогда и

$$\lim_{x \to a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = K$$

Доказательство. Дополним определение функций f(x) и g(x), положив их при x = a равными нулю: f(a) = g(a) = 0. Тогда эти функции окажутся непрерывными во всём замкнутом промежутке [a, b]: их значения в точке a совпадают с пределами при x→a + 0 [ввиду 2)], а в прочих точках непрерывность вытекает из существования конечных производных [см. 3)]. Применяя теорему Коши, получим

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)},$$

где a‹c‹x. То обстоятельство, что g(x) ≠ 0, т. е. g(x) ≠ g(a), есть следствие предположения: g′(x) ≠ 0, как это было установлено при выводе формулы Коши.

Когда x→a, очевидно, и c→a, так что, в силу 4),

$$\lim_{x\to a+0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{c\to a}\frac{f'(c)}{g'(c)}=K,$$

что и требовалось доказать.

Таким образом, доказанная теорема сводит предел отношения функций к пределу отношения производных, если последний существует. Часто оказывается, что нахождение предела отношения производных проще и может быть осуществлено элементарными приёмами.

Теорема 1 легко распространяется на случай, когда аргумент x стремится к бесконечному пределу: a = $\pm\infty$. Именно, имеет место, например.

<u>Теорема 29.2.</u> Пусть: 1) функции f(x) и g(x) определены в промежутке [c, +∞), где c›0, 2) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=0$, 3) существуют в промежутке [c, +∞) конечные производные f′(x) и g′(x), причём g′(x) ≠ 0, и, наконец, 4) существует (конечный или нет) предел

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}=K\ .$$

Тогда и

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=K.$$

Доказательство. Преобразуем переменную x по формуле x = $\frac{1}{t}$, t = $\frac{1}{x}$. Тогда, если x→+∞, то t→0, и обратно. Ввиду 2), имеем

$$\lim_{t\to+0} f\left(\frac{1}{t}\right)=0,\ \lim_{t\to+0} g\left(\frac{1}{t}\right)=0,$$

а в силу 4),

$$\lim_{t\to+0}\frac{f'\left(\frac{1}{t}\right)}{g'\left(\frac{1}{t}\right)}=K\cdot$$

К функциям $f\left(\frac{1}{t}\right)$ и $g\left(\frac{1}{t}\right)$ от новой переменной t можно применить теорему 28.1, что даст нам

$$\lim_{t\to+0}\frac{f\left(\frac{1}{t}\right)}{g\left(\frac{1}{t}\right)}=\lim_{t\to+0}\frac{f'\left(\frac{1}{t}\right)\cdot\left(-\frac{1}{t^2}\right)}{g'\left(\frac{1}{t}\right)\cdot\left(-\frac{1}{t^2}\right)}=\lim_{t\to+0}\frac{f'\left(\frac{1}{t}\right)}{g'\left(\frac{1}{t}\right)}=K,$$

а тогда и

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=K.$$

29.2. <u>Неопределённость вида $\frac{\infty}{\infty}$.</u>

Обратимся к рассмотрению неопределённых выражений вида $\frac{\infty}{\infty}$, т. е. исследуем вопрос о пределе отношения двух функций f(x) и g(x), стремящихся к +∞ (при x→a + 0).

В этом случае применимо то же правило Лопиталя: следующая теорема есть простая перефразировка теоремы 28.1.

<u>Теорема 29.3</u> Пусть: 1) функции f(x) и g(x) определены в промежутке (a, b], 2) $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to a+0} g(x)=+\infty$, 3) существуют в промежутке (a, b] конечные производные f′(x) и g′(x), причём g′(x) ≠ 0, и, наконец, 4) существует (конечный или нет) предел

$$\lim_{x\to a+0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=K.$$

Тогда и

$$\lim_{x\to a+0}\frac{f(x)}{g(x)}=K.$$

<u>Теорема 29.4</u> Пусть: 1) функции f(x) и g(x) определены в промежутке[c, +∞), где c›0, 2) $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=+\infty$, 3) существуют в промежутке [c, +∞) конечные производные f′(x) и g′(x), причём g′(x) ≠ 0, и, наконец, 4) существует (конечный или нет) предел

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}=K\cdot$$

Тогда и

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=K.$$

Теоремы 28.3 и 28.4 даны БЕЗ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА. На экзамене следует знать их формулировки.

Правило Лопиталя позволяет доказать замечание, сделанное в конце 26 вопроса.

<u>Теорема 29.5+27.2.</u> Пусть в окрестности $U(x_0)$ точки x_0 существуют и непрерывны $f(x)$, … $f^{(n-1)}(x)$ и пусть существует $f^{(n)}(x_0)$. Тогда

$$\Delta f(x_0)=f'(x_0)\Delta x+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\Delta x^n+\overset{=}{o}((\Delta x)^n)\text{ при }\Delta x\to 0.$$

Доказательство. Обозначим

$T_n(x) = f'(x_0)\Delta x + \ldots + \dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\Delta x^n, \Delta x = x - x_0$, $R_n(x) = f(x) - T_n(x)$ и

рассмотрим отношение $\alpha(x) = \dfrac{R_n(x)}{(x-x_0)^n}$. По правилу Лопиталя(теореме 28.1),

применённому $n-1$ раз, имеем

$$\lim_{x\to x_0}\frac{R_n(x)}{(x-x_0)^n} = \lim_{x\to x_0}\frac{R_n'(x)}{n(x-x_0)^{n-1}} = \ldots = \lim_{x\to x_0}\frac{R_n^{(n-1)}(x)}{n!(x-x_0)} = \frac{1}{n!}\lim_{x\to x_0}\frac{f^{(n-1)}(x) - T_n^{(n-1)}(x)}{(x-x_0)^n}$$

.Из определения $T_n(x)$ следует, что $T_n^{(n-1)}(x) = f^{(n-1)}(x_0) + f^{(n)}(x_0)(x-x_0)$

.Поэтому

$$\lim_{x\to x_0}\alpha(x) = \lim_{x\to x_0}\frac{R_n^{(n-1)}(x)}{\left((x-x_0)^n\right)^{(n-1)}} = \frac{1}{n!}\lim_{x\to x_0}\left(\frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(x_0)}{x-x_0} - f^{(n-1)}(x_0)\right) =$$

$$= \frac{1}{n!}\left(f^{(n)}(x_0) - f^{(n)}(x_0)\right) = 0$$.Это означает, что

$R_n(x) = f(x) - T_n(x) = \alpha(x)(\Delta x)^n = o\left((\Delta x)^n\right), \Delta x \to 0$, что и требовалось доказать.

Билет 30. Монотонность функции. Достаточные условия экстремума функции

Напомним основные определения 10.1’.

Определение 30.1 Функция $f(x)$, определенная на промежутке X , ***возрастает*** на этом промежутке, если для любых $x_1, x_2 \in X$, $x_1 < x_2$ имеет место неравенство $f(x_1) < f(x_2)$.

Функция $f(x)$, определенная на промежутке X , ***не убывает*** на X , если для любых $x_1, x_2 \in X$, $x_1 < x_2$ имеет место неравенство $f(x_1) \leq f(x_2)$.

Функция $f(x)$, определенная на промежутке X , ***убывает на*** X , если для любых $x_1, x_2 \in X$, $x_1 < x_2$ имеет место неравенство $f(x_1) > f(x_2)$.

Функция $f(x)$, определенная на промежутке X , ***не возрастает*** на X , если для любых $x_1, x_2 \in X$, $x_1 < x_2$ имеет место неравенство $f(x_1) \geq f(x_2)$.

Общее название рассмотренных функций - ***монотонные функции***.

Ясно, что если функция возрастает на X , то она, тем более, не убывает на X (но не наоборот). Аналогичное замечание справедливо для убывающей функции.

Общее название возрастающих, убывающих функций – ***строго монотонные функции.***

Теорема 30.1. Пусть функция $f(x)$ дифференцируема на интервале (a,b). Она не убывает (не возрастает) на (a,b) тогда и только тогда, когда для всех $x \in (a,b)$ выполняется неравенство $f'(x) \geq 0$.

Доказательство. Пусть $f(x)$ не убывает на (a,b) (случай невозрастания рассматривается аналогично). Тогда рассмотрим произвольную точку $x \in (a,b)$ и приращения Δx такие, что $x+\Delta x \in (a,b)$. Если $\Delta x > 0$, то $f(x+\Delta x)-f(x) \geq 0$ и

$\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} \geq 0$.

Если $\Delta x < 0$, то $f(x+\Delta x)-f(x) \leq 0$, но все равно $\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} \geq 0$. Предел

$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ существует и равен $f'(x)$. По теореме 9.1 этот предел ≥ 0.

Обратно пусть для всех $x \in (a,b)$ выполняется неравенство $f'(x) \geq 0$. Пусть $x_1, x_2 \in (a,b)$, $x_1 < x_2$. К отрезку $[x_1, x_2]$ можно применить теорему Лагранжа. Действительно, т.к. $f(x)$ дифференцируема на (a,b), то она непрерывна на (a,b), а, значит, и на $[x_1, x_2] \subset (a,b)$. Также по условию она дифференцируема на $(x_1, x_2) \subset (a,b)$. Следовательно, $f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1) \geq 0$.

Теорема 30.1 допускает уточнение

<u>Теорема 30.2</u>. Пусть $f(x)$ дифференцируема на (a,b) и для всех $x \in (a,b)$ выполняется неравенство $f'(x) > 0$. Тогда $f(x)$ возрастает на (a,b).

Доказательство. Как и в предыдущей теореме, получаем, что для любых $x_1, x_2 \in (a,b)$, $x_1 < x_2$, имеет место неравенство

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1) > 0.$$

Замечание:

Утверждать, что если функция возрастает, то для всех $x \in (a,b)$выполняется неравенство $f'(x) > 0$ нельзя. Пример функции $f(x) = x^3$ показывает, что хотя эта функция возрастает на всей прямой, есть точка $x = 0$, в которой ее производная равна 0.

Таким образом, даже возрастание функции $f(x)$ гарантирует, по теореме 30.1, лишь нестрогое неравенство $f'(x) \geq 0$.

В теореме 24.1 установлено необходимое условие экстремума: ***Если функция*** f ***имеет производную*** f' ***в точке экстремума*** x***, то*** $f'(x)=0$**.**

Как показывает пример из предыдущего замечания, $f(x)=x^3$, это условие не является достаточным.

<u>Теорема 30.3</u>. Пусть функция $f(x)$ непрерывна в некоторой окрестности $U_\delta(x_0)$ и пусть $f'(x)<0$ для всех $x\in(x_0-\delta,x_0)$ и $f'(x)>0$ для всех $x\in(x_0,x_0+\delta)$. Тогда x_0 - точки минимума. Если же $f'(x)>0$ для всех $x\in(x_0-\delta,x_0)$ и $f'(x)<0$ для всех $x\in(x_0,x_0+\delta)$, то x_0 - точка максимума.

Доказательство. Проведём доказательство для точки минимума. Пусть $x_1\in U(x_0)$, и $x_1\neq x_0$.

Если $x_1<x_0$, то применим теорему Лагранжа к отрезку $[x_1,x_0]$:

$f(x_0)-f(x_1)=f'(\xi)(x_0-x_1)<0$.

Если $x_1>x_0$, то применим теорему Лагранжа к отрезку $[x_0,x_1]$:

$f(x_0)-f(x_1)=f'(\xi)(x_0-x_1)<0$,

Поэтому $f(x_0)-f(x_1)<0$. Таким образом, x_0 - точка минимума.

<u>Теорема 30.4</u>. Пусть $f(x), f'(x)\in C(U(x_0))$, $f''(x)$ существует в $U(x_0)$ и $f''(x)\in C(x_0)$. Пусть x_0 такова, что $f'(x_0)=0$, $f''(x_0)\neq 0$
Тогда если $f''(x_0)<0$, то x_0 - точка максимума, если $f''(x_0)>0$, то x_0 - точка минимума.

Доказательство. Условия теоремы дают возможность применить формулу Тейлора с остаточным членом в форме Пеано, т.е. теорему 26.1, согласно которой, с учётом равенства $f'(x_0)=0$, имеем:

$$f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=f'(x_0)\Delta x+\frac{f''(x_0)}{2}\Delta x^2+\alpha(\Delta x)\cdot\Delta x^2=\frac{f''(x_0)}{2}\Delta x^2+\alpha(\Delta x)\cdot\Delta x^2,$$

где $\alpha(\Delta x)\to 0$ при $\Delta x\to 0$.

Пусть $\varepsilon=\frac{|f''(x_0)|}{4}$. Так как $\alpha(\Delta x)\to 0$ при $\Delta x\to 0$, существует $\delta>0$ такое, что для любых Δx: $|\Delta x|<\delta$ выполняется неравенство $|\alpha(\Delta x)|<\varepsilon=\frac{|f''(x_0)|}{4}$.

Это означает, что модуль второго слагаемого в сумме $\frac{f''(x_0)}{2}\Delta x^2+\alpha(\Delta x)\Delta x^2$ не превосходит половины модуля первого слагаемого, т.е. $\frac{f''(x_0)}{2}\Delta x^2$, поэтому знак этой суммы совпадает со знаком $\frac{f''(x_0)}{2}\Delta x^2$. Но знак этой величины совпадает со знаком $f''(x_0)$ как при $\Delta x>0$, так и при $\Delta x<0$, так как $(\Delta x)^2>0$. Следовательно, приращение $f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ не меняет знак в окрестности точки x_0, и знак его совпадает со знаком $f''(x_0)$. Это и означает, что если $f''(x_0)<0$, то x_0 - точка максимума, а если $f''(x_0)>0$, то x_0 - точка минимума.

Ещё более тонкий достаточный признак экстремума содержится в следующей теореме.

Теорема 30.5. Пусть $f(x), f'(x),\dots, f^{(n-1)}(x)\in C(U(x_0))$, $f^{(n)}(x)$ существует в $U(x_0)$ и $f^{(n)}(x)\in C(x_0)$. Пусть точка x_0 такова, что $f'(x_0)=\dots=f^{(n-1)}(x_0)=0$, а $f^{(n)}(x_0)\neq 0$. Тогда если n – чётное число, то в точке x_0 есть экстремум, минимум при $f^{(n)}(x_0)>0$, максимум при $f^{(n)}(x_0)<0$.

Если же n – нечётное число, то в точке x_0 экстремума нет.

Доказательство. Аналогично предыдущей теореме, получаем равенство $f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=\dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\Delta x^n+\alpha(\Delta x)\Delta x^n$, где $\alpha(\Delta x)\to 0$ при $\Delta x\to 0$, из которого точно так же следует, что знак приращения $f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ совпадает со знаком $\dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\Delta x^n$ при условии $|\Delta x|<\delta$.

Если n – чётное число, то, как и в предыдущей теореме, $\Delta x^n>0$ как для $\Delta x>0$, так и для $\Delta x<0$, поэтому знак приращения совпадает со знаком $f^{(n)}(x_0)$ и заключение теоремы становится очевидным.

Если же n – нечётное число, то величина Δx^n положительна при $\Delta x>0$ и отрицательна при $\Delta x<0$, поэтому приращение $f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ меняет свой знак в произвольной окрестности точки x_0, следовательно, в точке x_0 нет экстремума.

Билет 31. Выпуклость графика функции

Пусть $f(x) \in D(a,b)$. Тогда в каждой точке её графика есть касательная, уравнение которой: $y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$.

Определение 31.1. Функция $f(x)$ называется ***выпуклой вниз*** на *(a,b),* если $\forall x_0, x \in (a,b)$ $f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) > 0$ (т.е. точка графика $(x, f(x))$ лежит над касательной к этому графику в любой точке $(x_0, f(x_0))$, $x_0 \in (a,b)$.

Выпуклость вверх определяется условием $f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) < 0$.

Теорема 31.1 Если производная $f'(x)$- возрастающая на (a,b) функция, то $f(x)$ - выпукла вниз на (a,b).

► $f(x) - f(x_0) = f'(\xi)(x - x_0)$, где ξ лежит между x_0 и x, по теореме Лагранжа все условия которой, разумеется, выполнены. Пусть $x_0 < \xi < x$. Тогда $(x - x_0) > 0$ и $f'(\xi) > f'(x_0)$, поэтому

$$f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) = (f'(\xi) - f'(x_0))(x - x_0) > 0.$$

Если же $x < \xi < x_0$, то $(x - x_0) < 0,$ $f'(\xi) < f'(x_0)$ и снова

$$f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) = (f'(\xi) - f'(x_0))(x - x_0) > 0$$ ◄

Аналогично доказывается, что если $f'(x)$ убывает на (a,b), то график $f(x)$- выпуклая вверх функция.

Если $f(x)$ имеет вторую производную на (a,b), то из теоремы 1 следует:

если $f''(x) > 0$ на (a,b), то график функции выпуклый вниз, если $f''(x) < 0$ - то вверх. В качестве примера рассмотрите функцию $f(x) = x^2$ и $f(x) = -x^2$.

Точка, в которой направление выпуклости меняется на противоположное, называется ***точкой перегиба***. Если существует $f''(x)$, то, поскольку в точке перегиба x_0 производная имеет экстремум, в ней вторая производная равна 0, т.е. $f''(x_0)=0$.

Например, $f(x)=x^3$ имеет в $x_0=0$ перегиб, так как слева от $x_0=0$, т.е. при $x<0,\ f''(x)<0$, а при $x>0$ $f''(x)>0$.

В самой точке $x_0=0$, $f''(0)=0$.

Разумеется, равенство $f''(x_0)=0$ - это необходимое условие точки перегиба. Оно не является достаточным, как показывает пример функции $f(x)=x^4$. Она имеет вторую производную $f''(x)=12x^2$, которая не меняет знак, но обращается в 0 в точке $x_0=0$. Эта функция выпукла вниз на $\mathbb{R}$.

Достаточное условие точки перегиба даёт такое утверждение:

Пусть $f(x),\ f'(x),\ \dots,\ f^{(n)}(x)$ непрерывна на (a,b) и пусть в точке x_0 выполнены условия:

$$f''(x_0)=\dots=f^{(n-1)}(x_0)=0,\ \ f^{(n)}(x_0)\neq 0.$$

Тогда если n - нечетное число, то x_0 - точка перегиба, а если n - четное число, то в x_0 - нет перегиба.

Для доказательства используем формулу Тейлора, с остаточным членом в форме Пеано:

$$f(x)-f(x_0)-f'(x_0)(x-x_0)=\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\dots+\frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1}+$$

$$+\frac{f^{(n)}(x_0)}{(n)!}(x-x_0)^n+\alpha(x)(x-x_0)^n,\ \textit{где}\ \alpha(x)\to 0\ \textit{при}\ x\to x_0$$

Из условий следует, что

$$f(x)-f(x_0)-f'(x_0)(x-x_0)=\frac{f^{(n)}(x_0)}{(n)!}(x-x_0)^n+\alpha(x)(x-x_0)^n \quad .$$

Рассуждая, как в случае вопроса о точках экстремума, получаем, что знак правой части совпадает со знаком $f^{(n)}(x_0)$, если n - четное число, и меняется, если n - нечетное число (при x из окрестности точки x_0). Это доказывает утверждение.

Далее приводится усложнённый вариант доказателства

31.1. **<u>Выпуклость непрерывной функции</u>**

<u>Определение 31.1′</u>. Непрерывная на интервале *(a,b)* функция *f* , называется ***выпуклой вниз*** (соответственно, ***выпуклой вверх***), если для любых точек $x_1, x_2 \in (a,b)$, $x_1 < x_2$, и любого числа $\lambda, 0 \le \lambda \le 1$ справедливо неравенство

$$(1-\lambda)f(x_1)+\lambda f(x_2) \ge f((1-\lambda)x_1+\lambda x_2) \qquad (1)$$

(соответственно, неравенство

$$(1-\lambda)f(x_1)+\lambda f(x_2) \le f((1-\lambda)x_1+\lambda x_2)\,. \qquad (1')$$

В правой части неравенства (1) стоит значение функции *f* в произвольной точке $x=(1-\lambda)x_1+\lambda x_2$, расположенной на отрезке $[x_1, x_2]$, содержащемся в интервале *(a,b)*. Левая часть в (1) выражает собой ординату точки координатной плоскости, абсцисса которой равна $x=(1-\lambda)x_1+\lambda x_2$, $0 \le \lambda \le 1$, и которая лежит на прямолинейном отрезке (хорде), соединяющем точки $M_1(x_1, f(x_1))$ и $M_2(x_2, f(x_2))$ графика функции *f*.

Итак, если непрерывная функция *f* выпукла вниз на интервале *(a,b)*, то для любых его точек $x_1, x_2 \in (a,b)$, $x_1 < x_2$, график функции *f* на отрезке $[x_1, x_2]$ расположен ниже хорды, стягивающей концевые точки графика на этом отрезке (см. рис.1, а)).

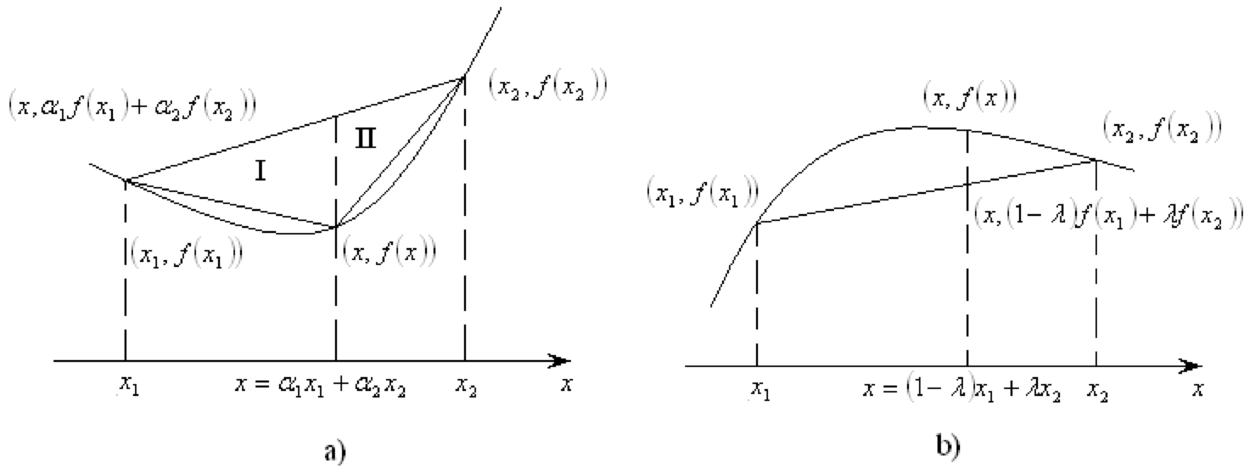


Рис.1

Аналогично, заключаем, что если непрерывная функция *f* выпукла вверх на интервале *(a,b)*, то для любых его точек $x_1, x_2 \in (a,b)$, $x_1 < x_2$, график функции *f* на отрезке $[x_1, x_2]$ расположен выше хорды, стягивающей концевые точки графика на этом отрезке (см. рис.1, b)).

Обозначим $(1-\lambda)x_1 + \lambda x_2 = x$. Тогда $\lambda(x_2 - x_1) = x - x_1$, откуда

$$\lambda = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}, 1 - \lambda = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1}.$$

Неравенство (1) принимает вид

$$f(x) \le \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2), \qquad (2)$$

или, после умножения обеих частей его на множитель $x_2 - x_1 > 0$,

$$(x_2 - x_1) f(x_1) + (x_1 - x_2) f(x) + (x - x_1) f(x_2) \ge 0. \qquad (3)$$

Поскольку $x_2 - x_1 = (x_2 - x) + (x - x_1)$, то после элементарных преобразований неравенство (4) переходит в неравенство

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \le \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x} = \frac{f(x) - f(x_2)}{x - x_2}, \qquad (4)$$

справедливое для любого $x, x_1 < x < x_2$.

Итак, условие (1) равносильно неравенству (4).

В случае выпуклости вверх знаки неравенств (2)-(4) следует сменить на противоположные.

2. **Выпуклость дифференцируемой функции**

<u>Теорема 31.1′.</u> Для того, чтобы дифференцируемая на (a,b) функция f была выпукла вниз (вверх) на этом интервале, необходимо и достаточно, чтобы её производная функция f' не убывала (не возрастала) на этом интервале.

Доказательство. Доказательство проведём для выпуклой вниз функции. Докажем сначала, что её производная не убывает.

Пусть $[x_1, x_2] \subset (a,b)$, $x_1 < x_2$. Переходя в неравенстве (4) к пределу при $x \to x_1$, получим:

$$f'(x_1) \le \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \quad . \tag{5}$$

Переходя в неравенстве (4) к пределу при $x \to x_2$, получим:

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \le f'(x_2). \tag{6}$$

Из неравенств (5) и (6) следуют неравенства $f'(x_1) \le \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \le f'(x_2)$,

это и требовалось доказать.

Обратно, пусть производная функция f' не убывает на (a,b). Пусть $[x_1, x_2] \subset (a,b)$, $x_1 < x_2$. Следует доказать, что выполняется неравенство (4). Для этого заметим, что $f(x)$ дифференцируема на (a,b), следовательно, непрерывна на (a,b) и непрерывна на $[x_1, x_2] \subset (a,b)$. Тогда по теореме Лагранжа, применённой к отрезку $[x_1, x]$, где $x_1 < x < x_2$, находим:

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} = \frac{f'(c_1)(x - x_1)}{x - x_1} = f'(c_1), x_1 < c_1 < x. \tag{7}$$

Аналогично, по теореме Лагранжа, применённой к отрезку $[x, x_2]$,

$$. \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x} = \frac{f'(c_2)(x_2 - x)}{x_2 - x} = f'(c_2), x < c_2 < x_2. \tag{8}$$

Так как f' не убывает на (a,b), выполняется неравенство $f'(c_1) \le f'(c_2)$, из которого следует, ввиду (7) и (8), неравенство (4), равносильное выпуклости вниз рассматриваемой функции.

<u>Теорема 31.2</u>. Функция $f(x)$, дифференцируемая на интервале (a,b),тогда и только тогда выпукла вниз на этом интервале, когда для любой точки $x_0 \in (a,b)$ и любой точки $x \in (a,b)$ справедливо неравенство

$$f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Противоположное неравенство

$$f(x) \leq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0),$$

справедливо для всех, $x, x_0 \in (a,b)$ тогда и только тогда, когда функция $f(x)$ выпукла вверх на (a,b).

Доказательство. Доказательство проведём для случая выпуклой вниз функции. Пусть сначала дифференцируемая функция $f(x)$ выпукла вниз на (a,b). Тогда, как установлено в теореме 30.1, справедливы неравенства (5) и (6). Неравенство (5) можно преобразовать к равносильному виду

$$f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0). \qquad (9)$$

Преобразование состоит в умножении обеих частей неравенства (5) на положительный знаменатель и замене обозначений: точку x_1 заменяем на x_0, а точку x_2 – на точку x, считая, что $x_0 < x$. Точно также, при $x_0 > x$, преобразуем неравенство (6), заменяя точку x_1 на точку x, а точку x_2 – на x_0. После этого преобразования снова получим неравенство (9).

Таким образом, если дифференцируемая функция выпукла вниз на интервале (a,b), то для всех $x, x_0 \in (a,b)$ выполняется неравенство (9). Для выпуклой вверх функции имеем, соответственно,

$$f(x) \leq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Обратно, пусть для всех $x, x_0 \in (a,b)$ выполняется неравенство (9).

Рассмотрим произвольные точки $x_1, x_2 \in (a,b)$, $x_1 < x_2$. Применяя неравенство (9) к точке $x_0 = x_1$ и считая $x = x_2$, получим неравенство $f(x_2) \geq f(x_1) + f'(x_1)(x_2 - x_1)$, а применяя его к точке $x_0 = x_2$ и считая $x = x_1$, получаем неравенство $f(x_1) \geq f(x_2) + f'(x_2)(x_1 - x_2)$, на основании которых, с учётом условия $x_2 - x_1 > 0$, имеем

$$f'(x_2) \geq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \geq f(x_1).$$

Следовательно, производная функции f' не убывает на (a,b). По теореме 30.1 функция $f(x)$ выпукла вниз на (a,b).

Геометрически свойство выпуклости вниз дифференцируемой функции *f* на (a,b) означает, что её график в пределах этого интервала располагается выше касательной, проведенной в любой точке графика; для выпуклой вверх дифференцируемой функции картина противоположная (см. рис. 2).

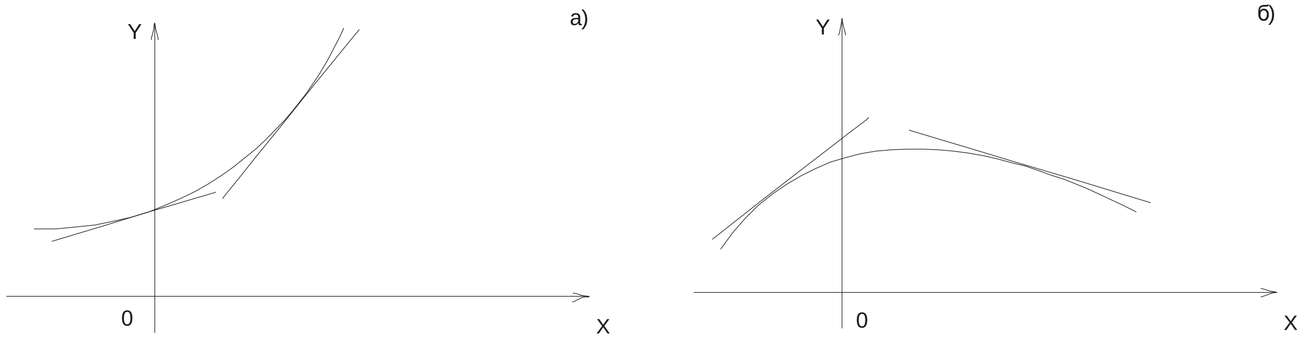


Рис.2

Замечание:

. Если обозначить

$$\Delta(x;x_0) = \Delta(x) = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0),$$

то свойство выпуклости вниз(вверх) дифференцируемой функции f на (a,b) равносильно тому, что для любой точки $x_0 \in (a,b)$ неравенство $\Delta x \geq 0$ ($\Delta x \leq 0$) справедливо для всех $x \in (a,b)$. Отметим, что $\Delta(x_0, x_0) = (\Delta x_0) = 0$

3. **Выпуклость дважды дифференцируемой функции**

Теорема 31.3. Для того чтобы функция f, дважды дифференцируемая в интервале (a,b), была выпуклой вниз (вверх) на (a,b), необходимо и достаточно, чтобы $f''(x) \geq 0$ $(f''(x) \leq 0)$ во всех точках $x \in (a,b)$.

Доказательство. Согласно критерию монотонности функции на промежутке (теорема29.1), условие $f''(x) \geq 0$ $(f''(x) \leq 0)$ для всех $x \in (a,b)$ является необходимым и достаточным условием возрастания (убывания) производной функции *f'(x)* на (a,b). Последнее свойство, согласно теореме 30.1 предыдущего пункта, является необходимым и достаточным условием выпуклости вниз (вверх) функции *f* на интервале (a,b).

4. **Точки перегиба**

Определение 31.2. Точку кривой $M(x_0, f(x_0))$, $x_0 \in (a,b)$ называют ***точкой перегиба***, если она отделяет участок кривой, где функция выпукла вверх, от участка кривой, где функция выпукла вниз.

Если функция $f(x)$ дифференцируема на интервале (a,b), то по теореме 31.1 в некоторой окрестности абсциссы $x_0 \in (a,b)$ точки перегиба её производная либо возрастает слева от точки $x_0 \in (a,b)$, а справа от неё убывает, либо - наоборот. В первом случае рассматриваемая точка будет точкой максимума производной *f'(x)*, во втором случае – точкой минимума. Если предположить существование $f''(x_0)$, то по теореме 24.1 (Ферма), применённой к функции *f'(x)*, получим: $f''(x_0)$ =0.

Это условие играет такую же роль в отношении точек перегиба, какую играло условие $f'(x)=0$ в отношении точек экстремума, т.е. оно является необходимым, но не достаточным. Действительно, функция $y=x^4$, очевидно, выпукла вниз, но её вторая производная, равная $12x^2$, обращается в ноль при $x=0$.

Достаточное условие точки перегиба даёт следующее правило, вытекающее из теоремы 31.3:

если при переходе через значение $x=x_0$ ***вторая производная*** $f''(x)$ ***меняет знак, то налицо перегиб. Если же знак не меняется, то перегиба нет.***

Используя формулу Тейлора, так же, как при исследовании функции на экстремум, можно доказать следующее утверждение:

если $f''(x_0)=0,\ f'''(x_0)=0,\dots,\ f^{(n-1)}(x_0)=0,\ f^{(n)}(x_0)\neq 0$***, и если*** $n-$ ***нечётное число, то в точке*** x_0 ***имеется перегиб, если же*** $n-$ ***чётное число, то перегиба нет.***

***Билет 32*. График изотермы газа Ван-дер-Ваальса**

Построим график изотермы газа Ван-дер-Ваальса, соответствующей критической температуре. Уравнение имеет вид:

$$p = \frac{RT}{V-b} - \frac{a}{V^2}, \tag{1}$$

где p - давление, T - температура, V - объем; R универсальная газовая постоянная; $a, b > 0$ индивидуальные параметры.

Считаем температуру постоянной, имеющей критическое значение, которое будет указано ниже. Тогда уравнение задает p как функцию от одной переменной V, $V > b$. Критическая точка газа определяется уравнениями

$$p' = 0, p'' = 0, \tag{2}$$

где производные взяты по переменной V.

Дифференцируем равенство (1):

$$p' = \frac{-RT}{(V-b)^2} + \frac{2a}{V^3}, \quad p'' = \frac{2RT}{(V-b)^3} - \frac{6a}{V^4}.$$

Система (2) принимает вид:

$$\frac{2a}{V^3} = \frac{RT}{(V-b)^2}, \frac{6a}{V^4} = \frac{2RT}{(V-b)^3} \tag{3}$$

откуда находим:

$$2 = \frac{3(V-b)}{V}, \quad 2V = 3V - 3b, \quad V = 3b. \tag{4}$$

Это – величина критического объема.

Критическую температуру находим из равенства $p' = 0$, т.е.:

$$27b^3RT = 2a \cdot 4b^2, T = \frac{8a}{27bR}. \tag{5}$$

Итак, построим график изотермы для T, принимающей критическое значение (5). Функция p непрерывна при $V > b$. При стремлении

$V \to b+0$ имеем: $p \to +\infty$, что означает, что у графика есть вертикальная асимптота. Производная p' найдена выше, она равна *0*, если выполнено первое из уравнений (8.3),

$\frac{2a}{V^3} = \frac{RT}{(V-b)^2}$, откуда $\frac{2a}{V^3} = \frac{R \cdot ba}{27b \cdot R \cdot (V-b)^2}$,

что после преобразования дает:

$$4V^3 - 27bV^2 + 54b^2V - 27b^3 = 0.$$

(6)

Один корень производной, $V = 3b$, уже найден в (4), поэтому уравнение (6) легко преобразовать к виду:

$(V-3b)^2 \cdot (4V-3b) = 0$.

В области $V > b$ лежит только точка $V = 3b$, в которой производная знака не меняет, в ней нет экстремума.

Нули второй производной ищем из второго уравнения (3),

$\frac{6a}{V^4} = \frac{2RT}{(V-b)^3}$,

или, учитывая (5),

$8V^4 = 81b(V-b)^3$.

Делим обе части этого уравнения на b^4 и обозначаем $z = \frac{V}{b}$. Тогда

$8z^4 = 81(z-1)^3$.

Здесь также очевиден корень $z = 3$ (соответствующий точке $V = 3b$).

Для того, чтобы выяснить вид графика вблизи критической точки, вычислим третью производную p''',

$p''' = -\frac{6RT}{(V-b)^4} + \frac{24a}{V^5}$,

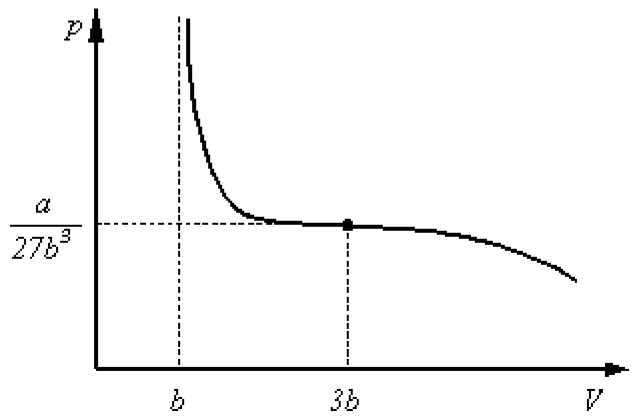
и подставим в неё найденные значения V и T из равенств (4) и (5):

$$p''' = -\frac{6R \cdot 8a}{27bR \cdot (2b)^4} + \frac{24a}{(3b)^5} = \frac{a}{b^5}\left(-\frac{6 \cdot 8}{27 \cdot 2^4} + \frac{24}{3^5}\right) = \frac{a}{b^5}\left(-\frac{1}{9} + \frac{8}{81}\right) < 0.$$

(7)

Неравенство (7) означает, что в точке $V = 3b$, отвечающей температуре (5), график функции (1) имеет перегиб.

Таким образом, получаем эскиз графика:



Примечание: более подробно с этой задачей и, главное, с основными понятиями физической химии, связанными с ней, можно ознакомиться по книге:

ОСНОВЫ ФИЗИЧЕСКОЙ ХИМИИ. Теория и задачи: Учеб. Пособие для вузов / В.В.Ерёмин, С.И. Каргов, И.А. Успенская, Н.Е. Кузьменко, В.В. Лунин.- М.: Изд-во «Экзамен», 2005 , (Серия «Классический университетский учебник») .

<u>График межмолекулярного потенциала Леннард-Джонса</u>

Построим график межмолекулярного потенциала Леннард-Джонса, задаваемого формулой

$$U(r) = U_0\left(\left(\frac{r_0}{r}\right)^{12} - 2\left(\frac{r_0}{r}\right)^{6}\right), \quad r > 0.$$

Это — непрерывная в области определения функция. При $r \to +0$ имеем: $U(r) \to +\infty$, поэтому прямая $r = 0$ является вертикальной асимптотой графика. Если $r \to +\infty$, то $U(r) \to 0$ снизу, прямая $U = 0$ — горизонтальная асимптота. Величина $U(r)$ обращается в нуль при $\left(\frac{r_0}{r}\right)^6 = 2$, т.е. при $r = \frac{r_0}{\sqrt[6]{2}}$,

и для $r > \frac{r_0}{\sqrt[6]{2}}$ выполняется неравенство $U(r) < 0$, а для $0 < r < \frac{r_0}{\sqrt[6]{2}}$ — неравенство $U(r) > 0$.

Производная функции $U(r)$ равна

$$U'(r) = U_0\left(-\frac{12}{r_0}\cdot\left(\frac{r_0}{r}\right)^{13} + \frac{12}{r_0}\cdot\left(\frac{r_0}{r}\right)^{7}\right) = \frac{12U_0}{r_0}\cdot\left(\frac{r_0}{r}\right)^{7}\cdot\left(1-\left(\frac{r_0}{r}\right)^{6}\right),$$

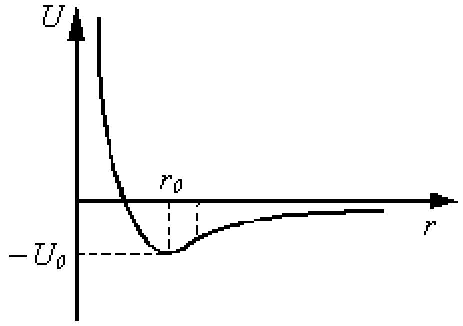
откуда следует, что при $r < r_0$ выполняется $U'(r) < 0$, при $r = r_0$ имеем $U'(r_0) = 0$ и $U'(r) > 0$ при $r > r_0$, так что в точке $r = r_0$ функция достигает своего наименьшего значения, равного $-U_0$.

Вторая производная $U''(r)$ равна

$$U''(r) = U_0\left(\frac{12\cdot 13}{r_0^2}\cdot\left(\frac{r_0}{r}\right)^{14} - \frac{12\cdot 7}{r_0^2}\cdot\left(\frac{r_0}{r}\right)^{8}\right) = \frac{12\cdot U_0}{r_0^2}\cdot\left(\frac{r_0}{r}\right)^{8}\cdot\left(13\left(\frac{r_0}{r}\right)^{6} - 7\right),$$

откуда $U''(r) < 0$ при $r > r_0\cdot\sqrt[6]{\frac{13}{7}}$, $U''(r) = 0$ при $r = r_0\cdot\sqrt[6]{\frac{13}{7}}$ и $U''(r) > 0$ при $0 < r < r_0\cdot\sqrt[6]{\frac{13}{7}}$. Следовательно, выпуклость графика вниз на интервале $\left(r_0, r_0\cdot\sqrt[6]{\frac{13}{7}}\right)$ меняется на выпуклость вверх на $\left(r_0\cdot\sqrt[6]{\frac{13}{7}},\ +\infty\right)$, точка $r = r_0\cdot\sqrt[6]{\frac{13}{7}}$ — точка перегиба.

График $U(r)$ имеет вид:



Примечание: более подробно с этой задачей и, главное, с основными понятиями физической химии, связанными с ней, можно ознакомиться по книге:

ОСНОВЫ ФИЗИЧЕСКОЙ ХИМИИ. Теория и задачи: Учеб. Пособие для вузов / В.В.Ерёмин, С.И. Каргов, И.А. Успенская, Н.Е. Кузьменко, В.В. Лунин.- М.: Изд-во «Экзамен», 2005 , (Серия «Классический университетский учебник») .

«УТВЕРЖДАЮ»
Заведующий кафедрой математического анализа
механико-матем атического факультета МГУ
академик_________________/В.А.Садовничий/
«___»____________2008 г.

Вопросы экзамена по математическому анализу для студентов химического факультета , 1курс, 1 семестр

1. Множества и операции над ними.
2. Декартово произведение множеств, бинарные отношения.
3. Отображения и их свойства.
4. Множество действительных чисел. Аксиома отделимости.
5. Верхние и нижние грани. Стягивающиеся отрезки.
6. Предельные точки.
7. Приближённые вычисления.
8. Предел последовательности. Бесконечно малые последовательности. Арифметические свойства предела.
9. Предельный переход в неравенствах. Предел монотонной ограниченной последовательности.
10. Число e.
11. Критерий Коши существования предела последовательности.
12. Непрерывность функции. Свойства непрерывных функций.
13. Определение предела функции, арифметические свойства предела, предельный переход в неравенствах.
14. Вычисление $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$
15. Предел монотонной ограниченной функции. Непрерывность элементарных функций.
16. Символы $\overset{=}{o}, \underset{=}{O}$. Вычисление пределов $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}, \lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}, \lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^\mu-1}{x}$.
17. Промежуточные значения непрерывной на отрезке функции.
18. Ограниченность непрерывной на отрезке функции.
19. Равномерная непрерывность. Теорема Кантора.
20. Производная, её естественнонаучный смысл и основные свойства.
21. Производные элементарных функций, обратной функции, сложной функции, параметрически заданной функции.
22. Дифференциал. Инвариантность формы первого дифференциала.
23. Производные и дифференциалы высших порядков.
24. Теоремы Ферма, Ролля. Необходимые условия экстремума.
25. Теоремы Лагранжа и Коши. Критерий постоянства функции на отрезке.
26. Формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа.
27. Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано.
28. Разложения функций $e^x, \sin x, \cos x, \ln(1+x), (1+x)^\mu$.
29. Правила Лопиталя.
30. Монотонность функции. Достаточные условия экстремума функции.
31. Выпуклость графика функции.
32. График изотермы газа Ван-дер Ваальса. График межмолекулярного потенциала Леннард-Джонса.

Примечание: вопросы коллоквиума- это первые 19 вопросов

Вопросы зачёта по аналитической геометрии

Примечание: Вопросы 1-9 сформулированы для трёхмерных векторов и матриц размера 3×3.

1. Системы линейных уравнений, их запись в матричной форме
2. Матрицы, векторы. Линейные операции над ними.
3. Умножение матриц.
4. Определители и их свойства.
5. Разложение определителя по строке(столбцу).
6. Обратная матрица.
7. Правило Крамера.
8. Решение системы линейных уравнений методом Гаусса.
9. Скалярное произведение векторов.
10. Векторное произведение векторов.
11. Смешанное произведение векторов.
12. Плоскость в пространстве. Нормальное уравнение плоскости.
13. Прямая в пространстве.
14. Взаимное расположение плоскостей и прямых в пространстве.
15. Эллипс.
16. Гипербола.
17. Парабола.
18. Приведение кривой второго порядка к каноническому виду.
19. Эллипсоид и гиперболоиды.
20. Параболоиды
21. Конус и цилиндры.

Лектор профессор /В.Г.Чирский/